Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps

Marie-Hélène Salin

La question du temps aussi bien dans l'enseignement des mathématiques que dans leur apprentissage est une question brûlante. Il n'est que de relire les éditoriaux du bulletin, et d'évoquer les innombrables échanges à son propos entre enseignants, entre enseignants et élèves ou entre élèves pour s'en convaincre.

– Il y a bien sûr « le bon vieux temps », très à la mode en ce moment, celui où les profs enseignaient encore quelque chose à leurs élèves, et où ceux-ci passaient le temps nécessaire sur leur travail.

Plus sérieusement,

– Il y a le temps que l'institution accorde aux professeurs pour enseigner le programme, toujours trop court.

– Il y a le temps de préparation : de l'année, de chacune des séances, des évaluations, temps toujours plus long à la mesure des exigences croissantes de l'institution en termes de problématisation de l'enseignement, de prise en compte de la diversité des élèves et maintenant de la demande explicite de participer à l'enseignement de la langue française.

– Il y a le temps de la présence en classe, de plus en plus délicat à gérer, si j'en crois les témoignages des collègues du terrain, temps pendant lequel il faut à la fois mobiliser les élèves, être à l'écoute, observer ce qu'ils font, et ne pas perdre son fil pour qu'avance le temps didactique.

– Il y a celui des corrections de devoir, de la nécessaire réflexion sur les résultats et leurs conséquences sur la suite de l'enseignement, etc.

En ai-je fini avec cette liste ? Non, car ce métier, si nous l'avons choisi, c'est parce qu'il y a des élèves et que le temps que nous leur consacrons est le temps des apprentissages qui vont permettre leur développement et à terme leur entrée dans la vie adulte. Eux aussi ont des problèmes avec le temps : le professeur va trop vite (ou pour quelques-uns trop lentement), il ne se rend pas compte du temps qu'il leur faut pour faire le travail demandé ! Et c'est vrai que respecter le temps des élèves crée des problèmes aux professeurs : pourquoi mettent-ils tant de temps à comprendre quelque chose d'aussi simple, pourquoi résistent-ils si longtemps à appliquer les règles que nous leur enseignons, pourquoi faut-il prévoir un temps suffisant d'entraînement, pourquoi nous est-il utile de mettre en mémoire telle ou telle réflexion d'élève, etc. ?

(*) Maître de conférences honoraire. Chercheuse au DAESL, Université Victor Segalen, Bordeaux II.

Ces remarques et questions naïves se déclinent de multiples façons dans les recherches menées en didactique, en sciences de l'éducation ou en psychologie. Elles concernent tous les niveaux d'enseignement et tous les domaines des mathématiques enseignées. Mais la façon de les aborder peut dépendre de ces deux paramètres. Mon propos aujourd'hui ne concerne que « l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire et en tout début du collège », ce qui est déjà un trop vaste champ et j'ai choisi d'aborder « ce facteur temps » en ciblant trois entrées, celles qui me paraissent les plus pertinentes pour saisir les enjeux et les difficultés de cet enseignement.

La première, c'est la dimension historique appliquée à la présentation des contenus et des objectifs de cet enseignement, qui peut permettre de comprendre pourquoi il est beaucoup moins assuré à l'école primaire que ne l'est l'enseignement des nombres et du calcul.
Qu'est-ce que la géométrie, actuellement, pour l'école primaire ?
Quels sont les objectifs de son enseignement ? En quoi sont-ils différents de ceux du collège ? Y-a-t-il une façon de l'enseigner préconisée par les programmes ?
La réponse à ces questions a-t-elle varié au cours du temps ?

La deuxième entrée pour aborder le facteur « temps » concerne le temps de l'élève, celui nécessaire à l'apprentissage de la géométrie, tel qu'il est visé dans les programmes actuels.
Quand débute cet apprentissage ?
Où devrait-il en être à la fin de l'école primaire ?
Que se passe-t-il au début du collège ?
Y a-t-il des étapes bien définies que les élèves doivent franchir ?

Je ne traiterai évidemment pas l'ensemble de ces questions en si peu de temps mais je m'appuierai sur un exemple qui permettra, je l'espère, de comprendre pourquoi le développement des connaissances géométriques nécessite un temps aussi long.

Enfin la troisième entrée est relative au temps de l'enseignement que je réduirai au temps du professeur, temps comportant de multiples facettes, liées à sa responsabilité principale : l'avancée du savoir dans la classe, tout au long de l'année. Pour plusieurs raisons, dont certaines liées aux deux entrées précédentes, c'est sans doute dans l'enseignement de la géométrie que les difficultés liées à la gestion de ces temps sont les plus grandes.

J'aurai atteint les objectifs de cet exposé si, à son issue, vous partagez comme moi la conviction que c'est la complexité même de la « matière géométrique » qui explique la complexité particulière de son apprentissage et de son enseignement à l'école primaire et au début du collège.

Mais pour pouvoir illustrer par un exemple prototypique quelques-unes des questions que je soulèverai, je vais commencer par décrire une tâche qui me servira de fil rouge au long de cet exposé.

Une tâche particulière, « fil rouge » de l’exposé

Supposez que vous ayez à transporter un très lourd tapis de gymnastique rectangulaire à l’autre bout d’un gymnase, dans un espace très limité, que vous ne puissiez pas agrandir et dont vous n’êtes pas sûr qu’il puisse être suffisant pour contenir le tapis :

- *si l’effort physique ne vous fait pas peur, vous pouvez faire un essai…*
- *une autre sorte d’essai, un peu plus élaboré, consisterait à confectionner un gabarit du tapis dans des feuilles de journaux, par collage et découpage…*
- *si par contre, vous préférez réfléchir avant d’agir pour ne pas vous épuiser, et si de plus vous êtes professeur de mathématiques, vous allez vous munir d’un mètre pliant, d’une équerre ou de quelque chose en tenant lieu, prendre les dimensions du tapis, et soit dessiner un futur contour, soit marquer seulement l’endroit où les sommets du rectangle seront placés…*

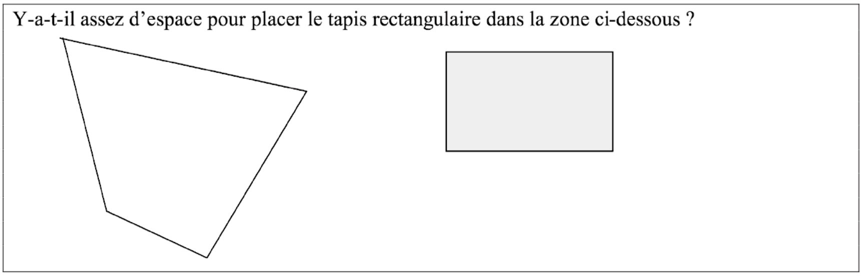


Figure 1

Pour savoir dans quelle mesure, des élèves de CM2 étaient capables de réinvestir des connaissances sur le rectangle semblant bien maîtrisées dans l’espace graphique, nous(1) avons transformé ce problème spatial de la manière suivante et nous avons réalisé des observations individuelles de 38 élèves de CM2.

Un tapis de sol (rectangulaire) de 1,5 m sur 90 cm environ est posé à plat sur le sol à un bout de la pièce ; l’expérimentateur propose à l’élève de prévoir (et de marquer par des pastilles) les endroits précis où se placeront les quatre « coins » du tapis lorsqu’on le déplacera à l’autre bout de la pièce (en rendant impossible une position où un côté serait parallèle au mur ou au mobilier).

La vérification se fera en déplaçant le tapis sur la position prévue. Les élèves disposent des instruments usuels de géométrie utilisés au tableau par le maître, de craies, de mètres déroulants.

Après vérification, par déplacement du tapis, un deuxième essai est proposé.

C’est la contrainte (artificielle ici) de ne pas déplacer le tapis qui oblige à analyser la figure formée par le tapis et à recourir à ses propriétés géométriques pour pouvoir anticiper le déplacement.

(1) Le « nous » désigne l’équipe formée avec R. Berthelot pour mener nos recherches sur l’enseignement de la géométrie et de l’espace

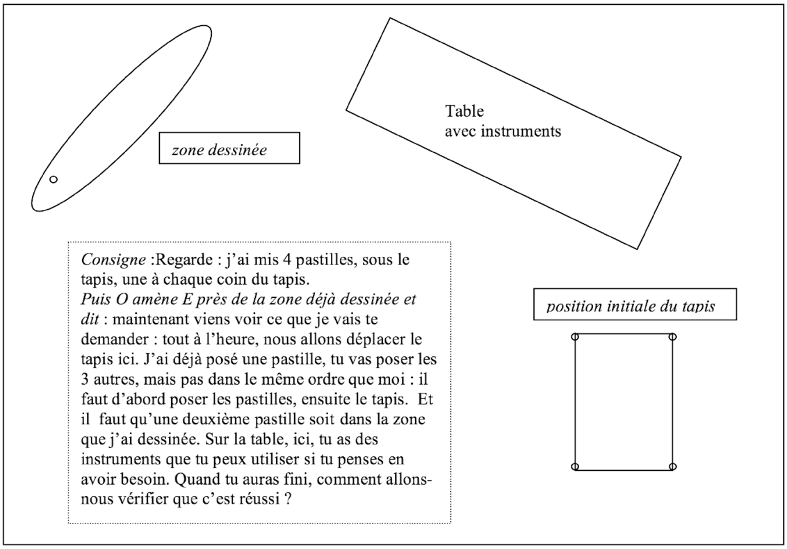


Figure 2

I) la géométrie à l'école primaire, un domaine d'études dont les objectifs, les contenus et les méthodes d'enseignement ont beaucoup varié suivant les époques et ne sont pas vraiment stabilisés

A) Un détour nécessaire pour préciser ce dont on parle

Le terme « géométrie » recouvre des réalités si différentes dans l'enseignement des mathématiques qu'il est nécessaire de consacrer un peu de temps à les distinguer (Berthelot et Salin 2001).

Comment qualifier la tâche « prévoir la position du tapis ? »

Est-ce un *problème « géométrique »* que les élèves ont à résoudre ?

Non, si on se tient à une définition stricte du mot « géométrie », celle à laquelle on veut introduire les élèves à partir de la Sixième : les situations de géométrie mettent un sujet « mathématicien » en interaction avec un milieu qui n'est pas l'espace physique et ses objets, mais un espace conceptualisé, que les « figures-dessins(2) » tracées par ce sujet ne font que représenter. La validité des déclarations n'est pas établie empiriquement, mais s'appuie sur des raisonnements qui obéissent aux règles du débat mathématique.

Ici la validation de la solution est matérielle, il n'y a pas de démonstration à faire. Apparemment il y a « seulement » à savoir mobiliser des connaissances de base sur le rectangle (par exemple qu'il suffit de connaître ses deux dimensions et de disposer

(2) B. Parzysz (1989) propose de distinguer figure et dessin : « nous réserverons le terme de figure à l'être géométrique, tandis que nous emploierons le mot dessin pour une représentation graphique (plane) de cette figure ».

d’une équerre) pour pouvoir les transférer dans une situation concrète. Ce n’est donc pas un problème de géométrie.

Il y a bien un problème pourtant, qu’on peut qualifier de *problème spatial* puisque la solution met en interaction le sujet avec l’espace sensible et que la validation de la solution est elle-même spatiale. Et il y a intervention de connaissances géométriques pour une résolution experte du problème.

J’emprunte au rapport de la Commission de Réflexion sur l’Enseignement des Mathématiques cette liste d’exemples de problèmes spatiaux : « *comment se diriger, se déplacer dans une grande ville inconnue, dans la campagne, dans les bois ou en mer ? Comment utiliser et produire un plan pour déterminer une position et prévoir un trajet ? Comment prévoir ses déplacements dans un grand bâtiment inconnu ? Comment représenter ses propres mouvements, ses déplacements par rapport aux objets environnants ? Comment représenter ce que nous voyons autour de nous ? par un schéma (pour un accident), un plan, une vue en perspective ? Comment décrire les solides élémentaires, leurs mouvements, les directions de l’espace, les distances entre les objets ? Comment décrire les figures planes ?* »

Précisons de manière plus générale les caractéristiques des problèmes spatiaux :

– Leur finalité concerne l’espace sensible.
– Ils peuvent porter sur la réalisation, soit d’actions (fabriquer, se déplacer, déplacer, dessiner, etc.), soit de communications à propos d’actions ou de constats.
– Le langage et les représentations spatiales permettent de communiquer des informations qui se substituent à la perception.
– La réussite ou l’échec est déterminée par le sujet en comparant le résultat attendu avec le résultat obtenu.

Remarquons que les situations dans lesquelles nous sommes amenés à nous poser ces questions sont le plus souvent des situations d’anticipation, comme l’exemple prototypique présenté.

Nous rencontrons ainsi une multiplicité de problèmes spatiaux au cours de notre vie, que nous résolvons avec des moyens plus ou moins élaborés, moyens acquis au fur et à mesure de notre développement et des apprentissages réalisés dans la famille, à l’école ou dans la pratique professionnelle.

L’étude historique montre que la géométrie euclidienne est issue, pour une large part, de la résolution de problèmes spatiaux. Deux grands thèmes ont, en particulier, mobilisé la réflexion des hommes : les mesures spatiales et la représentation plane des situations spatiales. Les grecs, pour des raisons culturelles qu’il n’y a pas lieu de développer ici, ont été les inventeurs de la « géométrie mathématique ». Celle-ci s’est développée de plus en plus, jusqu’à une géométrie coupée de ses origines spatiales. Il n’en reste pas moins que la géométrie demeure « la science des situations spatiales » et que la maîtrise de l’espace, c’est-à-dire la possibilité d’un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l’espace sensible, est facilitée s’il dispose des connaissances géométriques qui s’appliquent au problème qu’il a à résoudre. Dans la plupart des professions portant sur des situations spatiales, artisans, architectes, géomètres, ingénieurs, etc., la modélisation géométrique, à des niveaux différents d’élaboration, bien sûr, constitue un instrument professionnel important, ce que rappelle ce même rapport de la CREM comme argument pour défendre l'enseignement de la géométrie, à tous les niveaux d'enseignement.

L'évolution de cet enseignement peut être interrogée de différents points de vue, j'introduirai celui que je choisis aujourd'hui par la question : Dans quelle mesure l'enseignement de la géométrie à l'école primaire prend-il en compte ce rôle, c'est-à-dire l'apport des connaissances géométriques à la maîtrise du réel ? La réponse varie beaucoup en fonction des périodes.

Commençons par ce qu'il en est aujourd'hui, qui servira de point de références pour le passé.

B) Les programmes actuels (primaire-2002/2007 ; sixième-2005)

Les programmes du primaire ont pour titre : « Espace et géométrie » et non pas seulement « géométrie ». Cette nouveauté de 2002, même si elle ne correspond pas à un contenu tout à fait neuf est significative de la volonté que l'enseignement des mathématiques, à côté de celui d'autres disciplines, prenne en charge les apprentissages proprement spatiaux :

Ainsi, il est dit en introduction pour le cycle 2 :

> « À l'école primaire, la géométrie renvoie à deux champs de connaissances :
> – les connaissances spatiales qui permettent à chacun de contrôler ses rapports à l'espace environnant ;
> – les connaissances géométriques qui permettent de résoudre des problèmes portant sur des objets situés dans l'espace physique ou dans l'espace graphique (Document d'application C2) ».

et pour le cycle 3 :

> Les activités du domaine géométrique **ne visent pas des connaissances formelles (définitions)**, mais des **connaissances fonctionnelles**, utiles pour **résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur**, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales (notamment, représentations planes de solides).

Les enjeux des apprentissages de l'école primaire

Face à un problème spatial, nous essayons en général de le résoudre de la manière la plus économique qui soit : dans le gymnase, si le tapis est léger, il est bien évident que le plus simple est d'essayer en le transportant. On se situe le plus souvent ainsi dans une problématique qu'on peut qualifier de « pratique ».

Les élèves de l'école maternelle ou même du cycle 2 ont encore beaucoup de connaissances spatiales à apprendre en se situant dans cette problématique : l'usage du gabarit par exemple pour tracer des figures superposables. Mais l'objectif de l'école élémentaire est de fournir aux élèves les outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux, en allant au delà du « bricolage ». Ce que les programmes du cycle 3 formulent ainsi : permettre aux élèves de « passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments ». Pour cela, il est nécessaire d'introduire les notions géométriques qui servent à modéliser l'espace physique, et de les faire fonctionner dans des situations auxquelles les élèves peuvent donner du sens. Le problème « prévoir la position du tapis » avec les contraintes imposées par la situation répond bien à cet objectif.

Cette évolution se traduit par des exigences différentes en fin de chaque cycle.

L'exemple de la reconnaissance du rectangle

En fin de cycle 1, le terme « rectangle » est utilisé pour décrire des pièces de jeu par exemple, mais la reconnaissance est seulement perceptive, il n'y a pas formulation de propriétés.

En fin de cycle 2, la compétence « vérifier si une figure est un carré ou un rectangle en ayant recours aux propriétés (longueurs des côtés et angles droits) et en utilisant les instruments » est travaillée dans des activités « d'approche ».

Au cycle 3, en fin de CM1, cette même compétence est considérée comme construite, et est notée comme à consolider et à utiliser en CM2, en particulier pour « vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration complexe ».

En ce qui concerne la compétence « tracer une figure », il est précisé : « Pour le carré et le rectangle, les élèves sont confrontés à des exercices de constructions à partir de la donnée d'un ou plusieurs sommets donnés, d'un ou deux côtés tracés ou à partir de la seule donnée des longueurs de ces côtés. »

Et en Sixième ? Que disent les programmes à propos des relations entre l'espace sensible et la géométrie ?

« *Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribuent à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre. Les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations (par exemple représenter un champ par un rectangle) et de résoudre ainsi des problèmes posés dans l'espace ordinaire.* »

Ce texte montre la continuité entre l'école primaire et le collège. La géométrie « instrumentée » constitue encore l'essentiel du travail proposé en Sixième et doit permettre d'introduire, par le même type de démarche, de nouveaux concepts et de nouveaux instruments. C'est pourquoi, les professeurs de mathématiques de Sixième, comme les professeurs des écoles de cycle 3, ont des exigences précises au niveau de la qualité des « figures-dessins » et de la manipulation des instruments.

Par ailleurs, il est précisé que « les travaux conduits doivent viser d'une part à stabiliser les connaissances des élèves et d'autre part à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser ». Enfin, apparaît en Sixième, de manière explicite en géométrie seulement, l'objectif d'initier à la déduction.

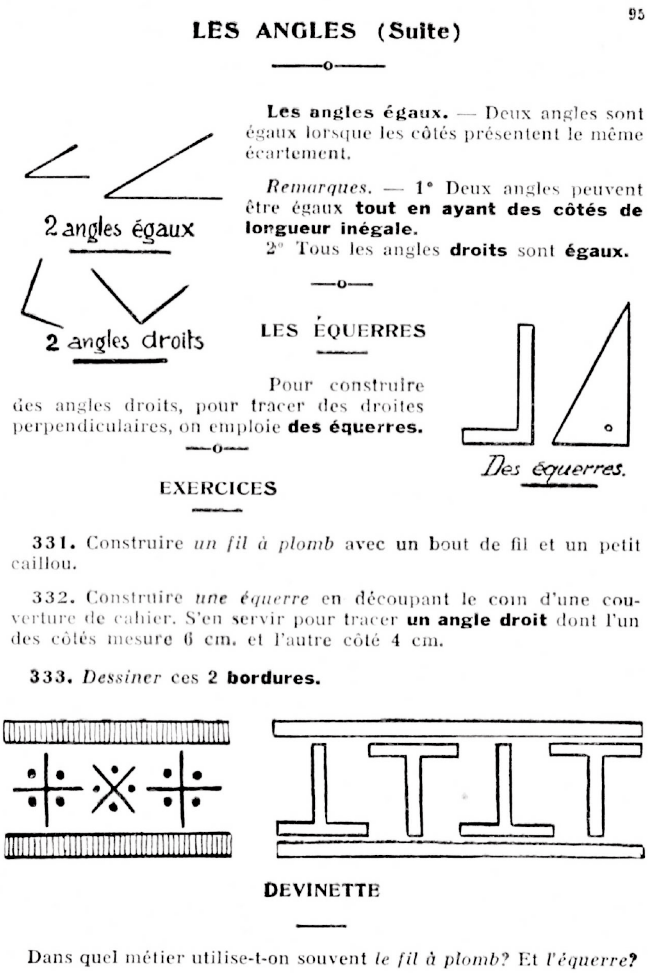
La consultation des manuels de Sixième montre à quel point ce dernier objectif est considéré comme important, au détriment, il me semble, d'autres objectifs de l'enseignement de la géométrie. Nous allons y revenir.

C) L’enseignement de la géométrie à l’école primaire : des changements successifs après une longue stabilité

Je me contenterai de présenter en quelques flashs les éléments qui m’apparaissent les plus significatifs.

Finalités

La mention explicite du contrôle des rapports à l’espace environnant est récente : depuis 1970, elle est apparue, a disparu puis est revenue il y a peu : on peut penser que ce contrôle était considéré auparavant comme relevant des apprentissages familiaux.



95

LES ANGLES (Suite)

2 angles égaux

2 angles droits

Les angles égaux. — Deux angles sont égaux lorsque les côtés présentent le même écartement.

Remarques. — 1° Deux angles peuvent être égaux **tout en ayant des côtés de longueur inégale.**

2° Tous les angles **droits** sont **égaux.**

LES ÉQUERRES

Pour construire des angles droits, pour tracer des droites perpendiculaires, on emploie **des équerres.**

Des équerres.

EXERCICES

331. Construire *un fil à plomb* avec un bout de fil et un petit caillou.

332. Construire *une équerre* en découpant le coin d’une couverture de cahier. S’en servir pour tracer **un angle droit** dont l’un des côtés mesure 6 cm. et l’autre côté 4 cm.

333. *Dessiner* ces 2 **bordures.**

DEVINETTE

Dans quel métier utilise-t-on souvent *le fil à plomb*? Et *l’équerre*?

Figure 3
L’arithmétique en riant au cours élémentaire (1933)

Les finalités professionnelles ont été présentes depuis le début de l'école obligatoire et jusqu'en 1945, avec au cours supérieur, l'arpentage et le relevé de terrain. Le dessin géométrique a tenu une place importante à la fin du 19e siècle, on en trouve encore des traces en 1933, plus du tout après 45, où il est transféré à la rubrique des programmes : « dessin ou travail manuel ». L'extrait du manuel ci-dessus en témoigne.

Le dessin géométrique (les deux « bordures à dessiner ») s'appuie à cette époque sur les savoirs géométriques enseignés. Soixante-dix ans plus tôt, les relations se faisaient en sens inverse : c'est en réalisant des dessins géométriques que les enfants rencontraient les premières notions géométriques.

Géométrie et mesures spatiales

Si, jusqu'en 45, du cours élémentaire au CM2, le terme « géométrie » concerne l'étude des figures planes et de quelques solides, ce sont surtout les mesures spatiales qui sont visées. Au point que dans le programme de 45, le terme de « géométrie » disparaît, il ne reste que le « calcul », ce qui entérine le fait que les quelques connaissances géométriques enseignées ne le sont que pour calculer des périmètres, des aires ou des volumes.

Dans la figure 4 ci-dessous, seul le premier exercice demande la « construction » d'un rectangle, tous les autres portent sur les périmètres.

Depuis les programmes de 1970, géométrie et mesure apparaissent toujours dans des rubriques différentes, sous l'influence probable de l'enseignement secondaire.

Quelle(s) méthode(s) pour enseigner la géométrie ?

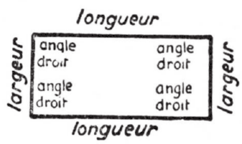
Comme on peut s'en rendre compte sur les deux extraits de manuels ci-dessus, l'enseignement évoqué par ces manuels ne s'appuie pas sur la résolution de problèmes ! Mais sur l'ostension, c'est-à-dire l'observation dirigée par l'enseignant, suivie d'exercices de dessin ou de calcul.

« *Les notions de géométrie doivent être comprises comme des exercices d'observation et de leçons de choses en même temps qu'un premier apprentissage du dessin et du travail manuel. Le pliage d'un carré pour la construction d'une cocotte peut fournir de nombreuses remarques : égalité des côtés, égalité des angles droits etc.* » (IO CE 1945)

Nulle part n'apparaît l'idée que la géométrie puisse permettre aux élèves eux-mêmes de résoudre des problèmes spatiaux : l'espace n'est toujours qu'évoqué, les mesures déjà réalisées, etc. En témoigne la page du même manuel de 1933 donnée dans la figure 5.

Depuis 1977, l'accent est mis sur les activités ou les problèmes qui permettent l'étude des objets géométriques (reproduire, décrire, représenter, construire). Mais l'examen des manuels montre qu'il est souvent fait appel à l'ostension (éventuellement déguisée, c'est-à-dire cachée sous la forme de questions aux élèves) sur des figures dessinées sur une feuille de papier. C'est le cas des questions posées à propos des propriétés du carré et du rectangle dans le manuel Magnard (figure 6) : à la question « que constates-tu ? », une seule réponse est attendue, la bonne, alors qu'en particulier pour l'exercice 3, on peut douter que tous les élèves soient en mesure de constater que leurs quadrilatères soient des rectangles et que la propriété « découverte » soit générale.

Le rectangle



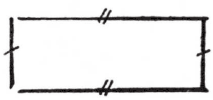
Le rectangle a 4 côtés et 4 angles droits.

- Citez des figures rectangulaires observées autour de vous.
- Vérifiez par pliage l'égalité des 4 angles.

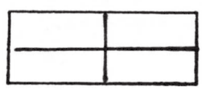
Au lieu d'appeler les dimensions du rectangle **longueur** et **largeur,** on peut aussi les appeler **base** et **hauteur.**

Propriétés Vérifiez à l'aide du double-décimètre et de l'équerre :

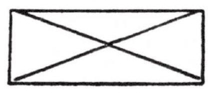
que les côtés sont parallèles et égaux deux à deux.



que les médianes sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.



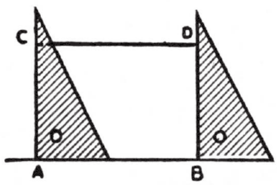
que les diagonales sont égales et partagent le rectangle en parties égales deux à deux.



Construction

Construire un rectangle de 4 cm sur 3 cm.

Des points A et B distants de 4 cm j'élève deux perpendiculaires de 3 cm de longueur. Je joins leurs extrémités.



Périmètre

Le périmètre est égal à 2 fois la longueur plus deux fois la largeur

Périmètre = 2 longueurs + 2 largeurs $P = 2L + 2l$

Périmètre = 1/2 périmètre × 2 $P = (L + l) \times 2$

Exercices et problèmes

764. — Construisez un rectangle de 42 mm sur 64 mm. Tracez les médianes et les diagonales.

765. — Calculez le périmètre des rectangles ayant pour dimensions :

Largeur :	15 m	18 m	43 mm	6,80 m	182 m	2,500 km
Longueur :	18 m	27 m	54 mm	8,75 m	376 m	4,600 km.

766. — Je désire faire un cadre rectangulaire de 52 cm sur 80 cm. Quelle longueur de baguette faudra-t-il acheter ? (On ne vend la baguette que par nombre entier de mètres.)

◆ **767.** — Complétez le tableau suivant :

Largeur Longueur	0,75 m 0,95 m	6,95 m 12,20 m	143 m 228 m	58 mm 293 mm	42 m ?	74,50 m ?	? 32,5 cm
Périmètre du rectangle	?	?	?	?	216 m	375,50 m	119,6 cm

768. — Mon jardin rectangulaire a 13 m de long et 8 m de large. Je veux l'entourer de 3 rangs de fil de fer. Quelle sera la longueur du fil nécessaire ? (La porte a 2 m de large.)

769. — On veut encadrer un tableau rectangulaire de 0,45 m sur 0,62 m en l'engageant d'un centimètre sous la baguette du cadre. Calculer : 1° les dimensions extérieures du cadre si la baguette a 5 cm de large ; 2° la longueur de la baguette utilisée. (Faire un croquis.)

80

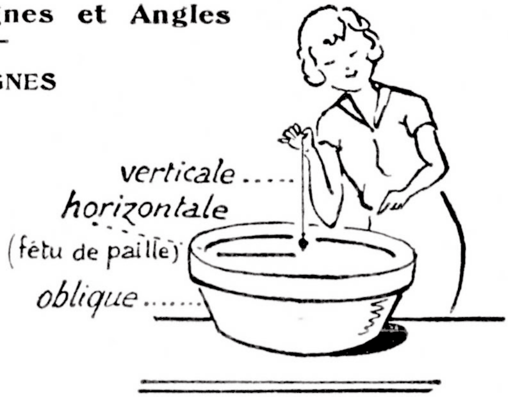
Figure 4

Le nouveau calcul vivant Cours moyen 1960

94

GÉOMÉTRIE : Lignes et Angles

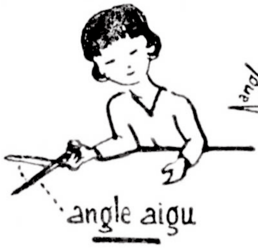
LES LIGNES

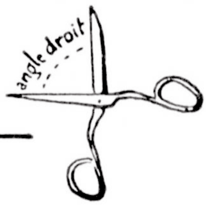


La ligne verticale. — Le **fil à plomb** indique la direction d'une ligne verticale.

La ligne horizontale. — Le **fétu de paille** sur l'eau dormante indique la direction d'une ligne horizontale.

La ligne oblique. — C'est une ligne qui n'est ni verticale ni horizontale.





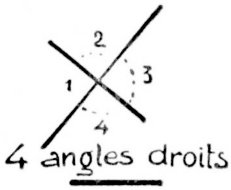
LES ANGLES

Un angle est formé par l'écartement de 2 lignes droites qui se rencontrent.

L'angle droit. — La ligne verticale et la ligne horizontale forment un **angle droit.**

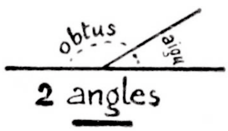
Deux lignes qui se coupent **en croix** font **4 angles droits.**

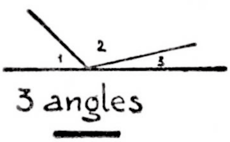
On dit que ce sont des **lignes perpendiculaires.**



L'angle aigu est plus petit **que** l'angle droit.

L'angle obtus est plus grand que l'angle droit.





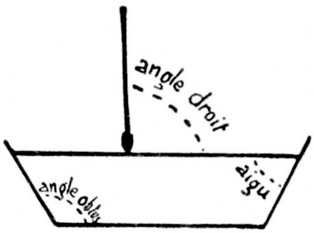
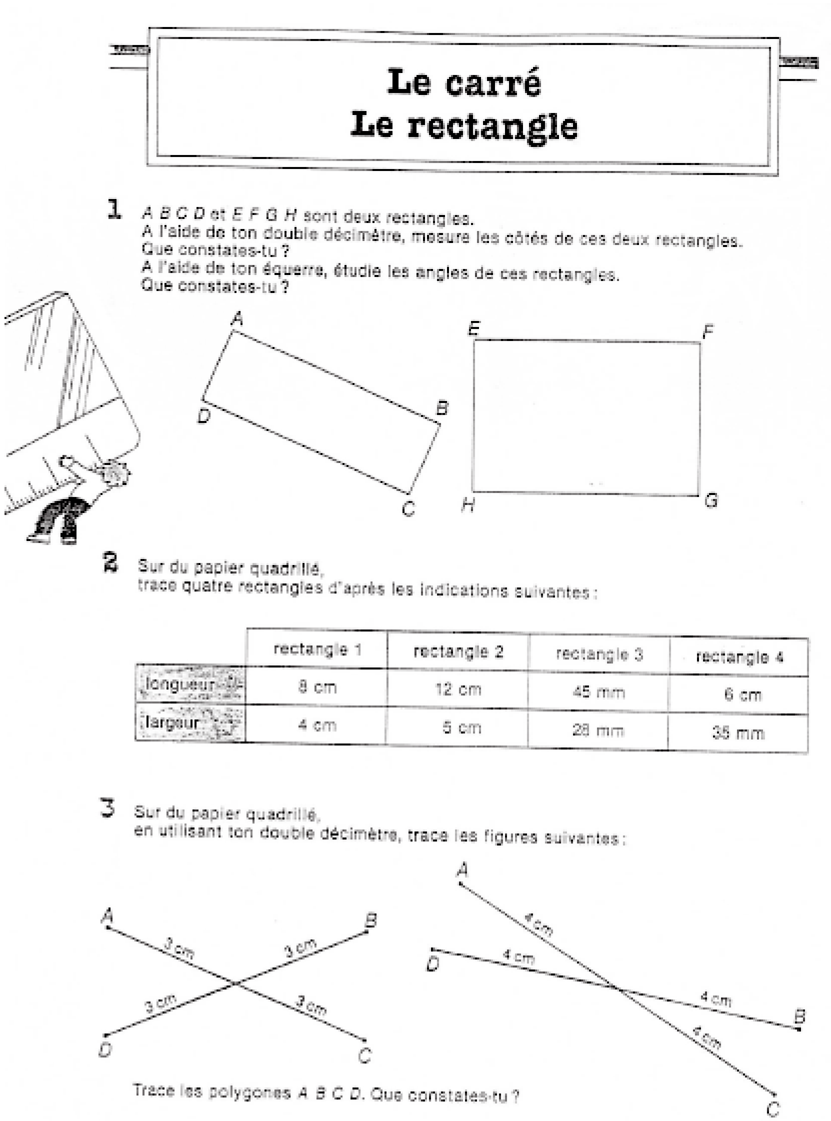


figure 5



Le carré
Le rectangle

1 A B C D et E F G H sont deux rectangles.
A l'aide de ton double décimètre, mesure les côtés de ces deux rectangles.
Que constates-tu ?
A l'aide de ton équerre, étudie les angles de ces rectangles.
Que constates-tu ?

2 Sur du papier quadrillé,
trace quatre rectangles d'après les indications suivantes :

	rectangle 1	rectangle 2	rectangle 3	rectangle 4
longueur	8 cm	12 cm	45 mm	6 cm
largeur	4 cm	5 cm	28 mm	35 mm

3 Sur du papier quadrillé,
en utilisant ton double décimètre, trace les figures suivantes :

Trace les polygones A B C D. Que constates-tu ?

Figure 6
Mathématiques, collection Thévenet, Magnard 1985

Dans certains manuels, la réalisation de figures prend de plus en plus de place sous la forme de recettes à appliquer. Dans l'exercice ci-dessous, tiré de « J'apprends les maths », l'élève de CE2 est censé apprendre à « construire » un triangle, de dimensions données par un schéma, à la règle et au compas !

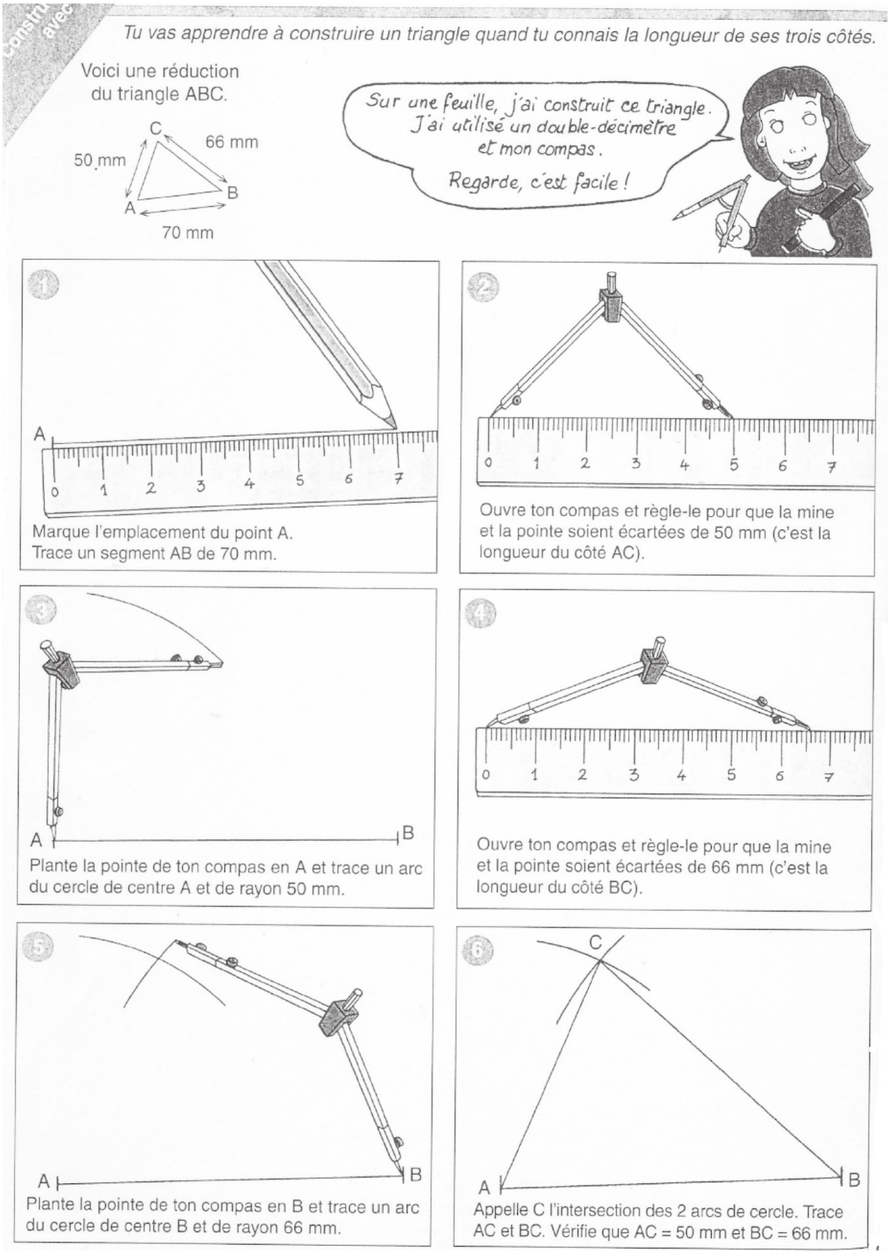


Figure 7
J'apprends les maths, Retz 1997

Les programmes actuels sont peu éloignés de ceux de 1995, l'étude des figures planes et des solides, en s'appuyant sur la résolution de problèmes, reste centrale, mais ils mettent davantage en évidence les connaissances relatives aux relations et propriétés (alignement dès la fin du cycle 2, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale).

La liste des compétences devant être acquises en fin de cycle 3 est beaucoup plus développée, elle vise à mieux préparer les élèves au grand saut de la Sixième. Par exemple, par l'introduction de lettres pour désigner des points, l'introduction de schémas codés en toute fin de cycle 3, etc. En fait, comme souvent en France, certains manuels vont largement au delà de ce qui est demandé dans les programmes, comme le tracé d'un triangle de longueurs de côtés données à la règle et au compas en CE2 !

En conclusion

Depuis 1980, l'enseignement de la géométrie a peu à peu retrouvé une place importante dans les programmes de l'école primaire, reflétant avec quelques années de retard ce qui se passe au collège. C'est un enseignement ambitieux, de par ses objectifs et ses contenus. Mais il est difficile de s'accorder sur un corps de connaissances et de compétences bien défini à enseigner et sur des méthodes consensuelles. Au cycle 3, l'influence de l'enseignement secondaire y est forte, beaucoup plus dans les manuels que dans les programmes. Pourtant, beaucoup d'élèves arrivent en Sixième avec des connaissances et des compétences que leurs professeurs trouvent faibles et mettent beaucoup de temps à entrer dans le changement de rapport aux figures-dessins qui est initié en Sixième. S'interroger sur ce qui passe pour l'élève, donc sur le temps de l'apprentissage est nécessaire pour y voir plus clair.

II) Le temps de l'apprentissage

Le temps institutionnel est balisé par les programmes et la liste des compétences à développer. Les résultats des évaluations de début du cycle suivant peuvent permettre d'avoir quelques repères sur les connaissances acquises, souvent très en deçà de ce qui est visé. Ce qui ne veut pas dire forcément que les programmes sont trop ambitieux, mais ce qui signale qu'il faut prendre conscience que ces apprentissages ne peuvent se faire que dans la durée, étant donnée leur complexité.

Je ne prendrai qu'un exemple, celui de la connaissance du rectangle, figure emblématique de la géométrie à l'école primaire depuis ses origines, étant donné son aspect fondamental à de multiples points de vue : spatial (avec la prédominance de cette forme dans l'environnement) et géométrique (définition du parallélisme, figure de base pour la mesure des aires, etc). Et pour cela, je vais commencer par revenir sur le problème du tapis.

A) Retour sur la situation du tapis proposée à 38 élèves de CM2

Résultats observés

* Deux élèves seulement ont eu besoin d'un premier essai pour penser à mesurer les côtés du tapis.

* Presque tous les élèves prennent les mesures des (quatre ou deux) côtés, placent deux pastilles, et ajustent les deux autres par tâtonnement pour que les trois distances restantes correspondent aux longueurs.

* Sept élèves seulement contrôlent un angle droit entre les deux directions déterminées par trois pastilles consécutives.

* Les élèves constatent donc un échec massif à la réalisation, lorsqu'on tente de placer les coins du tapis sur les marques faites au sol. 31 constatent le décalage, mais 20 l'imputent aux longueurs et ne savent pas comment le corriger (six d'entre eux essaient en vain de le faire à partir de la longueur des diagonales).

* Moins de 50% du total des élèves sont capables soit de réussir directement en utilisant une équerre, soit d'interpréter leur échec en repérant le problème de l'angle droit entre les directions choisies pour les repérages.

* À la fin de l'entretien, interrogés sur la forme du tapis, tous savent pourtant que c'est un rectangle.

Quelques réactions possibles

La plus simpliste serait l'affirmation : « Ils n'ont rien appris ou si peu ».

Pourtant, presque tous ces élèves savent terminer le dessin d'un rectangle dont un angle est déjà tracé en biais par rapport aux côtés de la feuille en utilisant leur équerre à bon escient, avec une précision de moins d'1mm sur les longueurs des côtés. Et tous savent qu'un rectangle a quatre angles droits.

Une analyse plus réaliste consiste à dire : « ils ne sont pas en mesure de mobiliser leurs connaissances dans cette situation précise ». En effet, mais quelles sont donc ces connaissances qu'il faut pouvoir mobiliser pour réussir ?

Répondre à cette question demande une analyse plus précise de la situation des élèves interrogés.

Analyse de la situation

État initial : un ensemble de cinq objets matériels : le tapis et les quatre pastilles, dans une position 1.

État final visé : quatre autres pastilles devant occuper la même place par rapport au tapis dans une position 2, position en partie contrainte puisque deux des pastilles doivent être placées dans une zone empêchant le repérage avec l'espace environnant.

Quelles connaissances sont nécessaires pour réussir ?

1) Au moment de la prise d'informations, il faut faire un raisonnement en deux étapes :

– Étape 1 :

La forme est invariante par déplacement ; ce sont des positions de points qui sont visées, les distances entre ces points sont les mêmes que les longueurs des côtés du tapis, il faut donc prendre en compte les dimensions du tapis et placer les quatre pastilles en respectant ces distances entre elles.

– Étape 2 :

Ou bien : le tapis a la forme d'un quadrilatère, or la connaissance des longueurs de côté est insuffisante pour le reproduire, il faut prendre en compte en plus soit un angle, soit la longueur d'une diagonale, ou bien trois côtés et deux angles, solution particulièrement bien adaptée pour un rectangle.

Ou bien : le tapis a la forme d'un rectangle, je le sais ou je le vois ou je le vérifie, il suffira de construire un rectangle de mêmes dimensions sur le sol ou de repérer les sommets d'un rectangle de mêmes dimensions.

Le premier « raisonnement » de l'étape 2 a peu de chance d'apparaître, les élèves ne connaissant pas cette propriété, qui n'est d'ailleurs pas enseignée. On peut penser que la plupart des élèves observés qui ont réussi, ont implicitement fait le deuxième raisonnement.

2) Au moment du positionnement des pastilles :

Plusieurs solutions sont possibles, il faut pouvoir contrôler trois longueurs et deux angles droits, ou les quatre longueurs et un angle droit.

La prise en compte des seules dimensions du tapis conduit à un placement aux sommets d'un parallélogramme. Encore faut-il disposer d'instruments adaptés, ce qui n'était pas le cas là. Sinon, par corrections successives, il est possible de s'en approcher. C'est ce que font la majorité des élèves. Ils arrivent assez bien à placer les pastilles aux sommets d'un parallélogramme, non tracé, respectant les distances entre les pastilles.

Avoir reconnu le rectangle et avoir l'intention de repérer ses sommets ne suffit pas aux élèves pour réussir : pourquoi ?

Mes réponses sont plus des hypothèses que des certitudes qui devraient être étayées par davantage d'études que ce que nous avons pu faire. Deux caractères de la situation sont à prendre en compte :

– Le problème posé ne demande pas de tracer le tour du tapis mais seulement de positionner les pastilles aux sommets. Les élèves ne « pensent » pas à tracer le rectangle.

Pour un adulte avec une certaine culture mathématique, l'espace est homogène, l'existence des droites qui bordent la future position du tapis est assurée, même si elles ne sont pas tracées. Les tracer permet d'utiliser les instruments de manière presque aussi aisée que pour un tracé sur une feuille de papier. Ceci n'est pas encore conceptualisé par un élève de CM2 et les professeurs de collège savent le temps qu'il faut à leurs élèves pour tracer les droites supports de segments, et tracer des sur-figures. Aussi, ici, la tâche de l'élève est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît à première vue : il doit reconstruire mentalement tout le modèle géométrique : lignes joignant deux points (places des sommets), et contrôler la position relative des lignes avec des angles.

– Le passage de l'espace de la feuille de papier à un espace plus grand a deux conséquences :

D'une part, le contrôle global par la vue est difficile ; quand un élève de CM2 trace un rectangle sur une feuille de papier, soit il a appris à le faire avec une équerre de manière systématique, soit il y a recours quand il s'aperçoit par un contrôle visuel que le rectangle n'a pas l'air très rectangle. Ici, le contrôle visuel n'est pas suffisant pour l'alerter.

D'autre part, l'usage des instruments est modifié par la taille de l'espace de travail. Le plus souvent, la taille de la figure n'oblige pas l'élève à contrôler que son équerre est bien positionnée, puisque le côté de l'équerre est plus grand que le côté du rectangle à tracer. Ici, la plupart des élèves qui, d'emblée, prennent une équerre car elle est associée pour eux au rectangle, la positionnent à un sommet mais ne contrôlent pas que son côté est dans l'alignement de l'autre sommet. Quelques-uns toutefois le font, au moins pour le premier angle, rarement pour le second, mais ce contrôle, associé à celui des quatre longueurs leur permet de réussir.

Les difficultés à s'exprimer sur les causes de non-réussite :

À la vue du décalage, deux réactions des élèves sont très fréquentes :

– « Je n'ai pas bien mesuré (pour placer les pastilles) ». Une rapide vérification leur montre que les longueurs de côté conviennent.
– Ce n'est pas « droit ». Mais l'ambiguïté du terme « droit » est énorme, certains élèves confondent l'angle droit, les côtés droits et « ce n'est pas droit » car penché par rapport à l'environnement des murs(3).

Le langage, s'il n'a jamais été travaillé spécifiquement, les embrouille plus qu'il ne les aide.

Les nouveaux essais :

Au cours du deuxième essai, certains élèves « découvrent » qu'il faut contrôler la direction de l'équerre, soit par visée, soit en ayant recours au support d'une règle.

Deux remarques :

– Ce type de tâche n'est pas pris en compte dans l'enseignement, ni en primaire, ni en collège, ni même dans l'enseignement professionnel. C'est pourtant bien à anticiper les résultats de son action que sert la géométrie pour le plus grand nombre ! Je ne pense pas que la majorité des élèves, même du secondaire en aient conscience !

– À quoi renvoie la surprise manifestée par les enseignants face à ces résultats ?

Ma réponse serait : à notre méconnaissance de la complexité de la conceptualisation géométrique : nous savons bien que les objets géométriques, comme le concept de rectangle, ne sont pas donnés par l'observation ou l'application de techniques de tracés mais sont construits. Notre maîtrise du modèle fait que nous projetons notre connaissance de l'espace géométrique sur l'espace sensible sans difficultés, tout au moins dans des cas simples et que l'évidence de la solution nous empêche de saisir tout le chemin que doit faire l'élève pour s'approprier ces concepts et acquérir par exemple une des compétences énumérées dans le programme comme celle-ci : « décomposer une figure en figures plus simples ».

Ici, il faut concevoir qu'un rectangle peut être décomposé en quatre droites perpendiculaires. Hé bien, ce n'est pas si simple !

B) Comment expliquer la durée des apprentissages géométriques ?

La construction de l'espace géométrique s'appuie sur les connaissances spatiales issues des rapports pratiques à l'espace sensible mais doit les dépasser.

À la suite de G. Brousseau (1983), nous avons fait l'hypothèse, appuyée sur quelques travaux expérimentaux, que ces connaissances spatiales dépendaient du type d'interactions avec l'espace, qui ne sont pas les mêmes selon la taille de l'espace. Dans les interactions usuelles de manipulation des petits objets, très fréquentes et

(3) Remarquons que le terme « droit » est particulièrement polysémique en français :
« Ligne droite » / ligne sinueuse,
« allez tout droit » : en face de vous plutôt que « en ligne droite »,
« tiens-toi droit, droit comme un i », en référence à la verticale : c'est droit/c'est penché,
« angle droit » /angle non droit,
« côté droit » / côté gauche.

rencontrées très tôt par l'enfant, se construirait une représentation micro-spatiale de l'espace dont les caractéristiques sont très différentes de celles de l'espace géométrique. La représentation micro-spatiale serait activée dans les activités géométriques « spatio-graphiques », ce qui expliquerait certaines des difficultés des élèves, qui assimileraient les « figures » de la géométrie aux objets du micro-espace, dont les possibilités de traitement sont particulièrement pauvres.

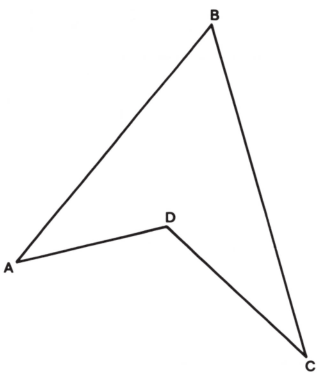
Dans le micro-espace, les concepts fondamentaux sont ceux d'objet et d'espacement. Dans ce cas, la notion de distance n'a que peu de rapport avec la notion géométrique de même nom ; elle se ramène à celle d'espacement, c'est-à-dire de séparation physique entre deux objets, cet espacement étant modifiable sans efforts importants.

Nous illustrons par l'exemple ci-dessous notre interprétation du rôle de la représentation microspatiale :

Les directions et les mesures des deux segments posent le même type de difficultés, très bien surmontées à cet âge, puisque 93,2% des enfants réussissent la première question. Ils ne sont plus que 54,4 % pour la seconde. Tous les types d'erreurs ne sont malheureusement pas identifiées, mais nous savons tout de même que 23,6% des élèves positionnent mal leur règle (au lieu de 1,8 %) dans la première question et que 10% d'entre eux ont mesuré puis calculé AB + BC ou AD + DC. Le pourcentage de non-réponses est très faible.

On pourrait penser que ces élèves ne connaissent pas bien le sens du mot distance. Or l'année précédente, la même question avait été posée à propos de deux points, qui eux étaient reliés par un segment tracé ; la réussite avait été de 91%. Nous attribuons donc cette différence dans les réussites au fait que, pour presque la moitié des élèves, l'hétérogénéité de la feuille de papier, au sens des pleins et des vides, induite par la représentation micro-spatiale qu'ils mobilisent, est encore très forte : ils ne peuvent pas mesurer une distance qui n'est pas matérialisée par un trait : on ne mesure pas le vide.

Exercice 31



En utilisant la règle graduée, mesure en centimètres :

a. la longueur du segment [**BC**] :

BC = ... cm

b. la distance du point **A** au point **C** :

AC = ... cm

Figure 8
Item d'évaluation « entrée en Sixième » 1991

C) Le rôle des situations d'enseignement est fondamental

Bien que ce ne soit pas l'objet de cet exposé, je voudrais signaler trois directions de recherche explorées actuellement, essentiellement au cycle 3, pour favoriser la conceptualisation géométrique.

1) La résolution de problèmes posés dans le méso-espace, avec recours à la feuille de papier comme « laboratoire d'expérimentation graphique » (Berthelot et Salin (2001) ; Gobert (2001) ; Maurin (2001) ; Bloch et Salin (2004)).

Un exemple de cette démarche, concernant le rectangle, est donné par C. Maurin (2001) : « On propose [aux élèves] de construire un rectangle dans un espace dont la taille ne permet plus d'avoir recours à l'image mentale comme référent. Ils reviennent alors vers la feuille de papier pour interroger une figure réduite afin d'en tirer des propriétés qui puissent leur permettre de résoudre, dans l'action sur le terrain, le problème de construction qu'ils se sont posé. »

2) L'élaboration de « situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie ».

Une équipe de l'IUFM de Lille, dont les initiateurs sont M.-J. Perrin et R. Duval, s'est engagée dans cette recherche, ainsi présentée dans Keskessa, Perrin et Delplace (2007) : « Il s'agit de passer d'une vision des figures en terme de surfaces […] à une vision en termes de points et de lignes qui permettent de caractériser la figure pour une construction à l'aide d'instruments qui sont eux-mêmes porteurs de connaissances géométriques ». La recherche que mène actuellement cette équipe vise à construire des situations viables dans les classes ordinaires et permettant de travailler séparément chacune des fonctions des instruments en liaison avec les propriétés géométriques qu'elles portent.

3) L'équipe ERMEL a publié en 2006 un gros document présentant des « propositions d'enseignement expérimentées privilégiant la construction des savoirs sur les relations et les objets géométriques à travers des situations de résolution de problèmes, la prise en compte des connaissances spatiales et géométriques des élèves, l'apprentissage progressif du vocabulaire, de l'usage des instruments, et des méthodes de validation ».

Cette liste n'est pas exhaustive bien sûr. De plus, d'autres travaux se développent actuellement autour du rôle des représentations langagières, de la schématisation, et de l'argumentation qui devraient permettre de mieux comprendre les phénomènes liés à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au début du collège (Mathé 2004), Mathé (2006), Gobert (2005)).

D) « Forcer le passage » au modèle géométrique en Sixième ?

Ce titre est un peu polémique mais je vais essayer de le justifier.

Les multiples recherches qui ont étudié depuis 40 ans les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques montrent toutes à quel point le raisonnement mathématique est différent du raisonnement usuel, celui que nous utilisons nous aussi hors notre discipline favorite. Dans le cas de la géométrie, de plus, la construction des objets sur lesquels porte ce raisonnement est lente et difficile, comme j'ai essayé de le montrer.

Pour les élèves qui arrivent en Sixième, les concepts géométriques caractérisent des propriétés d'objets matériels, la notion de « figure géométrique » au sens mathématique, n'est pas encore construite. Pour caractériser l'évolution des connaissances géométriques enseignées à l'école primaire, certains auteurs parlent de « géométrie instrumentée », succédant à une « géométrie perceptive », rencontrée au début du cycle 2. Cette géométrie instrumentée constitue encore l'essentiel du travail proposé en Sixième et doit permettre d'introduire, par le même type de démarche, de nouveaux concepts et de nouveaux instruments. C'est pourquoi, les professeurs de mathématiques de Sixième, comme les professeurs des écoles de CM2, ont des exigences précises au niveau de la qualité des « figures-dessins » et de la manipulation des instruments. C'est le travail réalisé pendant les deux premières années du collège qui doit conduire à construire cette notion de « figure géométrique » pour qu'en Quatrième la résolution de « problèmes géométriques » au sens des mathématiques puisse être entreprise.

La plupart des manuels laissent penser qu'il est possible d'accélérer ce processus en enseignant des « règles » de lecture des « figures-dessins », qui n'ont de sens que si celles-ci représentent des « figures géométriques », ou en travaillant directement sur des « figures à main levée », censées évoquer ces « figures géométriques », comme c'est le cas pour les « experts » en géométrie. Ce type d'enseignement ne peut, il me semble, que conduire à un dressage, source de profonds malentendus sur ce que sont les mathématiques et allonger encore le temps nécessaire à l'apprentissage.

La « règle » enseignée aux élèves dès le début de la Sixième, c'est qu'en mathématiques, **on n'a pas le droit** de prendre une information sur une « figure-dessin » avec un instrument. Quel que soit le problème, une propriété d'une « figure-dessin » ne peut être considérée comme vraie que si elle a été énoncée dans un texte ou codée sur la figure. Cette règle, qui ne pourra être justifiée que lorsque les élèves en auront compris la portée, est directement en contradiction :

– avec tous les efforts réalisés en primaire et dans une partie du programme de Sixième pour asseoir la géométrie instrumentée ;

– avec une bonne partie des pratiques d'enseignement : comment établit-on le fait que l'on ne puisse pas construire un triangle dont les côtés ont pour longueur 3, 6 et 12 cm sinon en essayant de réaliser une « figure-dessin », non récusée par le professeur ? Et cette règle est en contradiction, bien sûr, avec l'usage de la géométrie en dehors de l'école.

E) Des pistes possibles pour introduire les élèves au raisonnement géométrique, en relation avec la résolution de problèmes spatiaux :

J'en signalerai deux :

– La première est basée sur l'idée que le raisonnement déductif en géométrie peut être introduit pour résoudre des problèmes spatiaux. Je renvoie le lecteur à l'article de Plot (Salin 2006) où je fournis trois exemples de tels problèmes, portant sur des objets matériels « géométriques ». Ce qui caractérise ces exemples, c'est que, en raison de l'absence de l'objet matériel à propos duquel on s'interroge, le raisonnement prend du sens et permet de prévoir de nouvelles propriétés(4). Il ne s'agit pas encore

(4) Ce type de démarche suppose bien sûr que le professeur parle avec ses élèves des rapports des mathématiques avec le réel.

de problème de géométrie, au sens strict, mais on peut espérer que cette approche, qui relie anticipation spatiale et raisonnement, peut aider les élèves à comprendre le pouvoir de ce dernier, à condition d’aller jusqu’au bout, c’est-à-dire jusqu’à la vérification matérielle, qui permet, en particulier, de s’interroger à nouveau quand elle dément les prévisions. Je ne sous-estime pas les problèmes liés à cette vérification matérielle dus aux erreurs de tracés et de mesurage, mais ces problèmes sont incontournables, ils sont rencontrés par tous les utilisateurs de la géométrie dans la résolution de problèmes spatiaux. Doivent-ils être exclus de l’enseignement des mathématiques ?

– La deuxième piste, beaucoup plus élaborée, a été expérimentée par les équipes INRP collège ; cette démarche est ainsi présentée dans Pressiat (2001) : « Nous avons considéré des problèmes géométriques dont on puisse organiser l’étude et la résolution dans une succession de milieux différents. L’ordre dans cette succession est choisi de manière à amener l’élève à passer de la problématique pratique à la problématique géométrique, et à prendre conscience des différences de modes de validation légitimes dans le cadre de chacune d’elles. Plus précisément, c’est en demandant aux élèves de trouver une justification des techniques qui soit indépendante du milieu matériel que nous comptons faire émerger le besoin de géométrie théorique. En d’autres termes, c’est en cherchant à mieux comprendre pourquoi des techniques (différentes selon les milieux) donnent bien le résultat qu’elles sont censées produire que l’on est amené à identifier ou créer l’objet géométrique (ou les propriétés de cet objet) sur lesquels toutes ces techniques, pourtant différentes dans leurs mises en œuvre pratiques, sont fondées » (Pressiat et Combier 2003).

F) Conclusion

Nous savons encore trop peu de choses sur l’appropriation du savoir géométrique par les élèves, de façon à ce qu’il devienne pour eux véritablement opératoire dans les diverses situations où il doit être mobilisé. Il faut certainement inventer de nouvelles manières de l’enseigner, mais il est sûr que si l’enseignement français maintient la même ambition pour la scolarité obligatoire, le temps nécessaire à la réaliser ne peut qu’augmenter !

III) Enseigner la géométrie à l’école primaire : des rapports au temps exigeants

Dans cette dernière partie, je n’aborderai pas l’enseignement en Sixième et je ne développerai pas les différentes parties, mais il me paraît important que les enseignants du second degré, qui constituent l’essentiel des membres de l’APMEP, sachent que cet enseignement pose des questions particulièrement difficiles pour leurs collègues des écoles, qui n’ont pas la même formation mathématique qu’eux.

A) Les responsabilités principales de l’enseignant

En voici une description sommaire :

– Choisir et planifier les thèmes d’enseignement en tenant compte des programmes et du temps dont il dispose « légalement ».

- Pour un thème donné, préparer les situations à mettre en œuvre dans la classe.
- Au cours d'une séquence d'enseignement, contrôler l'avancée du temps didactique, c'est-à-dire trouver les moyens nécessaires à ce que les élèves progressent dans leurs apprentissages.
- Évaluer les acquisitions des élèves, en tenir compte pour la suite.

Cette description qui découpe le travail du professeur en étapes successives ne représente pas bien la complexité effective de ses tâches, liées au fait que celles-ci sont intriquées les unes dans les autres. Cette remarque est valable pour tous les domaines des mathématiques. Mais il y a des particularités pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, dont je vais fournir quelques exemples sous forme de questions que se posent les maîtres, et qui montrent sa complexité.

B) La planification de l'enseignement

Le programme de l'école primaire est fixé par cycles de 3 ans. C'est-à-dire que c'est à l'âge où les élèves changent le plus vite que les programmes sont les moins précis. Comment découper des morceaux signifiants pour chacune des années ? Par quoi commencer ? Que faut-il reprendre l'année suivante ?

– Les compétences sont fixées pour la fin du cycle. Que doivent savoir ou savoir-faire les élèves à la fin de la première année ?

– Peut-on enseigner la géométrie par tranches d'une heure par semaine, comme c'était le cas autrefois et encore maintenant dans beaucoup de classes ?

– Quand on vise des connaissances complexes, articulées les unes avec les autres, est-ce efficace de découper ainsi l'enseignement ?

L'exemple du cycle 3

Le programme est ainsi libellé :

« *Les connaissances relatives à l'espace et à la géométrie concernent :*
– les relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment,
– l'utilisation d'instruments (règle, équerre, compas) et de techniques (pliage, calque, papier quadrillé),
– les figures planes (en particulier : triangle et ses cas particuliers, carré, rectangle, losange, cercle) : reconnaissance, reproduction, construction, description, décomposition d'une figure en figures plus simples ».

Il est bien évident qu'il ne s'agit pas de traiter ces thèmes les uns après les autres ! Mais comment les articuler ? Consulter la liste des compétences peut apporter quelques éléments ; toutefois cette liste décrit des tâches relativement élémentaires que doivent savoir faire les élèves sans les relier nécessairement aux situations qui leur donnent du sens. L'erreur serait de travailler chaque compétence indépendamment l'une de l'autre. Prenons l'exemple du rectangle : faut-il l'étudier chaque année depuis le cours préparatoire, quelles sont les propriétés les plus importantes à dégager, faut-il enseigner aux élèves qu'un carré est un rectangle particulier, si oui, quand ? Etc.

Le savoir mathématique est un élément majeur qui peut guider les enseignants d'un même cycle à faire des choix ; or la géométrie est le domaine dans lequel ils se sentent le moins à l'aise, étant donné que très peu d'enseignants actuels ont une formation dans ce domaine. Mais même une bonne connaissance de la géométrie euclidienne n'est pas suffisante. Comme je l'ai dit, la géométrie est très présente dans la culture commune, avec les mêmes termes et des significations voisines, mais différentes. Toute une réflexion est nécessaire pour pouvoir aider les élèves à différencier ce qui relève des connaissances usuelles et ce qui relève des mathématiques. Il n'est donc pas étonnant que dans certaines écoles, d'année en année, les élèves rencontrent les mêmes savoirs, traités sous la même forme, ou que certaines tâches proposées dépassent largement ce dont ils sont capables ou que certains professeurs abordent très peu ce domaine d'enseignement.

C) La préparation des séances

Même pour un enseignant qui est au clair sur les objectifs et les moyens d'enseignement préconisés par les programmes, la tâche de préparation est compliquée. Il faut fabriquer ou réunir le matériel, prévoir les consignes, essayer d'anticiper les comportements possibles des élèves afin de pouvoir s'y adapter, articuler convenablement les moments d'institutionnalisation et réfléchir aux formulations accessibles aux élèves. Beaucoup de manuels sous-estiment les difficultés des élèves dans leurs relations au milieu matériel, ne serait-ce que classique (papier, crayon, instruments), et laissent à la charge des maîtres l'élaboration des formulations.

D) La gestion du temps durant une séance

Elle se heurte à plusieurs difficultés, par exemple :
– l'hétérogénéité des connaissances spatiales et des compétences manuelles des élèves,
– la sensibilité des situations à de petites variations matérielles,
– la complexité des validations.

Je ne vais développer rapidement que ce dernier point. L'une des raisons de cette complexité est que les productions des élèves peuvent être matériellement erronées alors que la stratégie a été correcte. En effet, le rapport au réel est source d'ambiguïtés. Par exemple, même exécutée par un adulte, la reproduction d'une figure ne se superpose pas exactement au modèle. Des erreurs interviennent, liées non nécessairement à la conceptualisation mais à l'imprécision des mesures ou des instruments (ou à un défaut dans leur maniement). Ce phénomène d'imprécision, fondamental, est constitutif des rapports entre la géométrie et la réalité qu'elle permet de décrire. Les objectifs du programme sont tels que les élèves y sont confrontés assez tôt. L'enseignant doit donc accepter une marge de tolérance, discutée avec eux et les aider à distinguer si un résultat incorrect est dû à une erreur de stratégie : non respect de toutes les propriétés de l'objet ou mauvaise organisation des étapes, à l'imprécision des mesures ou à une utilisation maladroite des instruments. Or toute démarche qui associe ainsi les élèves à l'évaluation de leurs productions réclame du temps !

Conclusion

Le panorama que je viens de tracer rapidement peut sembler décourageant : j'ai en effet insisté davantage sur la complexité de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et au tout début du collège que sur l'intérêt qu'il peut susciter chez les élèves comme chez les professeurs. C'est pourtant cet intérêt que j'ai observé, aussi bien dans les stages de formation continue des enseignants du premier degré que dans les classes du primaire et dans celles de SEGPA, que je fréquente actuellement. Quand l'enseignement de la géométrie fournit des outils pour avoir prise sur le réel, il peut devenir passionnant pour tous. Une condition nécessaire pour cela (mais non suffisante) est de laisser du temps au temps !

Références bibliographiques

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n° 56 IREM de Grenoble.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (2003). Le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. Analyse critique de démarches préconisées actuellement dans les instructions officielles et dans les manuels. Des propositions alternatives à étudier. *Actes du Colloque inter-IREM 1er cycle juin 2001*, IREM de Montpellier.

BERTHELOT R., SALIN M.H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, in Salin, Clanché, Sarrazy, éds. *Sur la théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage Grenoble.

BLOCH I., SALIN M.H. (2004). Espace et géométrie : Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège, *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2000*, IREM de Marseille.

BROUSSEAU G. (1983). Études de questions d'enseignement, un exemple, la géométrie, in *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier Grenoble.

DUVAL R., GODIN M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* n° 76, IREM de Grenoble.

ERMEL (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*, Hatier.

GOBERT S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, Thèse, Université Paris VII.

GOBERT S. (2005). Quelles formulations pour les savoirs de géométrie à l'école élémentaire ? *Grand N* n° 76, IREM de Grenoble.

KESKESSA B., PERRIN-GLORIAN M.J., DELPLACE J.R. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N* n° 79, IREM de Grenoble.

MATHÉ A.C. (2004). Analyse d'une situation d'argumentation en géométrie des solides en classe de CM1-CM2, *Grand N* n° 74, IREM de Grenoble.

MATHÉ A.C. (2006). *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3 (Analyse de la portée des jeux de langage dans un Atelier de géométrie en cycle 3 et modélisation des gestes de l'enseignant en situation)*, Thèse, Université Lyon 1.

Suite page 684

MAURIN C. (2001). La feuille de papier comme laboratoire d'expérimentation graphique in : Commission inter-IREM premier cycle et Commission Permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire (COPIRELEM) *Articulation école–collège : des activités géométriques*, IREM Paris 7.

PRESSIAT A., COMBIER G. (2003). Apprentissage géométrique au début du collège, *Actes du Colloque inter-IREM 1er cycle juin 2001*, IREM de Montpellier.

SALIN M.H.(2004). L'enseignement de la géométrie au cycle 3 : objectifs, contenus, articulation avec la sixième, *Journées de Pau, Bulletin APMEP* n° 454.

SALIN M.H. (2006) Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie), *PLOT* n° 14.