Une trisection de l'angle, ou Michel Chasles revisité

Jean-Pierre Friedelmeyer[(*)]

En étudiant le « *Traité des sections coniques* » de Michel Chasles (publié en 1865), je suis tombé sur une méthode originale de partage d'un angle en trois parties égales. Le texte de Chasles, que l'on trouvera reproduit en fin d'article, utilise une homographie, notion qui n'est pas au programme de lycée. Il serait pourtant dommage de passer à côté de la belle idée de Chasles pour un des grands problèmes de l'histoire des mathématiques[(1)]. J'ai tenté ci-dessous d'en esquisser une activité pour la classe, avec le concours précieux de Michel de Cointet, que je remercie. Des adaptations et des compléments restent bien sûr à la charge du professeur, en fonction du niveau de ses élèves et des évolutions de programme.

Énoncé

On donne deux points A et B du cercle trigonométrique (U).

On cherche le ou les points M de (U) tels que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=3\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$, ou encore $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=2\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)$.

Méthode de résolution (Figure 1)

Soit O le centre du cercle (U).
À tout point m de (U), on fait correspondre m' de (U) tel que

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{Om'}\right)=2\left(\overrightarrow{Om},\overrightarrow{OB}\right).$$

La ou les solutions du problème sont données par les points m tels que $m=m'$.
Traçons les droites (Om) et (Am') et notons X le point d'intersection (s'il existe) de ces deux droites.
On remarque que le point X coïncide avec m si et seulement si $m=m'$; à condition, toutefois d'exclure le cas où m' est en A (ou m en B) car, alors, la droite (Am') n'est pas définie.

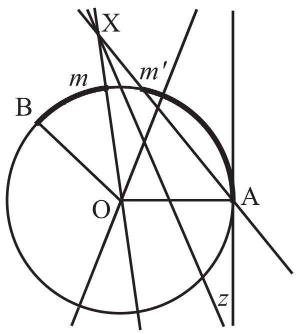

Figure 1

On est donc conduit à
1.- chercher le lieu (H) du point X lorsque m décrit (U),
2.- déterminer le ou les points d'intersection de (H) et de (U).

(*) Irem de Strasbourg.
(1) Nous rappelons à ce sujet l'existence d'une brochure APMEP (n° 70) « *Ces problèmes qui ont fait les mathématiques (la trisection de l'angle)* » par Jean AYMES. Cette brochure ne mentionne pas la méthode de Chasles.

Résolution du problème (Figure 2)

En géométrie analytique, il est souvent important de bien choisir le repère. Si l'on a un peu de temps, il peut être formateur pour les élèves de les laisser se lancer d'emblée dans les calculs et les amener à constater que ceux–ci peuvent être vite compliqués, et qu'il vaut mieux réfléchir au choix d'un (bon) repère, c'est-à-dire un repère qui tienne compte des symétries de la figure. Mais on peut aussi faire l'économie de la justification de ce choix (§1 qui suit), en proposant d'emblée le repère tel qu'il est défini à la fin de ce paragraphe.

1. Choix d'un repère.

Une investigation au moyen d'un logiciel de géométrie (ici Cabri géomètre[2]) nous confirme que le lieu de X évoque une hyperbole équilatère. Cela rend possible le traitement du problème analytiquement au niveau lycée, à condition que les asymptotes soient parallèles aux axes de coordonnées. Cette investigation nous montre aussi que X s'éloigne à l'infini dans la direction d'une bissectrice (Xz) de l'angle $\widehat{\mathrm{OXA}}$, et nous fait conjecturer que les directions de (Om) et (Am') restent symétriques par rapport à une direction fixe, celle de (Xz). Démontrons le.

On pose $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\varphi$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}m},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\theta$, d'où on a : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O}m}\right)=\varphi-\theta$.

Alors

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O}m'}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{O}m'},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right)=2\theta+\pi-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right),$$

donc : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right)=\theta+\dfrac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right)=\theta-\dfrac{\pi}{2}$; ces deux angles définissent la même droite (Am') avec deux orientations opposées. On en déduit, tous calculs faits :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O}m}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right)\right]=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\text{ ou }\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi\text{ ou }\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\text{ ou }\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi\ ;$$

ces quatre angles correspondent aux deux directions de bissectrices, chacune avec deux orientations possibles.

Cela montre que les directions des bissectrices des droites (Om) et (Am') sont fixes. On a donc tout intérêt à choisir un repère dont les axes Ox et Oy aient ces directions. Pour la commodité des écritures, on pose $\varphi=2\alpha$.

En choisissant Ox tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$, on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O}y}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$. Les axes O$x$ et Oy sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

(2) Dans sa belle et instructive brochure : « Faire de la géométrie supérieure en jouant avec CABRI - GÉOMÉTRE » (Brochure APMEP n° 124, p. 145), Roger CUPPENS a montré en détail comment implanter dans Cabri l'idée de Chasles. Il en donne aussi une application intéressante pour la construction de certains polygones réguliers.

2. Recherche d'une équation du lieu de X

a) Posons $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{O}m}\right) = t$, avec $t \in [0, 2\pi[$.

Une équation de la droite (Om) est alors

$$x \sin t - y \cos t = 0.$$

b) Le calcul d'angle du 1. nous donne

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{O}x}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{A}m'}\right) = \frac{\pi}{4} - \alpha + \theta + \frac{\pi}{2} = \pi - t \quad (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Une équation de la droite (Am') est donc

$$x \sin t + y \cos t = u \sin t + v \cos t$$

où u et v désignent les coordonnées du point A, soit :

$$u = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \ ; \ v = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

c) Les coordonnées de X sont donc solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} x \sin t - y \cos t = 0 \\ x \sin t + y \cos t = u \sin t + v \cos t \end{cases}$$

– Par élimination de t, on obtient une équation de la courbe décrite par X, en tout ou partie :

$$2xy - vx - uy = 0$$

ou encore

$$y = \frac{vx}{2x - u}.$$

Les coordonnées de A vérifient ces équations, mais A est à exclure de (H) (voir méthode de résolution).
La courbe est une hyperbole équilatère dont le centre est le milieu du segment [OA] et les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

– En résolvant le système précédent, on obtient des équations paramétriques de (H) :

$$x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2 \tan t} \ ; \ y = \frac{u \tan t}{2} + \frac{v}{2}$$

avec $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, en tenant compte de la période de la fonction tangente.

Lorsque t parcourt chacun de ces deux intervalles, le point X parcourt chacune des deux branches de l'hyperbole précédente dans son entier.

N.B. On peut vérifier que pour les valeurs de t prises aux extrémités des deux intervalles, les équations paramétriques ne sont pas définies et, par ailleurs, que les droites (Om) et (Am') sont parallèles.

3. Intersections de l'hyperbole et du cercle

Les coordonnées x et y du ou des points M d'intersection de (H) et de (U) sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} 2xy - vx - uy = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Introduisons l'affixe z de M. Celle-ci est solution du système

$$\begin{cases} z^2 - \overline{z}^2 - \mathrm{i}\,v\left(z + \overline{z}\right) - u\left(z - \overline{z}\right) = 0 \\ z\overline{z} = 1 \end{cases}$$

Et, par conséquent, les affixes des points M sont solutions de l'équation

$$z^4 - (u + \mathrm{i}\,v)z^3 + (u - \mathrm{i}\,v)z - 1 = 0 \qquad (1)$$

Notons que, du paragraphe précédent, il résulte que l'affixe de A est solution de cette équation. Désignons par $a = u + \mathrm{i}v$ son affixe ; alors $u - iv = \overline{a} = \dfrac{1}{a}$ et l'équation (1) s'écrit :

$$z^4 - az^3 + \overline{a}z - 1 = 0$$

ou

$$az^4 - a^2z^3 + z - a = (z - a)(az^3 + 1) = 0.$$

On a donc bien la solution $z = a$, qui donne le point A et les solutions de $az^3 + 1 = 0$ qui sont aussi celles de $z^3 = -\overline{a}$. Comme dans le cas réel, on dit dans ce cas que les solutions z sont les racines cubiques de $\left(-\overline{a}\right)$. Pour les expliciter, le plus simple est de remarquer que :

a) le module de z^3 doit être égal au module de $\left(-\overline{a}\right)$ donc 1, ce qui entraîne que le module de z vaut 1, résultat qui confirme simplement que le point M est sur (U).

b) l'argument de z^3 (soit trois fois l'argument de z) est égal à l'argument de $\left(-\overline{a}\right)$, soit $\alpha + \dfrac{3\pi}{4}$.

(H) et (U) ont donc trois points d'intersection autres que A ; ce sont les points M, N, P, dont les affixes sont les racines cubiques du nombre complexe $\left(-\overline{a}\right) = -u + \mathrm{i}v$, où u et v sont les coordonnées du point A

Autrement dit, ce sont les points M, N et P du cercle trigonométrique dont les affixes ont pour arguments $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3}$, où 2α est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

On a bien $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\dfrac{2\varphi}{3}$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}$, où φ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et, par conséquent

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=3\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)=3\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB}\right)=3\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OB}\right).$$

Résumons :

Le problème admet trois solutions. Ce sont les trois points d'intersection, autres que A, du cercle trigonométrique et d'une hyperbole équilatère (H).
Dans un repère orthonormal d'origine O et dont les axes sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, une équation de (H) est $2xy - vx - uy = 0$. Son centre est le milieu du segment [OA] et ses asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

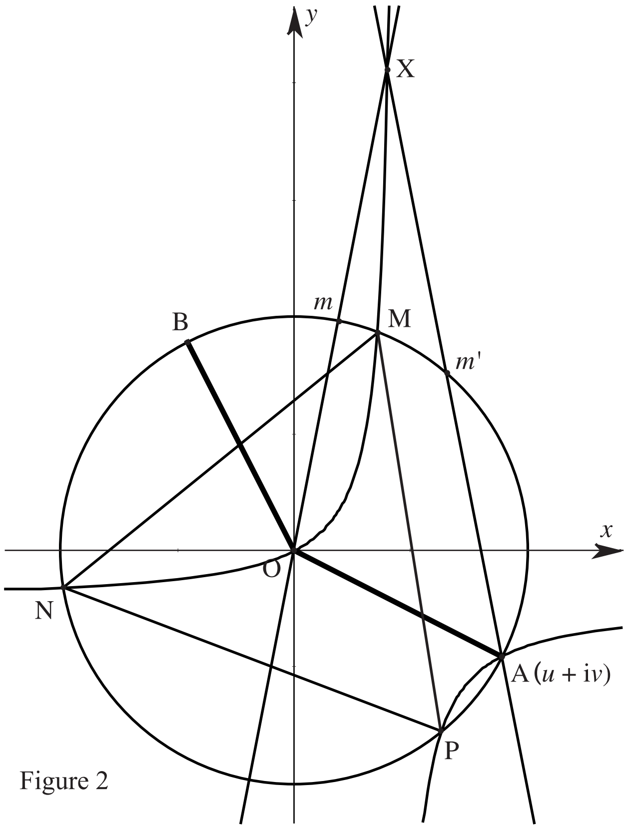

Figure 2

Le texte de Chasles
(Traité des sections coniques, 1865, § 37, p. 36)

37. *Trisection de l'angle.* — On demande de diviser l'angle AOB (*fig.* 19), ou l'arc AB décrit du point O comme centre, en trois parties égales.

Qu'on prenne sur l'arc AB le point m arbitrairement, et le point m' de manière que l'arc Bm' soit double de Am. L'angle AOm est égal à l'angle TBm' que fait la corde Bm' avec la tangente BT. Les deux droites Om, Bm' forment donc, dans leurs positions successives, deux faisceaux homographiques, et leur point d'intersection n décrit une conique qui passe par les extrémités A et B de l'arc à diviser. Il est évident que le point M où cette conique rencontre encore une fois cet arc résout la question, et que l'arc AM sera le tiers de l'arc AB. Car les deux angles AOM, TBM sont égaux; conséquemment l'arc BM est double de l'arc AM, et celui-ci est le tiers de AB.

On reconnaît sans difficulté que la conique, lieu du point n, est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle des deux droites OA, BT et de son supplément.

On sait que ce problème de la trisection de l'angle résolu d'abord par les Grecs, l'a été souvent ensuite, de bien des manières différentes. On peut douter qu'aucune solution soit plus simple et surtout plus élémentaire que la précédente, puisqu'elle dérive immédiatement de la propriété fondamentale relative aux points d'une conique, sans exiger la connaissance d'aucune autre propriété.

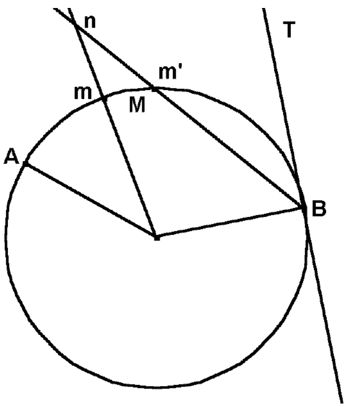

Figure 19