Les interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire :

cas des équations différentielles en terminale S

Fernand Malonga Moungabio(*)

1. Introduction

Le programme actuel de mathématiques de la classe de terminale du lycée (2002) préconise un enseignement coordonné des équations différentielles entre les mathématiques et la physique. Il incite les professeurs des deux disciplines à mener un travail conjoint autour de ce thème qui prend alors une place de premier plan, tant du point de vue de la part qui y est consacrée en physique que du point de vue de l'approche mathématique de la fonction exponentielle. C'est le statut d'outil qui est mis au premier plan.
Par ailleurs, à la lumière du contenu des anciens programmes de mathématiques, les équations différentielles sont traitées comme objet mathématique, leur caractère outil apparaît ensuite dans la partie application.
Il en résulte un changement d'optique dans le traitement des équations différentielles. De plus, la méthode d'Euler introduite dans les nouveaux programmes des deux disciplines prend appui sur les TICE (tableur/grapheur) pour contribuer normalement à la synergie mathématiques-physique.
Cette nouvelle optique nécessite un dialogue entre les spécialistes des deux disciplines pour faire vivre cette pratique interdisciplinaire dans ce cas précis. Or il se trouve que, dans la réalité des classes, ce dialogue existe peu ou pas du tout, en raison de certaines contraintes institutionnelles.
Une telle intention didactique préconisant une synergie entre deux disciplines scientifiques doit se concrétiser dans la pratique et en premier lieu au niveau des manuels scolaires, éléments du curriculum réel (Perrenoud 1993). Un certain nombre de questions se posent alors quant à cette continuité didactique : quelle évocation de l'autre discipline, quelle part de la modélisation et du traitement des modèles est dévolue à chaque discipline, quelle coordination des méthodes, des notations, du vocabulaire, et, *in fine*, quels types de tâches données aux élèves et quelles compétences attendues/évaluées.

Nous nous proposons de montrer ici, à partir d'une analyse de manuels de mathématiques et de physique, que la continuité didactique que l'on est en droit d'attendre au regard des programmes et des intentions de ces programmes, se heurte à de nombreux obstacles.

(*) DIDIREM, Université Paris 7. malonga@math.jussieu.fr

2. Analyse de manuels de mathématiques

L'analyse que nous avons faite des manuels édités lors de la mise en place des programmes a porté sur différents points relatifs à la présence d'équations différentielles. Analyser la place accordée à l'objet « équation différentielle » dans le cadre de la modélisation des phénomènes physiques, c'est aussi relever les éléments de rationalité (explicites et implicites), qui permettent le passage de la réalité pseudo-concrète physique au(x) modèle(s) symbolique(s), de l'équation différentielle du physicien à l'équation différentielle du mathématicien et, le cas échéant, du traitement (mathématique) de l'équation différentielle au retour à la situation de départ (physique). Il s'agit donc d'une part de relever ce que nous appelons le *champ de départ* de la situation à traiter (cdd) qui est le champ de référence, et le *champ de traitement* de cette situation (cdt) et d'autre part, d'analyser les transitions cdd → cdt et cdt → cdd qui correspondent donc à des changements de cadre de rationalité/d'intelligibilité en examinant la nature des questions, les glissements sémantiques, les changements de statut, etc., à l'œuvre dans les transitions.
Examinons le cas de la situation suivante[1] (étude d'un circuit électrique)

101 Circuit électrique
Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \cdot 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \cdot 10^4$ ohms, d'un générateur g et d'un interrupteur.
On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V.
La tension U aux bornes du condensateur est alors solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (1) :

$$U(t) + RCU'(t) = V(t).$$

On suppose que $V(t) = 6\,e^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.
De plus la charge initiale du condensateur impose la condition :

$$(2) : \; U(0) = \frac{1}{3} V(0).$$

a. Démontrer que la fonction U définie sur $[0 ; +\infty[$ par $U(t) = (4t + 2)\,e^{-\frac{2}{3}t}$ vérifie la condition (2).
b. Montrer que la fonction U est solution de l'équation différentielle (1).
c. Étudier le sens de variation de U et calculer la limite de U en $+\infty$.
d. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 20[$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 1 seconde.
e. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts.
Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

(1) Nous ne présentons qu'une situation de modélisation ici. Pour en savoir plus par rapport à notre analyse des manuels, le lecteur pourra se reporter à Malonga (2008a, b).

Passage champ de départ – champ de traitement :

Cet exercice a comme champ de départ l'électricité, et plus précisément le circuit RC. On peut remarquer que le texte fournit déjà l'équation différentielle qui régit le phénomène. On peut donc considérer que la situation est modélisée dès le départ.

Le texte présente quelques abus de notation et de formulation que nous avons signalés ci-après.

- La phrase d'introduction « …le générateur délivre alors une tension V » n'y prépare pas car on ne dit pas que V n'est pas une constante (contrairement à C et R). Un élève qui sait ce qu'est un générateur de tension pensera que V est constante et risquera de ne pas comprendre ensuite la fonction exponentielle donnée pour V(t).
- Il est particulièrement étonnant de voir un générateur délivrer une tension en exponentielle décroissante. Une telle situation ne se rencontre jamais car cela suppose que ce générateur est soit défectueux, soit cesse de fonctionner dès qu'on ferme le circuit.
- Au niveau du vocabulaire, il ne convient de pas de dire que le générateur « délivre une tension » (il impose une tension et délivre un courant). Dans le même esprit, la phrase « la charge initiale du condensateur impose la condition … » est certes mathématiquement correcte. Mais, outre le fait que l'on ne comprend pas pourquoi le condensateur (qui est un récepteur) imposerait sa tension initiale au générateur, la condition est donnée sous forme purement mathématique (et non pas une par une spécificité physique).

S'agissant du passage du champ de départ au champ de traitement, nous constatons que l'équation différentielle proposée (second membre non constant) n'est pas au programme de mathématiques de la classe. L'exercice doit donc contenir, comme on le constate effectivement ensuite, un élément ou une étape supplémentaire qui en permette la résolution. De sorte que la première question demande simplement de « démontrer » (en fait, vérifier) la conformité de l'expression de U(t) à la relation U(0) = 1/3V(0). La démarche attendue consiste à calculer les valeurs numériques des fonctions U et V en 0 puis de comparer U(0) et V(0)/3. C'est une tâche mathématique – au demeurant triviale – qui est demandée.
De même, les questions b, c et d relèvent d'un traitement purement mathématique.
Comme on le voit, ce sont là des questions que l'on rencontre souvent – en fait, elles sont presque « rituelles » – dans l'étude d'une fonction.

Retour au champ de départ.

La dernière question[2], qui demande d'interpréter le résultat obtenu à la question précédente, propose un retour à la situation physique. Mais ce retour, ambigu du point de vue de la physique, est « symbolique » car on ne sait pas ce que peut être un

(2) Cette question est particulièrement intéressante dans la mise en œuvre de la relation mathématiques-physique. Elle demande une interprétation (physique) du résultat obtenu. Ce type de questions est souvent inexistant dans la plupart des situations de modélisation rencontrées dans les manuels de mathématiques.

appareil qui mesure U(t). D'ailleurs, U(t) au sens strict, est la valeur numérique de la fonction « tension » U. Cet appareil n'existe pas. Nous signalons au passage, l'ambiguïté sur le statut du symbole U ou V qui tantôt désigne une valeur numérique, tantôt une fonction (confusion assez courante entre fonction et image).
Par ailleurs, en considérant U(t) comme étant l'image de la fonction U en t, la représentation symbolique souhaitée ici pour cette équation différentielle est $U + RC\,U' = V$ en précisant que les tensions U et V sont fonction de temps. Ceci serait en accord avec les notations adoptées par l'auteur du manuel surtout qu'en classe, l'écriture « standard » d'une équation différentielle du premier ordre est $y' = ay + b$.

Synthèse

Du point de vue de la modélisation, les situations proposées dans les manuels de mathématiques sont déjà modélisées. En effet, dans la quasi-totalité des cas traités, aussi bien en activité introductive, en travaux dirigés qu'en exercices, la mise en équation différentielle est prise en charge par l'énoncé. L'équation différentielle qui régit le phénomène à étudier, est déjà donnée ; des indications pour le traitement de la tâche sont souvent données. L'étude dans le champ de traitement des équations différentielles relève généralement du seul cadre des mathématiques. Elle consiste à procéder par des manipulations (en générales des substitutions) pour retrouver l'équation différentielle (qui est à l'avance connue) ou alors à vérifier qu'une fonction proposée dans la situation est solution de l'équation différentielle donnée. Quant au traitement proprement dit de l'équation différentielle c'est-à-dire sa résolution, la tâche de l'élève se réduit à reconnaître le type d'équation et à appliquer la procédure (méthode) vue en cours. Il nous semble que le contexte choisi (sciences expérimentales) pour la mise en œuvre de la coordination mathématiques-physique, n'est pas assez exploité. Ce serait l'occasion de se servir des éléments de rationalité issue de l'enseignement de la physique pour développer un début d'apprentissage du processus de modélisation (nous y reviendrons après l'analyse des manuels de physique).
Ce constat montre que le jeu de cadre de rationalité attendu, dans le but d'une continuité didactique, est tronqué. En général, voici comment on peut schématiser le traitement des situations de modélisation conduisant à une équation différentielle :

$$\begin{tikzcd} \textbf{1) Champ de départ : } \textit{Physique} \arrow[d, dashed, "\textit{Transition PM}"] & \textbf{?} & \textbf{4) Retour champ de départ : } \textit{Physique} \\ \textbf{2) Champ de traitement : } \textit{Maths} \arrow[rr] & & \textbf{3) Champs de traitement : } \textit{Maths} \arrow[u, dashed, "\textit{Transition MP}"'] \end{tikzcd}$$

La transition physique-mathématique (PM) est assurée très souvent par l'énoncé. La tâche qui revient à l'élève est le traitement mathématique du problème (passage 2-3). De même, dans la plupart des situations analysées, il y a très peu de tâches relatives à la transition mathématique-physique (MP). De plus, même quand le retour au champ de départ (physique) est envisagé, la manière dont les questions sont formulées n'indique pas toujours de façon explicite le recours au passage 4-1 (physique-physique), c'est-à-dire d'apporter une réponse physique à la question posée dans ce cadre là.

La multiplicité des exercices « habillés » peut alors constituer un obstacle pour atteindre l'objectif de continuité didactique souhaité.

3. Analyse de manuels de physique

L' analyse des manuels porte sur différents points relatifs à la présence d'équations différentielles du premier ordre : la façon dont cet objet mathématique, entièrement nouveau, est introduit en physique, les liens établis avec le programme de mathématiques, le type de tâches et les savoir-faire correspondants, la gestion des passages physique-mathématiques et mathématiques-physique, etc.

À propos de l'introduction de l'objet « équation différentielle »

a) ***Les modalités d'introduction de ce nouveau concept***

Nous nous sommes donc intéressés d'abord à la façon dont cet « objet » très particulier est introduit, en particulier pour savoir s'il est introduit de façon progressive, comme les commentaires généraux des programmes le laissent penser, c'est-à-dire à partir du résultat imposé par les lois de la physique qui conduit à une « équation spéciale » ne donnant qu'une propriété liant la loi d'évolution et sa dérivée, la loi restant inconnue ! Le concept d'équation différentielle est ainsi introduit en physique et la dénomination fait référence aux mathématiques qui apportent alors leurs techniques de résolution.

Il ressort de notre analyse que le concept d'équation différentielle, lorsqu'il apparaît la première fois, ne fait manifestement pas l'objet d'une attention particulière, notamment quant à sa nature de relation fonctionnelle. Sinon, bien souvent l'expression « équation différentielle » est déjà dans le titre, et la première phrase est « *établissons l'équation différentielle…* », ce qui suppose implicitement que le concept a déjà été rencontré en mathématiques, et que *sa présence en physique a, elle aussi, déjà été montrée en mathématiques* !

b) La référence aux connaissances de mathématiques

Nous avons également cherché et relevé les mentions/renvois fait(e)s au programme ou au contenu de mathématiques à ce niveau. Ces renvois peuvent porter *a priori* sur le rappel de ce qu'est une équation différentielle, sur les notations utilisées en mathématiques, sur la solution donnée par les mathématiciens à ce type d'équation, et en particulier sur l'existence d'une nouvelle fonction : l'exponentielle.

On remarque l'absence d'évocation des mathématiques dans certains ouvrages ; sinon, les indications sont souvent sibyllines et, lorsqu'elles sont précisées, ne sont pas nécessairement conformes à ce qui est dit ou écrit en mathématiques.

L'absence de lien et d'explicitation, là encore, correspond à l'hypothèse implicite que « cela a été vu en mathématiques ». Mais, même si cela l'était, il y a lieu pourtant de travailler la continuité mathématiques-physique à ce niveau, puisque l'équation différentielle du « physicien » s'écrit systématiquement sous une forme du type : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + k \cdot u = \text{Cste}$, alors que l'écriture consacrée par l'usage en mathématiques est $y' = ay + b$. On notera le changement de notations, mais aussi le « changement de membre » du terme comportant la fonction, changement d'autant plus délicat, que le changement de signe du terme en « y » n'est pas anodin en physique : k est par nature toujours positif ! De plus, on impose aux élèves une prise de distance par rapport aux notations : la variable est nommée « t » et non « x », et l'expression générique de la solution est $u(t) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{at} + \mathrm{B}$ et non pas $y = \mathrm{C}\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.

Comme en mathématiques, le jeu des cadres de rationalité entre les mathématiques et la physique ne se fait pas sans difficultés dans les manuels de physique. On y relève aussi parfois une absence de tâche de transition physique-mathématiques ou mathématiques-physique. Ce qui laisse augurer l'existence de nombreux implicites, difficilement exploitables par l'enseignant et plus encore par les élèves (Malonga et al. 2008). On peut aussi signaler ce manque de cohérence entre les manuels de mathématiques et ceux de physique pour ce qui concerne le cas de la radioactivité : aucun exercice n'est proposé à leur sujet en physique alors que ce domaine a été précisément pris comme exemple par le groupe d'experts des programmes scolaires (GEPS).

4. Éléments de conclusion

L'analyse de l'articulation mathématiques-physique au niveau des manuels montre que la concrétisation de la continuité didactique, dans les manuels scolaires et les pratiques pédagogiques, n'est pas simple. Les deux disciplines s'ignorent complètement tant du point de vue de l'introduction du concept des équations différentielles que de la mise en œuvre de la méthode d'Euler. Il nous paraît alors nécessaire :

- d'instituer plus de « dialogue » entre spécialistes des deux disciplines,
- d'élaborer des exercices, qui explicitent la complémentarité des tâches et techniques dans des situations de modélisation,
- de travailler davantage la manière de présenter les équations différentielles : concept, notations et exploitation des registres sémiotiques (graphiques),
- de constituer des documents didactiques à l'attention des enseignants (sur un site internet par exemple),
- de diminuer la disjonction actuelle (artificielle) au niveau de l'évaluation au baccalauréat.

Bibliographie

BO hors-série n° 4, 30 août 2001. Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique. p. 63-72.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19. n° 2, p. 221-265.

Duval R. *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Éditions Peter Lang. Berne 1995, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation.

Malonga F. (2008a) L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques - physique dans l'enseignement secondaire français. *In* N. Bednarz, C. Mary (Éds). *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés.* Actes du colloque international espace mathématique francophone. Sherbrooke (Canada) : Éditions du CRP.

Malonga. (2008b) L'enseignement des équations différentielles du premier ordre en terminale S, à la fois, mathématiques et en physique : Étude des continuités et ruptures. Thèse de didactique de mathématiques, Université Paris 7 (en cours).

Malonga, F., Beaufils, D. et Parzysz B (2008) Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S : le lien avec les mathématiques en question. *Le Bup*, nº 904.

Malafosse, D., Lerouge A. et Dusseau J.-M. (2001) Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia* nº 18, p. 61-98.

Perrenoud Ph. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (Éd), *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris : ESF, p. 61-76.

Suite de la page 404

Bien sûr, les références au passé sont une fabrique de l'histoire ; mais elles construisent aussi l'avenir et peut-être certaines solutions aux problèmes actuels de notre métier de professeur… Si l'histoire des mathématiques nous informe des processus par lesquels les connaissances se sont développées, il nous revient d'en tirer des enseignements au profit des apprentissages des élèves d'aujourd'hui de façon à ce que le passé ne soit pas « dépassé ».

Voila bien des questions pour ce congrès, et il y en aura encore beaucoup d'autres...

Le temps de mathématiques, les mathématiques dans leur temps.

Et si par plaisir, on faisait des mathématiques tout le temps … en prenant notre temps, au congrès de … de Caen ? … mais non, ici pendant quatre jours à Besançon !

Et pour cela, cher collègues, je vous souhaite du bon temps à Besançon du 28 au 31 octobre 2007, il est encore temps…

J'espère que vous ne serez pas déçus de ce congrès et qu'il répondra à vos attentes. Après avoir réussi à vous réunir si nombreux, voilà maintenant notre souhait. Et pour les quatre jours à vivre ensemble, nous serons disponibles pour vous.

Je vous remercie.