Les quadriques réglées sans équations

Hugues Vermeiren(*)

1. Les quadriques : un domaine où règnent les équations

Un rapide tour d'horizon de ce qui est proposé lorsqu'on désire traiter le très vaste sujet des quadriques nous révèle qu'une approche souvent retenue est celle par équations. Rien que de très normal : les équations permettent d'unifier une théorie qui sans ça serait réduite à une présentation d'objets hétéroclites dont il serait difficile de montrer qu'elles appartiennent au même bestiaire.

Ce constat doit bien sûr être nuancé. L'approche non analytique est omniprésente dans les ouvrages de qualité comme par exemple le célèbre « *Geometry and the imagination* » de Hilbert [1]. À un autre niveau, la théorie des « ensembles quadratiques » se propose, elle, d'étendre les propriétés d'incidence des quadriques à des ensembles plus généraux [2].

L'idée de faire le point sur ce qui peut être fait sans équations (synthétiquement) au niveau Terminale et même avant ainsi qu'au niveau Post Bac n'est donc pas inutile.

Notons que les programmes proposent d'étudier en Terminale S le paraboloïde de révolution (bol) d'équation $x^2 + y^2 = z$ et le paraboloïde hyperbolique (PH ou selle) d'équation $x \cdot y = z$ [10]. Certaines quadriques de révolution font encore leur apparition à l'occasion du calcul de leur volume.

Enfin, n'oublions pas que les sphères, cylindres et cônes sont des quadriques qui interviennent dans nos programmes sans toujours prendre (heureusement) l'apparence d'une équation.

2. Deux architectes roumains...

En 1968, deux architectes roumains, Virgil Dragomir et Adrian Gheorghiu, publient en roumain un impressionnant ouvrage [3]. Cet ouvrage propose entre autres d'utiliser, pour la représentation des structures de plus en plus complexes de l'architecture contemporaine, l'axonométrie au détriment des projections de Monge. À l'époque, la géométrie descriptive semblait déjà condamnée…

Une des idées de l'atelier est de reprendre certains principes exposés dans l'ouvrage de Dragomir et Gheorghiu et de les exploiter à l'aide du logiciel Cabri 3D.

(*) UREM de Bruxelles, Institut Technique Saint Vincent de Paul - Uccle.

3. Quadriques réglées et génératrices rectilignes

Les quadriques réglées se prêtent assez bien à l'approche sans équations. Recouvertes de droites, ces surfaces mettent à la disposition de celui qui les étudie un précieux outil : les relations d'incidence. Ainsi, par exemple, la définition même des quadriques réglées (sans point double) suggère par elle-même un tas d'exercices variés(1).

> *Un Hyperboloïde Réglé (HR) est la surface engendrée par les droites (génératrices) s'appuyant sur trois droites gauches deux à deux (directrices), ces trois directrices n'étant pas parallèles à un même plan.*
> *Un Paraboloïde Hyperbolique (PH) est la surface engendrée par les droites s'appuyant sur deux droites gauches (directrices) et parallèles à un plan (appelé plan directeur).*

Notons que pour pouvoir utiliser certaines propriétés de ces quadriques, il reste indispensable de vérifier que les deux définitions ci-dessus produisent des surfaces qui sont effectivement du second degré, de sorte que le passage par quelques équations reste bien utile. Par exemple, si on sait que le HR (ou le PR) est effectivement une quadrique, on sait qu'une droite le coupe en 0,1 ou 2 points ou est incluse dans la surface.
L'exploitation directe des définitions données ci-dessus ne permet pas de se faire facilement une bonne idée de ce que sont le HR et le PR. Ainsi, dans [4], David Wells traitant de la réalisation d'un modèle, affirme à propos du PH :

> *…Dans une approche mathématiquement importante mais <u>irréalisable en pratique</u>, on part de trois droites mobiles parallèles à un plan mais pas entre elles(2). Etc.*

Mais ce qui est irréalisable en pratique (encore que…) est peut-être facile à réaliser à l'aide d'un logiciel de géométrie. D'où l'idée d'exhumer certains résultats parfois oubliés et de les remettre au goût du jour grâce à la technologie contemporaine.

4. Le HR et le parallélogramme de Binet

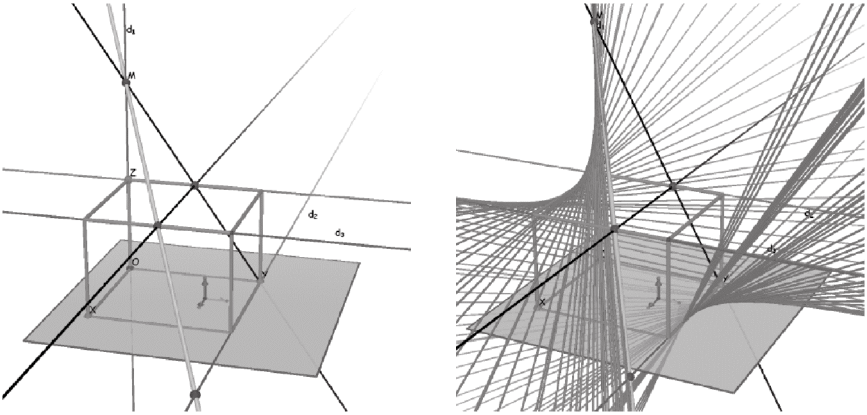
Il existe un seul parallélépipède (oblique) dont trois des côtés ont pour support nos trois directrices. Ce parallélépipède, appelé parallélépipède de Binet(3) (PB), dépend bien sûr du choix des directrices pour un HR donné.

Un bon exercice de visualisation au niveau Seconde est la construction du PB à l'aide d'un logiciel 3D : lorsque les directrices occupent des positions quelconques, ce n'est pas si simple, et lorsque la figure est déjà encombrée par d'autres éléments, ça peut tourner au cauchemar.
Le PB permet de démontrer « synthétiquement » certains résultats. Ainsi, par exemple :

> *Quatre génératrices d'une même famille déterminent sur les génératrices de l'autre famille des birapport égaux.*

(1) Cet atelier laissera de côté les cônes et les cylindres.
(2) Cette définition est équivalente à celle donnée plus haut.
(3) Jacques Binet (1786-1856) contribua au développement de la théorie des matrices.

Non moins étonnant est la proposition qui affirme que le volume du PB est constant. Ce volume est un invariant pour un HR donné.



Le « PB » dans une configuration « simple » : à partir du PB construit sur les directrices d_1, d_2, d_3, il est facile de construire la génératrice passant par le point M de d_1.

5. Un problème d'olympiade

Dans un recueil de problèmes proposés aux olympiades russes [8], on trouve le problème suivant :

> *Soit* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *un parallélépipède et le point* M *qui n'est ni sur ses arêtes, ni sur les supports de ses arêtes.*
>
> *Montrer que s'il existe une droite passant par* M *et coupant les droites* A_1B_1, BC *et* DD_1, *alors il existe une droite par* M *coupant les droites* BB_1, CD *et* D_1A_1.

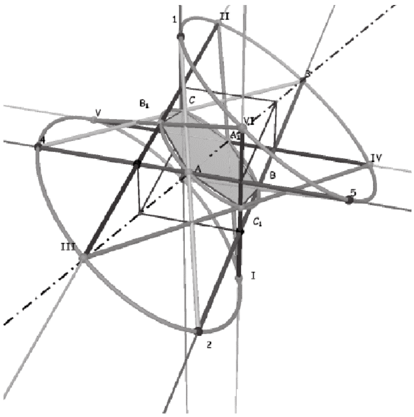
Sous cet énoncé se cache le HR et ses deux familles de génératrices. Le tour de force est de démontrer ce résultat sans jamais avoir entendu parler d'hyperboloïde…

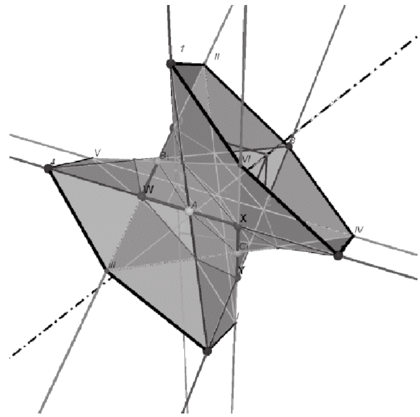
6. La construction des éléments du HR

Le PB permet aussi, et c'est là qu'il montre toute sa puissance, de reconstruire les éléments de l'hyperboloïde à une nappe : son centre, son axe, son ellipse diamétrale, …

Point n'est besoin ici de préciser que cette ellipse diamétrale est l'intersection du HR avec le plan polaire du point à l'infini de l'axe !

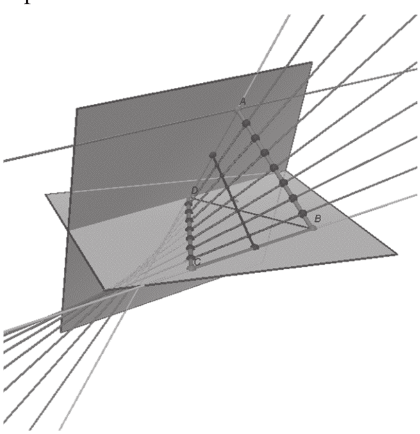
Cette construction repose sur un résultat élémentaire : les symétriques successifs d'un point P par rapport à trois points A,B,C constituent une suite fermée de six points. On obtient deux ensembles de trois segments, les uns s'appuyant sur les autres. Les supports de ces six segments correspondent à six génératrices du HR.

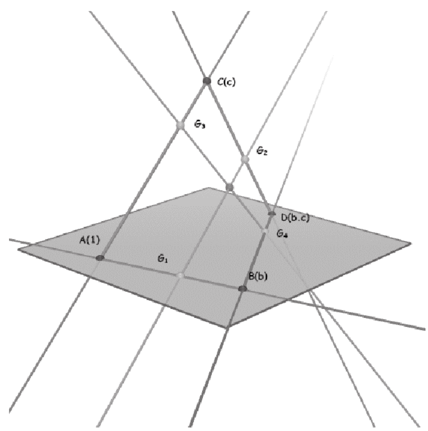




7. Quadrilatères gauches et PH

Un exercice classique et qui n’utilise que le théorème de Thalès dans l’espace et la définition du PH donnée ci-dessus permet d’associer à tout quadrilatère gauche de l’espace un et un seul PH.



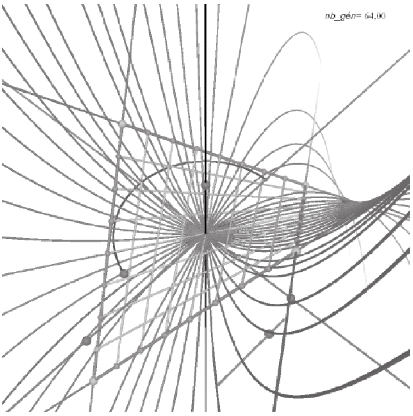


Un autre exercice, accessible aux élèves de Terminale, consiste à prouver que le PH construit sur un quadrilatère gauche est bien formé de deux familles de droites F_1 et F_2 ; deux droites de la même famille sont gauches et toute droite de F_1 coupe une et une seule droite de F_2 [5] [6]. L’utilisation du barycentre est ici conseillée car elle fournit une solution aussi courte qu’élégante.

8. Les sections du PH

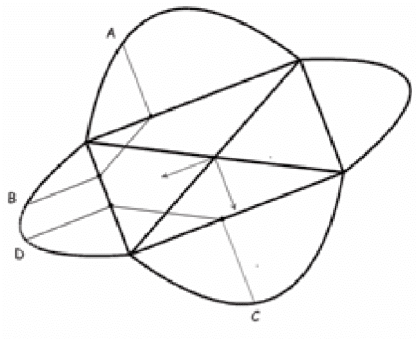
Les sections planes du PH ne peuvent être des ellipses car ces sections sont nécessairement non bornées. En effet, le PH a comme conique à l’infini deux droites (sécantes puisque le plan à l’infini est projectif) et donc toute section plane du PH a au moins un point à l’infini. Quand ces sections seront-elles des hyperboles, des paraboles ou des hyperboles dégénérées ? On pourrait raisonner sur l’équation d’un PH

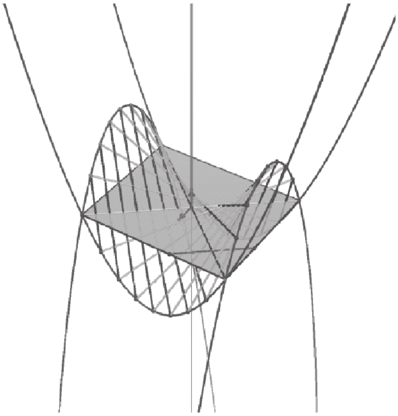
dont l'équation est éventuellement réduite mais n'avait-on pas banni les équations de cet atelier ?
Un petit raisonnement projectif montre que les plans parallèles à l'axe coupent le PH selon une parabole, conique qui n'a qu'un seul point à l'infini. L'axe est ici en fait la direction de droites déterminée par l'intersection des deux plans directeurs.
Si on part d'un PH construit sur un quadrilatère gauche et dont on cherche la section plane par un plan parallèle à l'axe du PH, on dispose de la direction de l'axe de la parabole de section et des quatre points d'intersection des supports du quadrilatère avec ce plan. Un peu d'astuce [7] et on trouve un cinquième point pour construire la parabole de section.
Et voilà une originale représentation du PH : les paraboles sont des sections par des plans pivotant autour d'une droite parallèle à l'axe.



9. Modèles pour le PH

Deux modèles sont mentionnés pour la réalisation du PH. Le plus fréquemment décrit est celui construit sur un quadrilatère gauche articulé. Des élastiques fixés à intervalles réguliers sur les côtés opposés permettent de visualiser les génératrices des deux familles. Ce modèle suggère des sections paraboliques et hyperboliques.
Un autre modèle, utilise des ficelles et des arcs de paraboles pour sa construction et peut donc sembler plus riche [9].





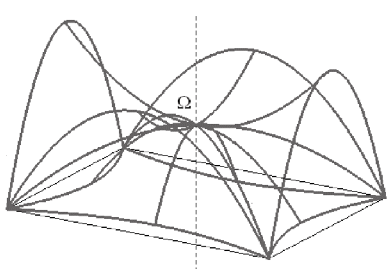
Sur les quatre côtés d'un rectangle, on construit vers l'extérieur quatre arcs de parabole de même hauteur, les axes étant les médianes du rectangle. Parallèlement, aux diagonales du rectangle, on construit des segments qui coupent les côtés en des points à partir desquels on trace des perpendiculaires aux côtés. On obtient ainsi les points A,B,C et D.

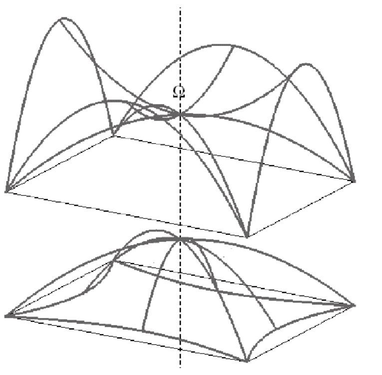
On replie ensuite deux arcs opposés vers le haut et les deux autres vers le bas. En tendant des ficelles entre A et B et entre C et D, on obtient des segments de génératrices du PH.
La figure ci-dessus a été réalisée avec Cabri 3D ; un fichier Cabri II+ reprenant cette construction est téléchargeable à l'adresse :

http://gtulloue.free.fr/Cabri3D/realisations.html

10. Quadriques et surfaces de couverture.

Les surfaces réglées ont acquis une grande importance dans la construction puisque engendrées par le déplacement d'une droite. Elles offrent donc l'avantage d'être réalisables avec des éléments rectilignes.
D'intéressants problèmes se posent lorsqu'on désire réaliser une structure composée de plusieurs « morceaux » de quadriques réglées. Comment veut-on raccorder ces quadriques : selon des génératrices, des sections planes (donc des coniques), etc. ? Le problème est plus général et se pose pour tous les raccords entre surfaces utilisées en architecture (et ailleurs). Le sujet est vaste et difficile et ne peut être qu'effleuré au cours d'un atelier comme celui-ci : l'intersection de deux quadriques est en effet, dans le cas général, une courbe gauche du quatrième degré.
Contentons-nous de décrire une situation simple quoique intéressante.
On désire couvrir un domaine d'un plan horizontal à l'aide d'une structure réalisée à l'aide de deux PH d'axe et de sommet commun. Ces deux PH sont bitangents : en leur sommet commun Ω et en leur point de contact commun en l'infini (le PH est tangent au plan à l'infini). La courbe d'intersection se réduit à deux paraboles de même axe situées dans des plans verticaux différents.
On peut ainsi réaliser :
– Une voûte ouverte à quatre tympans verticaux et quatre points d'appui.
– Une voûte complètement fermée prenant appui sur deux hyperboles, traces des deux PH sur le plan horizontal.





Bibliographie.

[1] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, (1932). *Geometry and the imagination* (Anschauliche Geometrie), Copyright 1952, Chelsea Publishing Company.

[2] Francis Buekenhout, (1968), *Ensembles quadratiques des espaces projectifs*. Téléchargeable à l'adresse :
http://dev.ulb.ac.be/urem/Ensembles-quadratiques-des-espaces

[3] Virgil Dragomir et Adrian Gheorgiu, (1968). *Représentation géométrique des structures spatiales*. Publié dans Cahiers du Centre d'Études Architecturales nº 12-13. Éd. Mignot Bruxelles 1971 et chez Eyrolles Paris 1971.

[4] David Wells, *Le Dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*, Eyrolles 1995.

[5] http://xavier.hubaut.info/coursmath/mat/bary.htm

[6] Yvonne et René Sortais, *Géométrie de l'espace et du plan* (p. 69-70), Hermann 1988.

[7] Michel Guillerault, *Paraboles passant par quatre points,*
http://www.cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Guillerault/Para4pts/Parabole4pts.html

[8] В.А. Садовничи, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. *Задачи студенческих математических олимпиад.* Издательство Московского Университета МГУ (1987). Problèmes d'olympiades mathématiques pour étudiants - Éditions de l'Université de Moscou.

[9] H.M. Cundy and A.P. Rollet (1951) *Mathematical Models*, Tarquin Publications 1981.

[10] Activités diverses sur les quadriques à l'aide d'équations :
http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/pdf/geospace_paraboloide.pdf