Somme de deux racines carrées

Un Thème à dérouler sur plusieurs niveaux

Richard Choulet(*)

1. Le point de départ

Un jour pas très lointain, je tombe dans un livre de nos secondes, sur l'exercice consistant à faire calculer les premières puissances entières de $1+\sqrt{2}$ et à constater qu'elles se mettent sous la forme $\sqrt{\mathrm{N}}+\sqrt{\mathrm{N}+1}$ où N est un entier naturel. Et là vous savez ce que c'est, la machine s'emballe : tiens, c'est curieux, je n'ai jamais vu ça présenté comme ça ! Pourquoi ça marche ? Et si on avait pris $2+\sqrt{3}$? Et deux radicaux comme $\sqrt{2}+\sqrt{5}$? Des exposants négatifs ? Pourrait-on mettre des coefficients devant, avec un résultat voisin ? Prendre plusieurs radicaux ? Je dis STOP !

Il faut retrouver un peu de sérénité et reprendre froidement les tenants et aboutissants de l'affaire.

2. Pourquoi « ça marche » ?

2.0. Avant toute chose, explicitons notre convention d'écriture : quand je mets + entre deux nombres, c'est qu'ils sont positifs, sinon j'aurais mis des – ! Je veux dire par là, par exemple, que si je prends $a+b\sqrt{d}$ c'est que a et b sont positifs sinon j'aurais mis $-a+b\sqrt{d}$ ou $-a-b\sqrt{d}$ suivant les circonstances.

2.1. Il est peut-être bon de faire un petit retour sur le corps quadratique $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{a+b\sqrt{d}, a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{Q}\right\}$ où d est dans $\mathbb{Z}$ sans facteur carré, et de rappeler que pour a et b quelconques dans $\mathbb{Q}$, le *conjugué* de $\alpha=a+b\sqrt{d}$ est $\alpha^*=a-b\sqrt{d}$. Cette conjugaison est un automorphisme de $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right);+,\times\right)$.

La *norme* de l'élément α est alors $\mathrm{N}(\alpha)=\alpha\alpha^*=a^2-db^2$; N est un homomorphisme de $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right);\times\right)$ vers $(\mathbb{Q};\times)$ pour lequel on a, entre autres propriétés (avec les quantificateurs à la clé !) :

$$\mathrm{N}(\alpha\beta)=\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta), \tag{1}$$

$$\mathrm{N}(\alpha^n)=(\mathrm{N}(\alpha))^n. \tag{2}$$

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. richardchoulet@wanadoo.fr

Remarquons que pour $d = -1$, on a affaire au corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$, que le conjugué α^* n'est pas autre chose que $\bar{\alpha}$, conjugué complexe du complexe $\alpha = a + b\mathrm{i}$, et qu'enfin la norme $\mathrm{N}(\alpha)$ est le classique $a^2 + b^2$ module au carré de α.

2.2. Revenons à notre $\theta = 1+\sqrt{2}$. C'est une *unité* dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, c'est-à-dire un élément de l'ensemble qui a pour norme ±1 ; ici $\mathrm{N}(\theta) = -1$.
D'après (2), toute puissance entière (dans $\mathbb{Z}$) d'une unité est une unité, donc toute puissance de $1+\sqrt{2}$, que l'on peut écrire sous la forme $\pm a \pm b\sqrt{2}$, vérifie $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$ ce qui signifie que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ s'écrit sous la forme $\sqrt{\mathrm{N}} + \sqrt{\mathrm{N}+1}$, avec N entier naturel. Observons aussi que le plus grand nombre sous le radical passe alternativement, suivant la parité de l'exposant, du coefficient de 1 à celui de $\sqrt{2}$ dans la décomposition suivant la base $\left(1;\sqrt{2}\right)$.
Par exemple :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = \left(3+2\sqrt{2}\right)^2 = 17+12\sqrt{2} = \sqrt{289}+\sqrt{288}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = -7+5\sqrt{2} = -\sqrt{49}+\sqrt{50}.$$

3. Et avec $a+b\sqrt{d}$?

Étoffons la partie précédente en regardant ce qu'il advient de notre résultat lorsqu'on considère un élément de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ où d est entier naturel et de surcroît sans facteur carré. Je considère $\theta = a+b\sqrt{d}$ avec ma convention $a > 0$ et $b > 0$; dans le cas contraire il faudra adapter modestement ce qui sera écrit.
Le travail a été préparé dans les paragraphes 2.1 et 2.2 de sorte que, remarquant que : $\theta^n = a_n + b_n\sqrt{d}$ (pour l'instant $n \in \mathbb{N}$, ce qui fait $a_n > 0$ et $b_n > 0$), on est sûr que

$$\mathrm{N}\left(\theta^n\right) = a_n^2 - db_n^2 = \left(a^2 - db^2\right)^n.$$

Je note $q = a^2 - db^2$ et ainsi j'obtiens que :

$$\theta^n = \sqrt{db_n^2 + q^n} + \sqrt{db_n^2}.$$

Sous les radicaux, nous avons des rationnels dont la différence constitue une suite géométrique de raison q, en ayant pris soin de prendre en premier ce qui est relatif au coefficient de 1 puis ensuite ce qui correspond au coefficient de $\sqrt{d}$.

Lorsque a ou b est négatif, ou lorsque l'exposant n est négatif, le réglage se fait d'abord en disant qu'on a une somme ou une différence de racines carrées et ensuite le résultat subsiste en ne s'intéressant qu'à ce qu'il y a sous les radicaux. Par exemple avec $\theta = -2+3\sqrt{5}$ de norme -41 :

$$\left(-2+3\sqrt{5}\right)^2 = 49-12\sqrt{5} = \sqrt{2\,401}-\sqrt{720} \text{ où } 2\,401-720=(-41)^2,$$

$$\left(-2+3\sqrt{5}\right)^3 = -278+171\sqrt{5} = -\sqrt{77\,284}+\sqrt{146\,205} \text{ où } 77\,284-146\,205=(-41)^3,$$

mais on a aussi :

$$\left(-2+3\sqrt{5}\right)^{-3} = \frac{1}{-278+171\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{278^2}{41^6}}+\sqrt{\frac{171^2}{41^6}\times 5} \text{ avec } \frac{278^2}{41^6}-5\frac{171^2}{41^6}=(-41)^{-3}.$$

Remarque : La relation

$$\theta^n = a_n + b_n\sqrt{d} \qquad (3)$$

permet de définir les suites (a_n) et (b_n) récurrentes d'ordre deux dont il ne faut pas être très surpris qu'elles soient combinaisons linéaires de θ et de θ^n. On obtient ainsi les formules

$$\begin{cases} a_{n+1} = aa_n + bdb_n, \\ b_{n+1} = ba_n + ab_n. \end{cases}$$

Par ailleurs, directement (3) et sa conjuguée donnent $a_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(\theta^n + \theta^{*n}\right)$ et $b_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left(\theta^n - \theta^{*n}\right)$.

Une petite cerise : avec θ de norme 1 (pensons à $\theta = 3+2\sqrt{2}$ pour lequel $\theta^{-1} = 3-2\sqrt{2} = \theta^*$) auquel cas $\theta^* = \theta^{-1}$, les formules donnent $a_n = \frac{1}{\sqrt{d}}\cosh(n\ln\theta)$ et $b_n = \frac{1}{\sqrt{d}}\sinh(n\ln\theta)$ qui sont intellectuellement très réussies.

4. Et avec deux radicaux ?

Regardons naïvement l'exemple de $\theta = \sqrt{2}+\sqrt{5}$. Suivant la parité de l'exposant on se retrouve avec un élément dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{10}\right)$ pour les exposants pairs et dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$ pour les exposants impairs. Cette dernière extension contient la première ; $\mathbb{Q}\left(\sqrt{10}\right)$ est de degré deux, engendré par $\left(1;\sqrt{10}\right)$ alors que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$ est de degré quatre, engendré par $\left(1;\sqrt{2};\sqrt{5};\sqrt{10}\right)$. Voyons quelques calculs :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2 = 7+2\sqrt{10} = \sqrt{40}+\sqrt{49} \text{ où } 49-40=3^2,$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3 = 17\sqrt{2}+11\sqrt{5} = \sqrt{578}+\sqrt{605} \text{ où } 605-578=3^3,$$

et même si l'on veut

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3} = \sqrt{\frac{578}{3^6}} - \sqrt{\frac{605}{3^6}} \text{ avec } \frac{578}{3^6}-\frac{605}{3^6} = -3^{-3},$$

Qu'est-ce qui subsiste de la partie 3 avec deux radicaux ?

Nous prenons $\theta = a\sqrt{p}+b\sqrt{q}$ où p et q sont des naturels sans facteur carré avec $p < q$. Dans un premier temps, comme il a déjà été dit, on peut se limiter à prendre a et b positifs. D'autre part ne perdons pas de vue le problème qui consiste à écrire d'abord θ^n comme somme ou différence de deux racines carrées et à évaluer ensuite, en respectant l'ordre des termes, *la différence des nombres sous les radicaux*.

Comme $\theta = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(pa+b\sqrt{pq}\right)$, on obtient déjà que $\theta^n = \frac{1}{p^{\frac{n}{2}}}\left(x_n + y_n\sqrt{pq}\right)$, ce qui, compte tenu de $\theta^{n+1} = \theta \cdot \theta^n$, donne les formules de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = pax_n + pqby_n \\ y_{n+1} = bx_n + pay_n \end{cases}$$

où $x_1 = pa$ et $y_1 = b$.

En écrivant $\theta^n = \sqrt{\frac{x_n^2}{p^n}} + \sqrt{\frac{y_n^2 pq}{p^n}}$ et en notant Δ_n la différence des nombres sous radicaux, on obtient :

$$\Delta_n = \frac{x_n^2 - pqy_n^2}{p^n}.$$

Des relations de récurrence ci-dessus, on obtient

$$x_{n+1}^2 - pqy_{n+1}^2 = p\left(pa^2-qb^2\right)\left(x_n^2-pqy_n^2\right),$$

ce qui donne :

$$\Delta_{n+1} = \left(pa^2 - qb^2\right)\Delta_n .$$

La suite (Δ_n) est bien géométrique de raison $pa^2 - qb^2$. **Quelle est l'explication simple de ce fait ?**

On a écrit dès le début que $\theta = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(pa + b\sqrt{pq}\right)$, pour lequel, dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{pq}\right)$, on calcule :

$$\mathrm{N}\left(\theta\sqrt{p}\right) = p^2a^2 - pqb^2.$$

À l'exposant n, on obtient :

$$\mathrm{N}\left(\theta^n p^{\frac{n}{2}}\right) = p^n\left(p^2a^2 - qb^2\right)^n = x_n^2 - pqy_n^2,$$

ce qui prouve ainsi que

$$\Delta_n = \left(p^2a^2 - qb^2\right)^n$$

et assure que la suite (Δ_n) est géométrique. Voici quelques remarques pour finir :

1. En reprenant l'exemple numérique $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, on a l'expression de la norme dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{5}\right)$ (on garde néanmoins la même notation N) qui se calcule par :

$$\mathrm{N}\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}\right) = \left(a^2 - 2b^2 + 5c^2 - 10d^2\right)^2 - 20\left(ac - 2bd\right)^2$$

(ce qui donne $\mathrm{N}\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) = 9$) et, en fait, la suite géométrique des différences est de raison $-\sqrt{\mathrm{N}\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)}$.

2. Dans l'idée de prolonger à plusieurs radicaux, nous avons pris l'exemple de $\theta = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ et trouvé $\theta^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10}$ pour lequel la suite $\left(a_n^2 - 2b_n^2 + 5c_n^2 - 10d_n^2\right)$ est géométrique de raison –2 mais la simplicité du résultat est liée au fait que $\theta = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2 + \sqrt{10}\right)$, ce qui a pour conséquence que $a_nc_n = 2b_nd_n$, pour tout n.

3. Signalons, pour prolonger 2., deux autres expressions de la norme comme différence de deux carrés :

$$\mathrm{N}\left(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{5} + d\sqrt{10}\right) = \left(a^2 - 2b^2 - 5c^2 + 10d^2\right)^2 - 40\left(ad - bc\right)^2$$

et

$$\mathrm{N}\left(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{5}+d\sqrt{10}\right)=\left(-a^2-2b^2+5c^2-10d^2\right)^2-8\left(ab-5cd\right)^2$$

qui permettent de donner des exemples simples dans la ligne de notre propos (θ pour lequel $ad = bc$ ou $ab = 5cd$) et qui correspondent au fait que le nombre θ alors considéré, s'écrit en produit de deux nombres ; dans le premier cas l'un des nombres est dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$, l'autre dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et dans le deuxième cas, l'un est dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ et l'autre dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{10}\right)$. En bref dans 2. comme dans 3., θ est un produit de deux nombres, chacun étant dans l'une des extensions de degré 2 parmi $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{10}\right)$.

Enfin, comme on l'a dit à plusieurs reprises, ce résultat s'adapte avec des différences ou des exposants négatifs.

5. Conclusion

Ah ! Que les mathématiques sont passionnantes : on croit avoir rencontré un petit exercice insignifiant d'un petit livre de Seconde et voilà qu'au coin du bois en cherchant des racines, on trouve la trace du grand Évariste !

Bibliographie

Duverney D., *Théorie des nombres*, Dunod, Paris, 1998.

Et merci à l'ultime relecteur pour ses judicieux conseils.