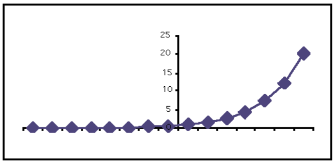
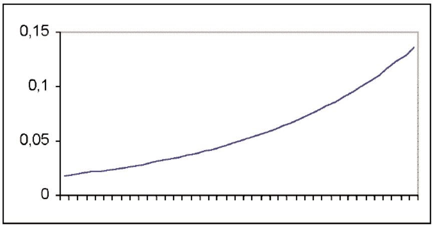
Une visualisation du fait que les lois exponentielles sont sans vieillissement

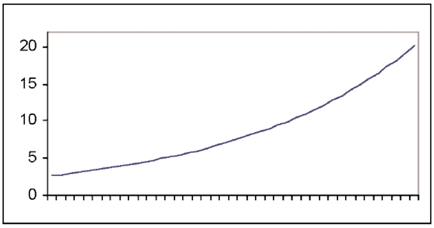
Jean-François Kentzel(*)

Je pensais bien connaître la fonction exponentielle (représentée ci-contre sur l'intervalle [−4 ; 3]). Certains lecteurs souriront de mon ignorance mais j'avoue avoir été surpris par les représentations graphiques de cette fonction qui suivent (représentations données par un tableur qui choisit par défaut les échelles pour donner un dessin lisible).





Représentation graphique sur [−4 ; −2]



Représentation graphique sur [1 ; 3]

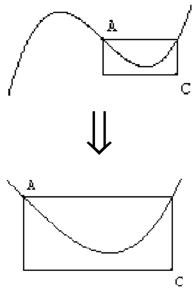
Chacun peut voir qu'il s'agit, à l'échelle près, de la même courbe. *On passe en effet de la première courbe à la deuxième en multipliant toutes les ordonnées par* e^5. Tout est dit ; ce qui suit n'est qu'une mise en forme de cette observation.

Plus généralement, le plan étant muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et k et λ étant des constantes non nulles, la représentation graphique d'une fonction du type $f : x \mapsto k \cdot e^{\lambda x}$ a « partout la même allure», affirmation qu'il est nécessaire de formaliser car elle n'a *a priori* guère de sens : précisément, si on fixe un réel positif t, alors quels que soient les réels positifs s et s', si on désigne par C et C′ les représentations graphiques des restrictions de f aux intervalles de même longueur $[s \,;\, s + t]$ et $[s' \,;\, s' + t]$, il est immédiat qu'on passe de C à C′ en faisant opérer une translation (de vecteur $(s' - s)\,\vec{i}$) suivie d'une affinité, de base $\left(O, \vec{i}\right)$, parallèlement à $\left(O, \vec{j}\right)$ et de rapport $e^{\lambda(s'-s)}$ (c'est-à-dire d'une application envoyant M $(x \,;\, y)$ sur M′ $(x \,;\, e^{\lambda(s'-s)}y)$).

(*) Lycée Pardailhan à Auch-32. Adresse : JKentzel@ac-toulouse.fr

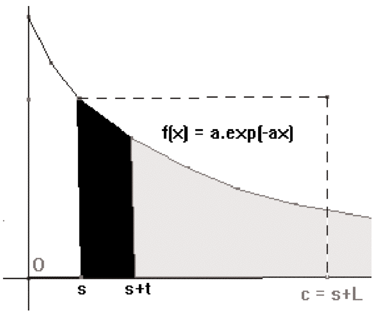
Ce qui suit est détaillé de façon à être accessible à des élèves dans l'annexe 4 (**qui est téléchargeable**).

Premier point de vue (« on a partout le même dessin »)



Pour des élèves, ce qui précède signifie concrètement, que **si deux d'entre eux tracent la représentation graphique d'une telle fonction** f, avec par exemple λ et k de même signe[(1)], **sur un intervalle de même longueur**, ceci avec leurs calculatrices, dont on suppose que les écrans ont la même taille, **en utilisant la commande Zoom/Box** (accessible sur les machines TI et Casio : elle permet d'obtenir la restriction d'une courbe à une fenêtre dont on précise une diagonale ; voir ci-contre avec [AC]), en prenant la fenêtre de diagonale [AB] avec A $(s\ ;\ 0)$ et B $(s+t\ ;\ f(s+t))$, **ils obtiennent le même dessin sur leur écran**.

On peut appliquer ce qui précède à la densité d'une loi exponentielle (de la forme $f : x \mapsto a\cdot \mathrm{e}^{-ax}$ avec $a > 0$).



Sur le dessin ci-contre, pour s, t et L fixés vérifiant $0 \le t \le \mathrm{L}$, l'allure de la courbe (cette expression ayant le sens défini ci-dessus) située à l'intérieur du rectangle ne dépend pas de s. **En désignant par** $\boldsymbol{h}$ **l'aire noircie et par** $\boldsymbol{i}$ **l'aire sous la courbe à l'intérieur du rectangle,** $\boldsymbol{h}$ **et** $\boldsymbol{i}$ **dépendent, bien sûr, de** $\boldsymbol{s}$ **mais le rapport** $\boldsymbol{h/i}$ **ne dépend pas de** $\boldsymbol{s}$**.**
En désignant par X la variable aléatoire dont la densité est f, ceci s'écrit :
$\mathrm{P}_{s\le \mathrm{X}\le s+\mathrm{L}}(s \le \mathrm{X} \le s+t)$ ne dépend pas de s.

Le rapport $\dfrac{h}{i}$ est $\dfrac{\mathrm{P}(s\le \mathrm{X}\le s+t)}{\mathrm{P}(s\le \mathrm{X}\le s+\mathrm{L})} = \dfrac{\int_s^{s+t} a\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx}{\int_s^{s+\mathrm{L}} a\,\mathrm{e}^{-ax}\,dx}$ qui donne $\dfrac{1-e^{-at}}{1-e^{-a\mathrm{L}}}$ après simplification par e^{-as}. C'est parce que ce calcul, faisable par la majorité des élèves et exigible au bac, est un peu obscur qu'une interprétation graphique en est proposée.

En faisant tendre L vers $+\infty$, on obtient :
$\mathrm{P}_{s\le \mathrm{X}}(s \le \mathrm{X} \le s+t)$ ne dépend pas de s et vaut donc, en prenant $s = 0$, $\mathrm{P}(0 \le \mathrm{X} \le t)$.

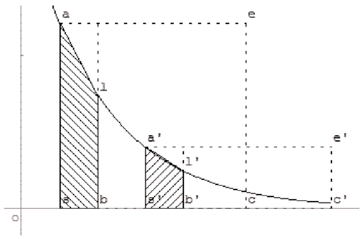
On a donc une visualisation, c'est-à-dire une image permettant à certaines personnes de mieux comprendre ou mémoriser un phénomène, du fait que les lois exponentielles sont sans vieillissement ou sans mémoire.

On peut préférer la présentation suivante (qui est en fait identique).

(1) Sinon f est décroissante et il faut remplacer A et B ci-dessous par A $(s\ ;\ f(s))$ et B $(s+t\ ;\ 0)$. C'est d'ailleurs le cas dans ce qui suit.

f y est de la forme $f : x \mapsto \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$.

Sur le dessin ci-contre, une lettre désignant à la fois un point et son abscisse, s et s' sont quelconques, $b = s + t$, $b' = s' + t$ et les segments $[sc]$ et $[s'c']$ ont la même longueur L donc on passe du rectangle $scea$ au rectangle $s'c'e'a'$ par une translation (de vecteur $(s' - s)\vec{i}$) suivie d'une affinité de base $(x'x)$ et de rapport $\mathrm{e}^{-\lambda(s'-s)}$.



Traduction pour les élèves : on a « le même dessin » à l'intérieur de ces deux rectangles.

Dans ces deux rectangles, en désignant par h l'aire hachurée et par i l'aire sous la courbe, le rapport h/i est le même.

En désignant par X la variable aléatoire dont la densité est f, ceci s'écrit :

$$\mathrm{P}_{s' \leq X \leq s'+L}(s' \leq X \leq s' + t) = \mathrm{P}_{s \leq X \leq s+L}(s \leq X \leq s + t).$$

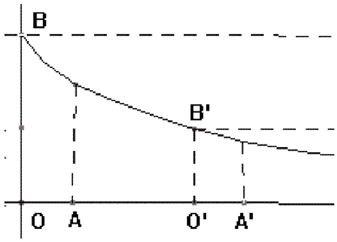
On conclut comme précédemment en faisant tendre L vers $+\infty$.

Commentaires

a) On peut prendre directement $s = 0$ pour aller plus vite.

b) Considérer la limite quand L tend vers l'infini de $\mathrm{P}_{s \leq X \leq s+L}(s \leq X \leq s + t)$ peut, à juste titre !, laisser les élèves rêveurs et il faut rappeler que cette expression est un quotient de deux intégrales, L étant, presque, une borne d'une de ces intégrales.

c) Vu le manque de temps en terminale on peut se contenter de l'explication informelle suivante : dans chacun des « rectangles » ci-contre (de largeurs [OB] et [O′B′] et de longueur infinie), « on a le même dessin » d'où l'invariance du quotient h/I où I est l'aire d'une partie non bornée.



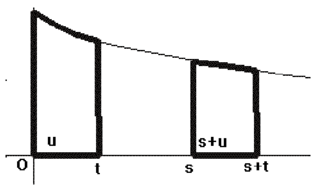
Deuxième point de vue (« la fonction est multipliée par une constante quand on change d'intervalle »)

Pour n'importe quelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : pour tout $s > 0$, il existe une constante C telle que pour tout t fixé, $t > 0$, et pour tout u de $[0 ; t]$,

$$f(s + u) = \mathrm{C} \cdot f(u),$$

on a la propriété :

$$\int_s^{s+t} f(x)dx = \mathrm{C} \cdot \int_0^t f(x)dx.$$



Autrement dit : lorsque sur l'intervalle $[a + t ; b + t]$, une fonction f prend exactement les mêmes valeurs, à un coefficient multiplicatif C près, que sur l'intervalle [a ; b], alors $\int_{a+t}^{b+t} f(x)dx = \mathrm{C} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Il semble difficile de le justifier rigoureusement sans changement de variable sous le signe intégral mais c'est intuitivement évident.

Pour g définie par $g(x) = k \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, C vaut $k \cdot \mathrm{e}^{\lambda s}$.

On en déduit avec les notations ci-dessus :

$$\frac{h'}{i'} = \frac{\mathrm{C}h}{\mathrm{C}i} = \frac{h}{i}.$$

ANNEXE 1

Caractérisation des fonctions dérivables vérifiant la propriété graphique utilisée

Cette propriété (« fenêtre dont un bord est l'axe des abscisses »), notée P_1, peut être formalisée ainsi :

$$\forall a, \exists \mathrm{C} \mid \forall s, \forall b \mid b \geq s, x \in [s ; b] \Rightarrow f(x+a) = \mathrm{C}\, f(x).$$

On peut noter qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant P_1 et vérifiant en un point une des trois conditions (nullité, continuité, dérivabilité) vérifie nécessairement cette condition pour tous les réels.

Soit f une fonction vérifiant P_1 et non nulle (c'est-à-dire ne s'annulant nulle part d'après la propriété ci-dessus). En prenant $s = 0$, puis $x = 0$ dans P_1, on obtient $f(a) = \mathrm{C} \cdot f(0)$ et donc, puisque f ne s'annule pas : $\mathrm{C} = f(\mathrm{a})/f(0)$; d'où l'idée de considérer la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{f(0)}$. P_1 donne alors :

$$g(x + a) \cdot f(0) = g(a) \cdot g(x) \cdot f(0),$$

c'est-à-dire :

$$g(x + a) = g(a) \cdot g(x).$$

On démontre en terminale S qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, dérivable(2), non nulle et vérifiant cette équation fonctionnelle est nécessairement une fonction exponentielle, c'est-à-dire une fonction du type $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ (avec $\lambda = f'(0)$).

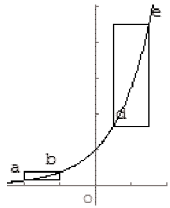
Parmi les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables et non nulles, celles qui vérifient P_1 sont donc, à une constante multiplicative près, celles qui vérifient : pour tous réels a et x, g(x + a) = g(a) · g(x), c'est-à-dire que ce sont les fonctions du type $f : x \mapsto k \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$.

(2) On trouve sur la page http://www-irma.u-strasbg.fr/~debarre/Exponentielle-Log.pdf (notes de cours de CAPES d'Olivier Debarre et Nicole Bopp, page 4) d'une part la preuve, simple, du fait que c'est encore vrai si on suppose seulement g continue (en un point) et, d'autre part, l'indication, non démontrée, que la preuve de l'existence de fonctions non continues g vérifiant $g(x + a) = g(a) \cdot g(x)$ est possible à l'aide de l'axiome du choix.

ANNEXE 2

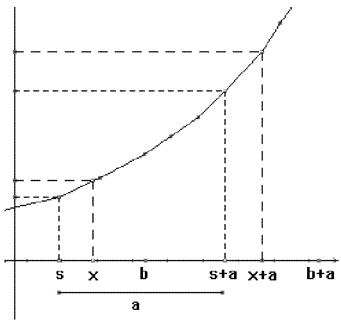
Étude d' une propriété graphique proche de celle utilisée

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels. On peut considérer une propriété du même type que celle utilisée ci-dessus, peut être plus jolie car plus « aérienne » si k et λ sont de même signe, mais inutile ici, en considérant des fenêtres de diagonale $[ab]$ avec a $(s\,;f(s))$ et b $(s+t\,;f(s+t))$. On obtient alors une propriété qui est bien évidemment également vraie pour les fonctions affines.



On peut formaliser cette deuxième propriété (« petite fenêtre ») notée P_2 :

$$\forall a, \exists C' \mid \forall s, \forall b \mid b \geq s,$$
$$x \in [s;b] \Rightarrow f(x+a) - f(s+a)$$
$$= C'\big(f(x) - f(s)\big).$$



Comme pour P_1, l'introduction du nombre b dans cette définition est destinée à pouvoir donner une traduction pour des fenêtres de calculatrices graphiques.

Propriétés immédiates

Toute fonction vérifiant P_1 vérifie aussi P_2. Comme P_1, P_2 est donc vérifiée par les fonctions du type $f : x \mapsto k \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Contrairement à P_1, P_2 est évidemment vraie aussi pour les fonctions affines.

Il ne semble pas facile de donner un catalogue exhaustif des fonctions vérifiant P_2.

Une **Annexe 3** (document pour les élèves) est disponible sur le site de la régionale de Toulouse, accessible aussi via le site national APMEP.