

## Variations sur un problème de géométrie élémentaire

Jean-Pierre Friedelmeyer<sup>(\*)</sup>

L'enseignement de la géométrie au collège nous met fréquemment devant une situation paradoxale : elle permet l'énoncé de problèmes élémentaires, facilement compréhensibles par les élèves, mais dont la solution, bien que n'utilisant que des outils de leur niveau, se révèle très difficile à trouver. Encore récemment, les lecteurs du numéro 472 du Bulletin Vert ont pu en faire l'expérience dans la rubrique « Exercices de ci de là ». L'exercice n° 469-2 donne deux solutions d'un problème ancien (nous l'appellerons problème de référence dans la suite), qu'on trouve déjà dans le livre de Coxeter : *Redécouvrons la géométrie*<sup>(1)</sup> : une solution de Jean Lefort et une autre de Bruno Alaplantive.

Le problème de référence est le suivant :

Soit ABC un triangle isocèle d'angle au sommet  $20^\circ$ . On trace (BE) et (CD) faisant des angles de  $60^\circ$  et  $50^\circ$  respectivement avec la base (BC). Calculer les angles  $\widehat{CDE}$

et  $\widehat{DEB}$ . (fig.1)

Dans leur solution, les deux collègues insistent sur le fait de n'utiliser que des outils du collège. La solution de Jean est astucieuse, mais pose la question qu'il soulève lui-même « de savoir comment on peut imaginer une telle solution qui ne demande que des connaissances de collège ». Celle de Bruno « n'utilise que des outils de troisième » mais suppose tout de même aussi pas mal d'initiative et d'inventivité de la part d'un élève de collège, fût-il en troisième !

Je me suis alors souvenu d'un article du *Mathematical Intelligencer*<sup>(2)</sup> étudiant la configuration du problème de référence mais avec des angles différents, pour savoir s'il existe dans chaque cas également une solution élémentaire.

Son auteur, Machado, fait une investigation systématique de telles configurations au moyen d'un logiciel, et donne ainsi trente six problèmes différents, correspondant à autant de valeurs différentes des angles du triangle isocèle ABC et des angles  $\widehat{CDE}$  et  $\widehat{DEB}$ .

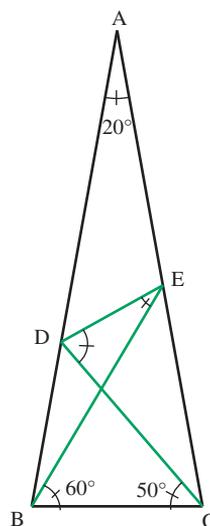


Figure 1

(\*) jean-pierre.friedelmeyer@orange.fr

(1) H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer, *Redécouvrons la géométrie*, Éditions Dunod, Paris, 1971, p. 29

(2) A. Machado, *Nineteen Problems on Elementary Geometry*, Mathematical Intelligencer Vol. 17, n° 1, 1995.

Mais il ne donne aucune solution, se contentant d'affirmer que de telles solutions existent et que certaines d'entre elles ont été trouvées par une de ses collègues.

Dans l'article qui suit, je vous propose de mettre en place certaines variantes du problème de référence et certaines méthodes susceptibles de les résoudre. Les premiers exemples pourront donner lieu à des exercices vraiment simples et accessibles à des élèves lambda du collège. Puis, progressivement, nous tomberons sur des situations plus difficiles à résoudre, jusqu'à arriver à des exemples que je ne sais personnellement pas résoudre et que je soumetts aux lecteurs du BV.

Le professeur, lui, se dira spontanément : « Pourquoi ne pas résoudre d'emblée le problème dans sa généralité ? ». Pourquoi pas, effectivement ?

### Le problème général

Le problème le plus général qui puisse se poser sur cette configuration s'énonce ainsi.

Soit un triangle  $ABC$  isocèle en  $A$ , avec  $\widehat{A} = \alpha$ . On trace  $(CD)$  et  $(BE)$  avec  $D$  sur  $[AB]$  et  $E$  sur  $[AC]$  tels que  $\widehat{EBC} = \beta$  et  $\widehat{DEB} = \gamma$  (à une symétrie près on peut supposer  $\gamma < \beta$ ). Calculer les angles  $\widehat{CDE} = \delta$  et  $\widehat{DEB} = \varepsilon$  (fig.2). Nous désignerons dans la suite par  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  une telle configuration, où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont donnés et  $\delta, \varepsilon$  sont à déterminer.

J'ai essayé de traiter ce problème dans le cas général par la trigonométrie. Cela ne me paraît pas simple du tout. On a bien

$$\beta + \gamma = \delta + \varepsilon$$

comme première relation, mais la recherche d'une seconde relation m'a conduit à l'égalité

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \times \frac{\cos 2\beta + \cos \alpha}{\cos 2\gamma + \cos \alpha}$$

qui n'est guère facile à exploiter.

Partons donc de configurations particulières, et pour commencer, par l'une des plus anciennes, celle du triangle d'or correspondant à  $\alpha = 36^\circ$ ,  $\beta = 54^\circ$ ,  $\gamma = 36^\circ$ .

### Un premier exemple : le triangle d'or

Il s'agit du triangle à la base de la construction du pentagone régulier par Euclide<sup>(3)</sup>.

On a  $\widehat{A} = 36^\circ$  ;  $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^\circ$ .

L'utilisation de la somme des angles d'un triangle conduit directement au fait que les triangles  $ADC$  et  $DCB$  sont tous deux isocèles, ainsi que les triangles  $BCE$  et  $CDE$ .

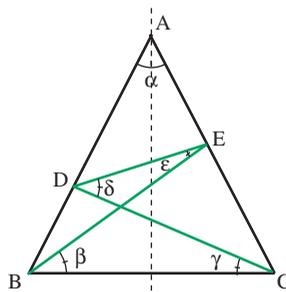


Figure 2

(3) Voir par exemple J.-P. Friedelmeyer, *Euclide peut-il apprendre quelque chose aux professeurs de mathématiques d'aujourd'hui ?* Repères-IREM n° 53, octobre 2003, p. 23 à 42.

Par ailleurs (CD) est perpendiculaire à (BE), et bissectrice de l'angle  $\widehat{C}$ . Cela nous donne très rapidement  $\varepsilon = \widehat{DEB} = 18^\circ$  et  $\delta = \widehat{EDC} = 72^\circ$  (fig. 3).

La configuration est donc caractérisée par le quintuple  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (36^\circ, 54^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 18^\circ)$ .

Cette configuration nous conduit alors à deux types de généralisation :

- 1) choisir les angles de telle façon que les triangles BCD et BCE soient tous deux isocèles.
- 2) prendre (CD) et (BE) perpendiculaires, avec (CD) bissectrice de l'angle  $\widehat{C}$ .

### Généralisation 1

Le triangle isocèle ABC d'angle au sommet  $\alpha$  aura pour angles à la base  $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Si le triangle BCD est isocèle

en C, l'angle  $\widehat{BDC} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  et l'angle  $\widehat{DCB} = \gamma = \alpha$ .

Le triangle BCE étant aussi supposé isocèle en C, les angles à la base valent  $45^\circ + \frac{\alpha}{4}$  chacun. On en déduit

directement :  $\delta = 45^\circ + \frac{3\alpha}{4}$  et  $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ . Remarquons que

le triangle DCE est également isocèle. Cette situation est illustrée ci-contre (fig. 4) avec  $\alpha = 40^\circ$  ce qui donne le quintuple

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (40^\circ, 55^\circ, 40^\circ, 75^\circ, 20^\circ).$$

### Généralisation 2

Le triangle BCE est isocèle en C et (CD) est perpendiculaire à (BE), donc bissectrice de l'angle  $\widehat{C}$ .

Alors  $\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}$  ;  $\gamma = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}$  ;  $\delta = 45^\circ + \frac{3\alpha}{4}$  ;

$$\varepsilon = 45^\circ - \frac{3\alpha}{4}.$$

Exemple (fig. 5), avec  $\alpha = 40^\circ$  et

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (40^\circ, 55^\circ, 35^\circ, 75^\circ, 15^\circ).$$

Il faut signaler que ces deux types de configurations

nécessitent  $45^\circ + \frac{\alpha}{4} < 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  donc  $\alpha < 60^\circ$ .

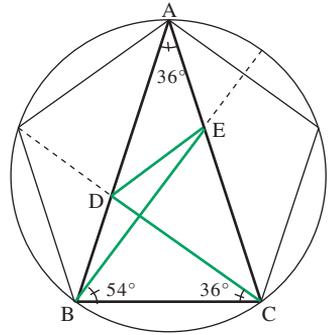


Figure 3

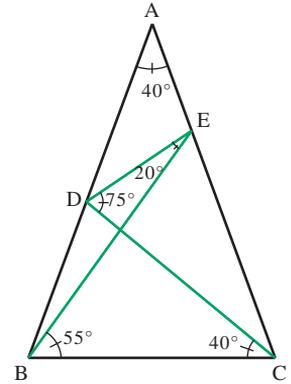


Figure 4

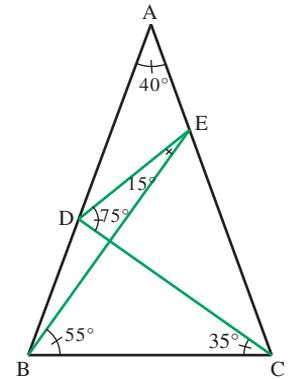


Figure 5

Elles semblent aussi avoir quelque chose de commun : nous en parlerons plus loin.

Malheureusement le problème de référence ne s'inscrit dans aucune de ces deux généralisations et il faut donc trouver une autre démarche qui nous permette de calculer les angles  $\delta$  et  $\varepsilon$ . Examinons la solution de Bruno Alaplantive dans le n° 472 du BV, page 777. Elle est basée sur l'utilisation du point F, intersection du cercle de centre B et de rayon [BC] avec (CA) (fig. 6). Bruno met ainsi en évidence un triangle équilatéral BFD, puis le caractère isocèle du triangle DFE qui lui donnent la clef de

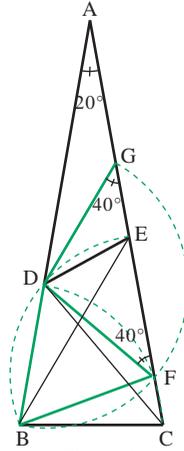


Figure 6

la solution et en particulier la valeur de l'angle  $\widehat{DEB} = \varepsilon = 30^\circ$ . De fait, si l'on reporte à nouveau la longueur  $DF = FD = BC$  en  $DG$ , le triangle  $FDG$  est isocèle en D, de sorte que l'on en déduit la valeur de l'angle  $\widehat{ADG} = 20^\circ$ . Donc le triangle  $AGD$  est également isocèle, en G, et l'on a ainsi mis en évidence ce que Henri Bareil<sup>(4)</sup> appelle un iso-zigzag  $AGDFBC$ , qui donne la raison profonde de l'efficacité de cette solution.

Rappelons la définition des iso-zigzags donnée par Henri : « j'appellerai **iso-zigzag** associé à un triangle isocèle le zigzag défini par une suite de maillons égaux entre eux (base comprise) », c'est-à-dire une suite de  $n$  segments égaux définis par des points  $A_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) pris alternativement sur les deux côtés égaux d'un triangle isocèle de sommet  $A = A_0$  et tels que  $A_{n-1}A_n$  coïncide la base [BC] du triangle isocèle (fig. 7).

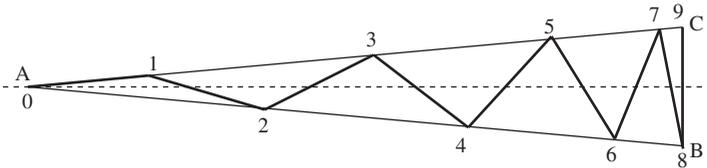


Figure 7

Pour qu'un tel iso-zigzag existe, il faut et il suffit que l'angle au sommet A soit égal

à  $\frac{180^\circ}{2n-1}$ . En effet, un calcul simple nous montre que les triangles isocèles successifs

(012 ; 123 ; 234 ; etc.) ont pour angles à la base  $\alpha$ ,  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ , etc, si  $\alpha$  est l'angle au sommet  $A_0$ . Le dernier triangle  $A_{n-2}A_{n-1}A_n$  a pour angle à la base  $(n-1)\alpha$  qui doit

aussi être l'angle à la base du triangle ABC, soit  $\frac{180^\circ - \alpha}{2} = (n-1)\alpha$  ; d'où la valeur

annoncée de  $\frac{180^\circ}{2n-1}$  pour l'angle au sommet  $A_0$ . Pour vérification, si celui-ci vaut

$20^\circ$ , on trouve un iso-zigzag de cinq branches.

(4) Henri Bareil, *Des zigzags, des pavages et des constructions*, BV n° 473, nov. - déc. 2007.

En choisissant un couple de points (D, E) avec D et E deux sommets du zigzag, l'un sur [AB] l'autre sur [AC], nous obtenons deux autres configurations pour lesquelles nous pouvons déterminer les angles  $\delta$  et  $\varepsilon$  (dans le premier cas nous avons pris le zigzag symétrique par rapport à la médiatrice de [BC], afin de préserver la condition  $\delta < \varepsilon$ ). On a ainsi les configurations :

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (20^\circ, 50^\circ, 20^\circ, 60^\circ, 10^\circ)$   
pour la figure 8 et

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (20^\circ, 70^\circ, 50^\circ, 110^\circ, 10^\circ)$   
pour la figure 9.

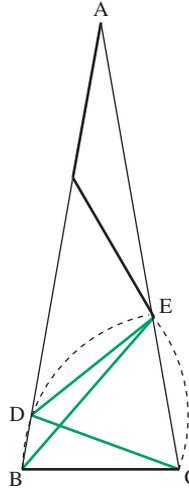


Figure 8

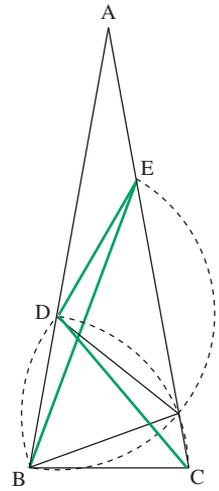


Figure 9

Or dans l'article de Machado il y a huit configurations distinctes qui sont proposées à démonstration, pour un angle au sommet A de  $20^\circ$ . Les voici :

Les n°s 1 et 7 correspondent respectivement aux figures 8 et 9, le n° 4 au problème de référence. Il nous reste à étudier les n°s 2, 3, 5, 6 et 8. En fait un examen plus approfondi montre que les huit configurations vont par paires :

N°	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
1	$20^\circ$	$50^\circ$	$20^\circ$	$60^\circ$	$10^\circ$
2	$20^\circ$	$50^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$
3	$20^\circ$	$60^\circ$	$30^\circ$	$80^\circ$	$10^\circ$
4	$20^\circ$	$60^\circ$	$50^\circ$	$80^\circ$	$30^\circ$
5	$20^\circ$	$65^\circ$	$25^\circ$	$85^\circ$	$5^\circ$
6	$20^\circ$	$65^\circ$	$60^\circ$	$85^\circ$	$40^\circ$
7	$20^\circ$	$70^\circ$	$50^\circ$	$110^\circ$	$10^\circ$
8	$20^\circ$	$70^\circ$	$60^\circ$	$110^\circ$	$20^\circ$

{1 ; 2} ; {3 ; 4} ; {5 ; 6} ; {7 ; 8}, avec mêmes valeurs de  $\alpha, \beta, \delta$ .

La première paire coïncide avec les deux généralisations du triangle d'or, pour  $\alpha = 20^\circ$  ; en effet pour le n° 1, les deux triangles BCD et BCE sont isocèles (fig. 8) et pour le n° 2, le triangle BCE est isocèle et (CD') est bissectrice de l'angle C, en désignant par D' la position de D dans ce cas là. Sur la figure 10 nous avons superposé les deux configurations de la paire {1 ; 2} de façon à découvrir ce qu'elles peuvent avoir de comparable et comment on passe de  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (20^\circ, 50^\circ, 20^\circ, 60^\circ, 10^\circ)$  à  $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = (20^\circ, 50^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 20^\circ)$ .

Désignons par D'' et E' les symétriques de D' et E par rapport à la médiatrice de [BC]. La figure 10 nous fait conjecturer que (BD'') est parallèle à (DE) et D'E' parallèle à (CD). Sous cette hypothèse, on a  $\varepsilon' = \widehat{D'EB} = \widehat{E'EB} - \widehat{E'ED'} = \beta - \gamma$  ; puis, à cause de  $\delta' + \varepsilon' = \beta' + \gamma'$ ,  $\beta' = \beta$  et  $\delta' = \delta$ , on en déduit  $\gamma' = \beta - \varepsilon$ .

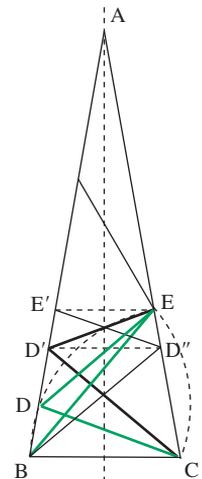


Figure 10

Ces relations se vérifient sans peine pour les deux autres paires {3 ; 4} et {7 ; 8} et, de plus, elles sont symétriques, c'est-à-dire que  $\varepsilon = \beta' - \gamma'$  et  $\gamma = \beta' - \varepsilon'$ .

Ainsi pouvons nous conjecturer l'existence d'une sorte de dualité des configurations  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ , qui associe à chacune la configuration

$$(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = (\alpha, \beta, \beta - \varepsilon, \delta, \beta - \gamma).$$

Un autre exemple de cette relation nous est donné par les généralisations 1 et 2 et les figures 4 et 5. Démonstrons-la dans le cas général.

**Dualité**

Pour une configuration donnée ABCDE, caractérisée par les valeurs d'angles  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ , traçons (BD'') parallèle à (DE) et (D'E') parallèle à (CD), avec D'' sur [AC] et E' sur [AB] ; puis construisons les symétriques D' et E'' respectivement de D'' et E' par rapport à la médiatrice (AH) de [BC]. Alors :

- 1) E'' est confondu avec E.
- 2) ABCD'E est une autre configuration associant au quintuple  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  le quintuple

$$(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = (\alpha, \beta, \beta - \varepsilon, \delta, \beta - \gamma)$$

(fig. 11).

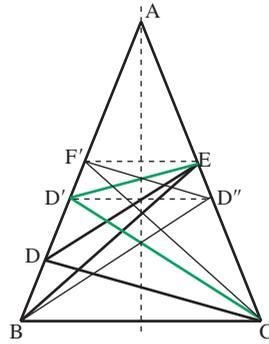


Figure 11

Démonstration de 1) : E'' est confondu avec E

Cette propriété découle d'une application particulière du théorème de Pappus, mais on peut s'en passer, et faire une démonstration directe du cas particulier suivant :

*Théorème : Soient trois points A, C, E situés sur une droite, et trois autres points B, D, F situés sur une autre droite : si les droites (CD) et (EF) d'une part, (AF) et (CB) d'autre part sont respectivement parallèles, alors les droites (AD) et (EB) sont aussi parallèles.*

Pour le démontrer, il suffit d'appliquer Thalès aux différents systèmes de triangles et de parallèles constituant cette figure (fig. 12) :

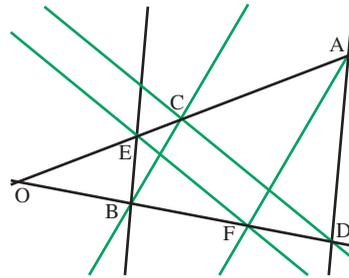


Figure 12

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OF}} \times \frac{\overline{OF}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}.$$

Démonstration de 2) :  $(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = (\alpha, \beta, \beta - \varepsilon, \delta, \beta - \gamma)$ .

Elle est immédiate (cf. figure 10), en utilisant les angles alternes internes et la symétrie par rapport à (AH) ; et l'on vérifie aussi facilement que la configuration duale de la duale nous fait retomber sur la configuration initiale.

Cette dualité peut alors être très utile pour de nouvelles configurations qui, sans elle, pourraient être difficiles à traiter. Il en est ainsi de la situation duale du problème de référence, dans lequel on a, rappelons le :  $\alpha = 20^\circ$  ;  $\beta = 60^\circ$  ;  $\gamma = 50^\circ$ , qui nous a conduit aux valeurs  $\delta = 80^\circ$  et  $\varepsilon = 30^\circ$ . On en déduit aussitôt la configuration :

$\alpha' = 20^\circ$  ;  $\beta' = 60^\circ$  ;  $\gamma' = 30^\circ$  qui conduit à  $\delta' = 80^\circ$  et  $\varepsilon' = 10^\circ$ , soit le n° 3 de la

liste de Machado. Il nous reste tout de même dans cette liste encore la paire {5 ; 6} pour laquelle nous n'avons pas trouvé de solution.

En rassemblant l'ensemble des résultats et méthodes traitées ci-dessus, on peut inventer des configurations variées. En voici deux, données sans autres explications

que les figures 13, 14 et 15, à partir de l'iso-zigzag engendré par l'angle  $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$ .

D'autres iso-zigzags donneraient des configurations du même genre.

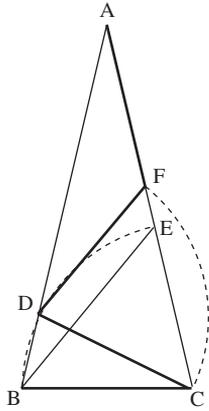


Figure 13

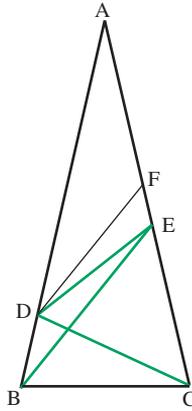


Figure 14

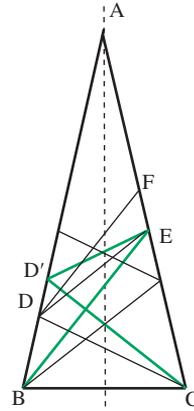


Figure 15

La figure 13 montre le zigzag relatif à  $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$ , la figure 14 donne la configuration

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \left( \frac{180^\circ}{7}, \frac{360^\circ}{7}, \frac{180^\circ}{7}, \frac{450^\circ}{7}, \frac{90^\circ}{7} \right)$  et la figure 15 la configuration duale

$(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = \left( \frac{180^\circ}{7}, \frac{360^\circ}{7}, \frac{270^\circ}{7}, \frac{450^\circ}{7}, \frac{180^\circ}{7} \right)$ .

Dans l'article de Machado, ce dernier exemple n'est pas donné. Par contre, il donne en dehors du cas  $\alpha = 20^\circ$  toute une série d'autres situations (au nombre de 36 au total, en comptant les situations duales), et qu'il affirme pouvoir être résolues de façon élémentaire mais sans donner aucune solution. En voici encore quelques exemples.

$\alpha$	12	12	12	12	45	72	72	72	120
$\beta$	42	48	66	72	45	42	48	51	24
$\gamma$	18	12	42	66	37,5	30	42	39	12
$\delta$	48	54	96	108	52,5	54	66	81	30
$\varepsilon$	12	6	12	30	30	18	24	12	6

**Configuration (12, 48, 42, 54, 36)**

Prenons plutôt la situation duale (12, 48, 12, 54, 6), à cause de l'angle  $\gamma = 12^\circ = \alpha$ . On est alors directement dans la généralisation 1, avec les triangles BCD et BCE isocèles. Nous avons donc :

$$\delta = 45^\circ + \frac{3\alpha}{4} = 54^\circ \text{ et } \varepsilon = \frac{\alpha}{2} = 6^\circ \text{ (fig. 16).}$$

**Configuration (45 ; 45 ; 37,5 ; 52, 5 ; 30)**

Le triangle ABC correspond à trois sommets d'un octogone (fig. 14). Longtemps je n'ai pas trouvé de solution, jusqu'à ce que j'abandonne un travail sur les angles pour m'orienter vers un travail sur les rapports. Les angles à la base du triangle ABC mesurent chacun  $67,5^\circ$ . Pour construire l'angle de  $37,5^\circ$  coupons le cercle circonscrit au triangle ABC, (et à l'octogone correspondant) de centre U par le cercle de centre A passant par B. Si O est l'un des points d'intersection, l'angle  $\widehat{BCO}$  mesure  $67,5^\circ - 30^\circ = 37,5^\circ$  (fig. 17).

Ensuite, soit G le symétrique de E par rapport à (AB). G est sur le cercle (U), à cause de l'angle  $\widehat{GBE}$  qui mesure  $45^\circ$ , et  $BG = BE = BC$ , dont on déduit  $EC = EG$  ; de sorte que

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EA}{EG} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par ailleurs dans le triangle ADC, de hauteur DH, on a :

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DA}{DH} \times \frac{DH}{DC} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{EA}{EC}.$$

Par conséquent (DE) est bissectrice intérieure du triangle ADC, dont l'angle  $\widehat{ADC}$  mesure  $105^\circ$ , et dont la moitié nous donne l'angle  $\widehat{CDE}$ , lequel mesure donc  $\delta = 52,5^\circ$ . Il reste  $30^\circ$  pour l'angle  $\widehat{DEB} = \varepsilon$ .

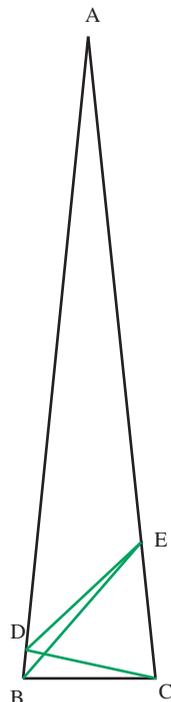


Figure 16

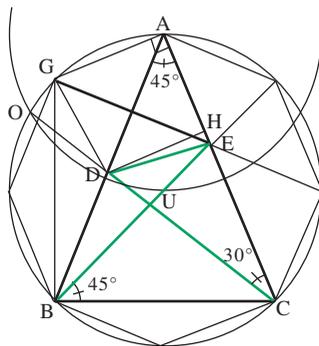


Figure 17

L'article ci-dessous a paru dans le N° 191 (mars 2008) de la revue Sciences Humaines qui nous a aimablement autorisé à le reproduire avec l'accord de son auteur.

Il nous interpelle quant à son contenu. Il nous interpelle aussi parce que la revue Sciences Humaines est une revue largement diffusée, y compris au plan international, auprès d'un public très différent de celui de notre bulletin.