Éruption de problèmes

Claude Gachet

Trois situations « courantes » pour lesquelles nous avons envisagé des modèles accessibles aux élèves :
* La réfraction de la lumière vue comme une course entre deux rayons.
* Les marées : comment connaître la hauteur d'eau à une heure donnée ?
* Répartition des barrettes sur le manche d'une guitare : présentée comme recherche d'une unité commune.

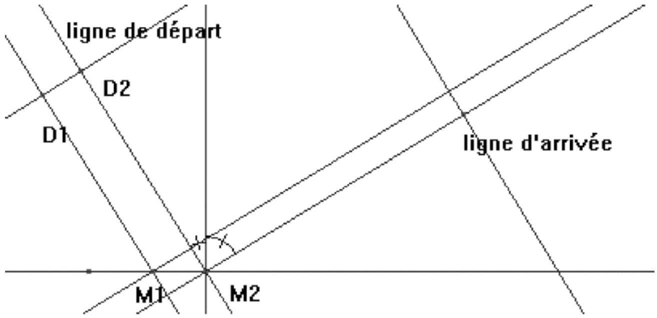
Le but de cet atelier était de présenter des situations, à partir de véritable questions pouvant servir à rendre opérationnelles des connaissances mathématiques acquises, voire éventuellement à introduire ces connaissances. Dans chaque exemple le minimum de renseignements est donné ; en souhaitant que chacun en prenant connaissance de la situation exprime le besoin de tel ou tel renseignement ; charge au responsable de fournir ces renseignements s'ils apparaissent nécessaires après discussion.

La première situation présentait une course entre deux concurrents suivant deux trajets parallèles jusqu'à une ligne puis repartaient en suivant à nouveau des trajets parallèles. La question était de savoir si les trajets étaient équitables.

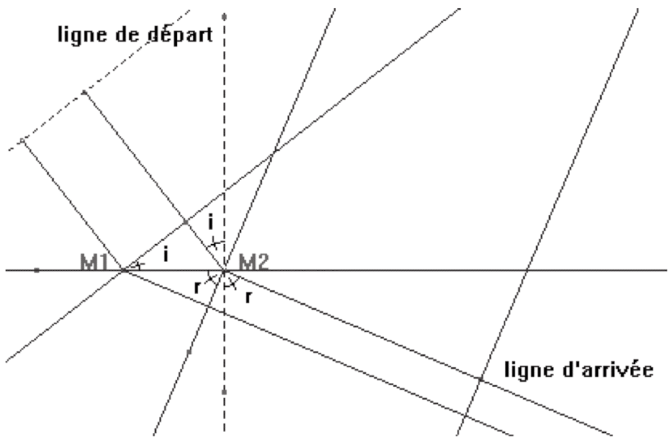
Il s'avère que les trajets suivis sont de même longueur si et seulement si « l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion » .

---

(1) L'Homme de Vitruve est le nom donné au croquis Étude de proportions du corps humain selon Vitruve (Marcus Vitruvius Pollo, Architecte romain du I^{er} siècle avant notre ère, est l'auteur du célèbre traité « De architectura »).
(2) Voir l'article de F. Buekenhout paru en 2005 dans la revue Math-Jeunes n° 111 p. 15 à 17.



Le deuxième aspect partait de la même idée mais cette fois les concurrents couraient dans le sable jusqu'à la ligne qu'ils franchissaient avant de courir dans l'herbe (donc avec des vitesses différentes).



Là encore nous retrouvons l'égalité des trajets, égalité en temps cette fois, si et seulement si $\dfrac{\sin(i)}{v_1} = \dfrac{\sin(r)}{v_2}$.

Ces lois de la réflexion et de la réfraction sont au programme de physique de seconde.

N'entrent en jeu dans cette étude que des notions de géométrie vues en Troisième.

Pour aller plus loin dans ce domaine vous pouvez visiter le site Académie de Grenoble Planète Maths.

La **deuxième situation** demandait s'il était possible de rentrer dans le port de La Rochelle en cet après-midi du 26 octobre aux environs de 16 heures dans une embarcation nécessitant 4 mètres de hauteur d'eau.

Les participants ont demandé les données utiles : heures et amplitudes des marées de ce jour.

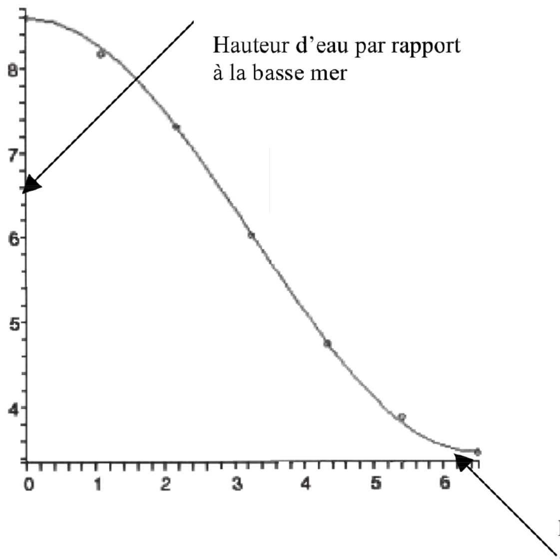
L'idée était de tester plusieurs propositions de modèles pouvant venir naturellement ;

par exemple un modèle affine par morceaux, un modèle sinusoïdal, un modèle en créneau, …

Bien sûr le temps ne nous a pas permis de tous les étudier ; par contre, en classe il serait utile de le faire faire aux élèves. Nous avons pris plus de temps pour mettre en place le modèle sinusoïdal ; la recherche des paramètres, amplitude, phase, et pulsation, est intéressante à faire en classe.

Enfin nous avons comparé ce modèle avec ce que donne la « règle des douzièmes » très utilisée en navigation. Cette règle dit que pendant la première heure la mer monte de 1/12 de son amplitude totale, pendant la deuxième heure elle monte de 2/12, pendant la troisième heure elle monte de 3/12, puis à nouveau 3/12, puis 2/12, puis 1/12 (la marée durant environ 6 heures on arrive ainsi à la pleine mer). Durant la descente on se retrouve avec la même répartition.

Placer ces « points » sur la même représentation graphique que ceux que donnaient les autres modèles (à l'aide d'une calculatrice graphique) est instructif :



Les points marqués sur le graphique sont ceux donnés par la règle des douzièmes.

Nous voyons que le résultat est très proche de ce que donne le modèle sinusoïdal.

La **troisième situation** partait de l'observation de ce qui se passe lorsqu'une corde de guitare entre en vibration.

On a constaté en déplaçant un doigt juste posé sur la corde (sans pression afin que la corde ne touche pas les barrettes-frettes) qu'il y avait deux positions, l'une située au tiers de la longueur, l'autre située à la moitié, pour lesquelles la corde conservait un son qui n'était pas un bruit désagréable. D'où la mise en évidence de deux écarts naturels dus à la présence d'harmoniques). Le premier est celui que l'on a dans la chanson « là-haut sur la montagne » entre le « là » et le « haut » ; il est caractérisé par le rapport 1/2. Le second est celui que nous avons dans « frère jacques » entre le « frè » et le « vous » de dormez-vous . il est caractérisé par le rapport 2/3 (la longueur de corde restante est égale à 2/3 de la longueur de corde initiale.

Une autre constatation : un écart entre deux notes (jouées sur une même corde) est quantifié par le rapport des longueurs de la corde qui entre en vibration. Cette notion d'écart peut être « contrôlée » à l'aide d'une chanson chantée à différentes hauteurs. Deux écarts « mis bout à bout » en donnent un troisième qui sera caractérisé par le rapport $\frac{L_3}{L_1} = \frac{L_3}{L_2} \times \frac{L_2}{L_1}$. Donc ajouter deux écarts se traduit par faire le produit des rapports associés (on peut aussi se reporter à la loi de Weber-Fechner).

La question posée est alors de trouver un « écart standard », qui puisse servir d'« écart unité » ; c'est à-dire-un écart qui « mis bout à bout » avec lui-même plusieurs fois puisse donner les deux écarts découverts plus haut.

Nous pouvons traduire cela par la recherche d'un rapport q et de deux exposants n et m tels que q^n soit égal à 2/3 et q^m soit égal à 1/2.

Ce problème a-t-il une solution ? Une petite étude arithmétique nous dit que non. Reste à voir si nous pouvons trouver une solution approchée. Le tableau ci-dessous nous éclaire :

		8/9	1/2
2	racine carrée	0,81649658	0,70710678
3	racine troisième	0,87358046	0,79370053
4	racine quatrième	0,903602	0,84089642
5	racine cinquième	0,92210791	0,87055056
6	racine sixième	0,93465527	0,89089872
7	,,,	0,94372206	0,90572366
8	,,,	0,95057982	0,91700404
9	,,,	0,95594808	0,92587471
10	,,,	0,9602645	0,93303299
11	,,,	0,96381061	0,93893091
12	,,,	0,96677571	0,94387431
13	,,,	0,96929175	0,94807751
14	,,,	0,97145358	0,95169515

Les deux cases grisées donnent des valeurs assez proches. Donc si nous prenons $q = 0{,}9438$ nous aurons à l'enchaîner 7 fois pour retrouver l'écart correspondant à 2/3, et 12 fois pour retrouver celui correspondant à 1/2.

Autre approche : on a $q^n = 2/3$ et $q^m = 1/2$ donc $q^{2n-m} = 8/9$; on s'aperçoit vite que 8/9 ne peut pas servir d'écart unitaire, mais que sa racine carrée convient approximativement.

puissance	8/9	racine carée de 8/9
2	0,7901235	0,8888889
3	0,7023320	0,8380525
4	0,6242951	0,7901235
5	0,5549290	0,7449355
6	0,4932702	0,7023320
7	0,4384624	0,6621649
8	0,3897443	0,6242951
9	0,3464394	0,5885910
10	0,3079461	0,5549290
11	0,2737299	0,5231920
12	0,2433155	0,4932702
13	0,2162804	0,4650596
14	0,1922493	0,4384624

Nous voyons dans la seconde colonne que 0,5 est bien approximativement une puissance de 8/9 ; mais pas 2/3.

Par contre dans la troisième colonne nous trouvons approximativement 1/2 et 2/3.

Donc $\sqrt{8/9}$ convient approximativement comme écart unité.

Il admet 0,943 comme valeur approchée

Il faut 7 écarts-unité pour obtenir le premier écart naturel, et 12 écarts-unité pour obtenir le second écart naturel. C'est effectivement le nombre de barrettes que nous comptons sur le manche de la guitare ; l'écart unité trouvé est le demi-ton.

Ces considérations peuvent paraître hermétiques mais si on prend le temps de travailler sur les enchaînements d'écarts on constate vite qu'ils se traduisent par des produits de rapports. D'autre part les logarithmes peuvent beaucoup simplifier les choses puisqu'ils transforment ces produit en sommes ; alors la recherche d'une « unité » devient représentable sur une droite.

Je tiens à remercier chaleureusement tous les participants à cet atelier pour leur spontanéité et leur indulgence.