

La stabilité en géométrie

Roger Cuppens(*)

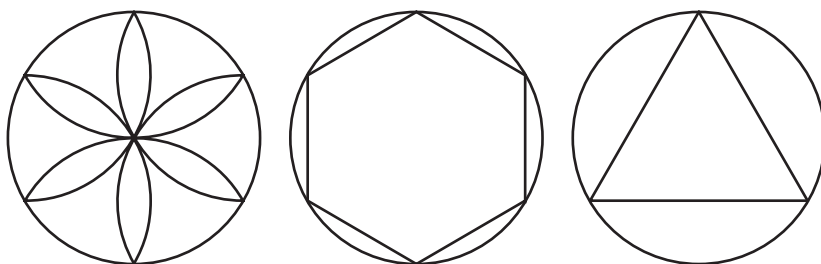
À George Pólya⁽¹⁾

Dans cet article, j'étudie le rôle des dessins dans l'élaboration de la géométrie euclidienne. Ce rôle et le fait que cette géométrie ait des applications dans la vie courante implique l'idée d'une stabilité des théorèmes géométriques : si on démontre que des hypothèses entraînent toujours une conclusion, alors on peut penser qu'en modifiant peu les hypothèses, la conclusion est elle-même peu modifiée. Ayant constaté que l'étude de ce phénomène est absente de la littérature usuelle⁽²⁾, je me propose de combler cette lacune. J'étudierai aussi quelques conséquences pour les logiciels de géométrie dynamique.

1. La géométrie : l'art de raisonner juste sur des figures fausses⁽³⁾

C'est ainsi que dans ma jeunesse on définissait la géométrie. Mais qu'est-ce qui pouvait bien justifier cette formule ?

On commençait par des observations du monde réel avec ses objets familiers : cubes, boules, ... On pouvait aussi sur une feuille de papier faire des dessins à la règle et au compas, par exemple une fleur à six pétales et dégager à partir de là les notions de cercle, d'hexagone régulier, de triangle équilatéral, ...



On étudiait les divers quadrilatères... Etc.

(*) Professeur émérite à l'Université Paul Sabatier. Groupe Géométrie dynamique de l'IREM de Toulouse.

(1) Dans les années 70, George Pólya avait entrepris, à près de 85 ans, une croisade contre la réforme des mathématiques modernes. J'ai ainsi assisté à la Catholic University of America à une série de conférences qu'il donnait sur ce sujet. Sa conclusion était que seul l'enseignement de la géométrie euclidienne tel que je l'avais subi dans ma jeunesse permettait une vraie initiation aux mathématiques. À l'époque, jeune professeur, je n'avais pas été convaincu par ses affirmations. Depuis et avec le recul, je suis intimement persuadé qu'il avait raison.

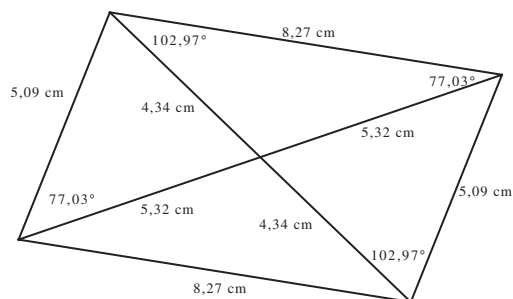
(2) Signalons toutefois l'exercice 1 des Olympiades de Première 2007 de l'Académie de Versailles (brochure APMEP n° 182, p. 194-195).

(3) Une première version de ce paragraphe écrite comme réaction à une lecture de [9] est parue dans le numéro 2 de l'Autan, nouveau journal de l'IREM de Toulouse.

L'une des difficultés de l'enseignement consistait alors à passer de ce monde réel à un monde virtuel peuplé d'objets de base : points, droites et cercles (si on fait de la géométrie plane) auxquels on ajoute les plans, les sphères, ... (si on fait de la géométrie dans l'espace).

On commençait par la géométrie plane en introduisant à la Euclide les *points* (« objets sans dimension ») et les *droites* (« objets à une dimension ») reliés par des propriétés appelées *axiomes* ou *postulats* telles que : « *Par deux points passe une droite et une seule* » (cf. l'introduction de [4]).

À partir de ces objets de base, on définissait des objets plus compliqués tels que *cercles*, *triangles*, ..., des propriétés telles que *perpendicularité*, *parallélisme*, ... et on étudiait des problèmes où on partait d'une *figure* composée d'un certain nombre d'objets reliés par certaines propriétés et où on cherchait à découvrir et à démontrer de nouvelles propriétés de la figure. Par exemple, on définissait une figure⁽⁴⁾ appelée *parallélogramme* et on trouvait des longueurs égales, des angles égaux, le fait que les diagonales se coupent en leur milieu, etc.

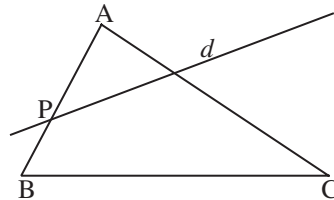


Pour les démonstrations, on utilisait au début la notion de *triangles égaux* (c'est-à-dire superposables dans un mouvement sans déformation, notion forcément intuitive) et on « démontrait » (par superposition virtuelle) les trois cas d'égalité des triangles qui servaient pendant longtemps comme seuls outils de démonstration (en interdisant le recours aux superpositions). Cette interdiction était une source de grande difficulté, mais on aurait pu la contourner en admettant les cas d'égalité comme axiomes de la théorie, la superposition étant alors une justification plutôt qu'une démonstration. Mais la réforme des mathématiques est arrivée ... avec les conséquences que l'on connaît sur l'enseignement de la géométrie.

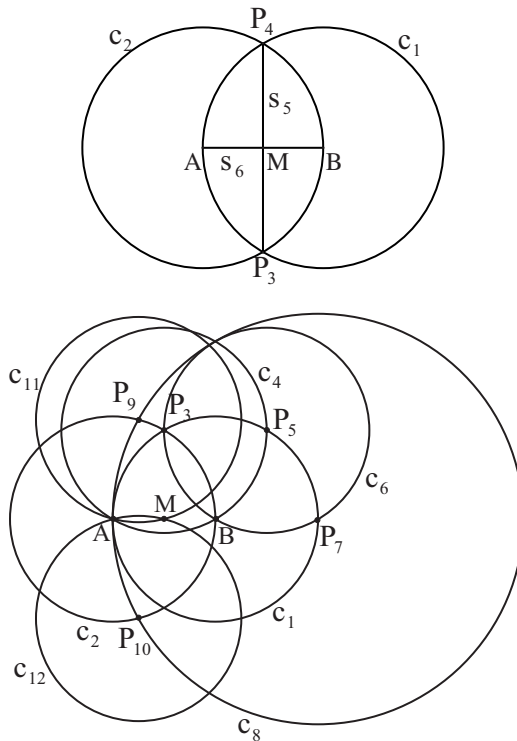
Durant cette période, Choquet a fourni dans [2] une axiomatique simple et complète de cette géométrie avec une vingtaine d'axiomes, ce qui rend un tel système impropre à une initiation. Ceci explique qu'avant la réforme on utilisait une axiomatique incomplète, des dessins rendant évidents certains faits. Par exemple, on

(4) Les travaux de didactique ont employé le mot *figure* pour les ensembles d'objets du monde virtuel et *dessin* pour une représentation de cette figure dans le monde réel, alors que précédemment l'on employait le mot *figure* pour de tels dessins : il faudrait en conséquence modifier le titre de ce paragraphe.

admettait avec un dessin qu'une droite coupant un côté d'un triangle doit recouper un deuxième côté, ce qui semble évident sur le dessin ci-dessous, mais nécessite un axiome dans une théorie formalisée⁽⁵⁾.



On utilisait en général divers *dessins* suivant les outils utilisés (*main levée*, ...), les plus sophistiqués étant les constructions à la règle et au compas qui apportaient si on y mettait un peu de soin une assez bonne précision au moins pour les figures simples telles que celles de l'hexagone régulier. Par exemple, on a ci-dessous des constructions du milieu M de deux points A et B à la règle et au compas d'une part et au compas seul d'autre part⁽⁶⁾.



(5) Cet axiome appelé *axiome de Pasch* en géométrie euclidienne doit être considéré comme la définition d'un « vrai » triangle en géométrie elliptique (cf. [4]).

(6) Rappelons que Mascheroni [8] a montré que toute construction à la règle et au compas peut être effectuée au compas seul, résultat qui avait été obtenu précédemment par Georg Mohr, mais était passé inaperçu.

Pour les figures plus compliquées, la chose était moins évidente et l'on sait que Lemoine [7] a développé sous le nom de *géomégraphie* une étude de la complexité et de la précision des dessins géométriques.

Néanmoins on pouvait à un moment donné faire douter du sérieux d'un tel usage en fournissant par exemple un dessin « montrant » qu'un triangle quelconque est toujours isocèle (cf. [1], p. 146), ce qui surprend à première vue (même des professeurs en exercice) alors que la solution logique est simple : un tel dessin ne correspond pas à une figure mathématique.

Depuis cette époque où on apprenait à développer la géométrie comme une théorie mathématique et à résoudre à partir des cas d'égalité des triangles des problèmes géométriques, est intervenue une *double révolution* : celle (interne) des *mathématiques modernes* qui a bouleversé l'enseignement des mathématiques et celle (externe) des TICE et en particulier des *logiciels de géométrie dynamique*.

Je ne parlerai pas ici de la première – d'autres l'ont fait avant moi et bien mieux que je ne pourrais le faire. Je veux simplement dans la suite fournir quelques éléments de réflexion concernant les logiciels de géométrie dynamique et qui me semblent nécessaires après la lecture de [9].

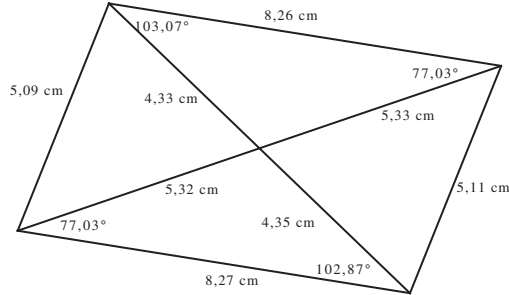
Une première chose qui saute aux yeux quand on utilise un tel logiciel est la grande précision des dessins obtenus. Mais il est faux de prétendre comme [9] qu'un logiciel comme Cabri fournit des dessins exacts. En effet, quand on entre à l'écran des points, des droites, des cercles, ..., Cabri les transforme – de manière entièrement transparente à l'utilisateur – en équations et les calculs qu'il effectue sont des calculs approchés (avec une précision grande, mais limitée, disons de l'ordre de 10^{-9} cm) et ces calculs fournissent à l'écran un dessin dont la précision est encore diminuée par la taille des pixels utilisés. Bien que sans commune mesure avec les dessins papier/crayon, cette précision est forcément limitée et peut fournir dans certains cas des dessins difficilement interprétables, voire totalement faux⁽⁷⁾.

Prétendre le contraire est regrettable pour deux raisons. La première est que l'une des tâches d'un enseignement moderne doit être de mettre en garde contre l'opinion commune qu'un ordinateur fournit toujours la vérité, même si ce que l'on y entre est faux !

La deuxième est plus directement liée à la nature de la géométrie : née du monde réel, elle est utilisée dans le monde réel. Par exemple, un maçon évaluera « l'équerre » d'un mur en utilisant une corde à nœuds pour trouver (3,4,5). Il est évident que ces valeurs sont approchées, mais ceci n'a pas d'importance car le théorème de Pythagore permettant d'affirmer qu'un triangle (3,4,5) est rectangle a une certaine « *stabilité* » : un triangle « *presque* » (3,4,5) est « *presque* » rectangle. Ce fait, pourtant fondamental, est rarement enseigné dans les cours de géométrie. De même, un menuisier ou un tailleur de pierre aura besoin de tracer des droites « *presque* » parallèles. Au lieu de vouloir obtenir à tout prix des dessins « exacts » comme le souhaite [9] (au fait, pourquoi faire ?), ne ferait-on pas mieux, après avoir

(7) Le lecteur intéressé pourra trouver des expériences permettant d'étudier la précision de Cabri dans le chapitre 7 de [5].

étudié le parallélogramme (qu'il est quand même facile de dessiner lorsqu'on a un outil « Droite parallèle » !) de faire réfléchir sur le dessin suivant (obtenu en faisant tourner de $0,1^\circ$ deux des côtés du parallélogramme de la page 2) :



et plus généralement d'apprendre à conjecturer à partir de valeurs approchées obtenues sur des dessins inexacts des valeurs exactes dans le monde virtuel de la géométrie ?

2. Quelques théorèmes de stabilité

Dans le paragraphe précédent, j'ai étudié l'intérêt des dessins en géométrie et suggéré que cet intérêt était subordonné à l'existence d'une *stabilité* des théorèmes géométriques : la véracité d'un théorème du type « si H, alors C » ne peut être vérifiée sur un dessin (forcément entaché d'erreurs) que si un théorème « de stabilité » du type « si “ presque ” H, alors “ presque ” C » est vrai.

Je me propose dans ce paragraphe de démontrer quelques théorèmes de ce type.

2.1. Définitions

Il me faut commencer par préciser le « presque » employé. Les propriétés concernées sont des propriétés mesurables et le « presque » est donc numérique. Par exemple, dire qu'un triangle ABC est rectangle en A signifie

$$\hat{A} = \frac{\pi}{2}$$

(si les angles sont mesurés en radians). Je dirai qu'un triangle ABC est *presque rectangle* en A si

$$\hat{A} \approx \frac{\pi}{2}$$

(lire \hat{A} est presque égal $\frac{\pi}{2}$) ou

$$\hat{A} - \frac{\pi}{2} \approx 0,$$

c'est-à-dire

$$\left| \widehat{A} - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon,$$

ε représentant l'erreur admise. On emploiera alors la notation plus précise

$$\widehat{A} \simeq_{\varepsilon} \frac{\pi}{2}$$

pour cette dernière situation.

Remarque. Il est évident que cette relation \simeq_{ε} n'est pas transitive, mais que l'on a néanmoins le résultat suivant :

Si $a \simeq_{\varepsilon} b$ et $b \simeq_{\varepsilon'} c$, alors $a \simeq_{\varepsilon+\varepsilon'} c$.

Je vais commencer par étudier la *stabilité du théorème de Pythagore* : si un triangle ABC est rectangle en A, alors

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(avec les notations usuelles) dont une « version stable » serait : si un triangle ABC est presque rectangle en A, alors

$$a^2 \simeq b^2 + c^2,$$

mais quel sens donner à un tel théorème ?

Une réponse est donnée par le *théorème d'Al-Kashi* : si ABC est un triangle quelconque, alors

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$$

D'où

$$\left| a^2 - b^2 - c^2 \right| < \varepsilon$$

dès que

$$2bc \left| \cos \widehat{A} \right| < \varepsilon$$

et la continuité du cosinus me permet d'affirmer l'existence d'un r tel que

$$\left| \widehat{A} - \frac{\pi}{2} \right| < r$$

entraîne l'inégalité précédente.

On a donc finalement le résultat suivant : se donnant ε positif, il existe r tel que si $\widehat{A} \simeq_r \frac{\pi}{2}$, alors $a^2 \simeq_{\varepsilon} b^2 + c^2$.

Si on introduit la définition suivante : un théorème du type

$$(H_1 = h_1) \wedge \dots \wedge (H_p = h_p) \Rightarrow (C_1 = c_1) \wedge \dots \wedge (C_q = c_q)$$

(où les h_j et les c_k sont des nombres et les H_j et C_k des expressions numériques) est *stable* si se donnant q constantes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$, il existe p constantes r_1, \dots, r_p telles que

$$\left(H_1 \approx_{r_1} h_1\right) \wedge \dots \wedge \left(H_p \approx_{r_p} h_p\right) \Rightarrow \left(C_1 \approx_{\varepsilon_1} c_1\right) \wedge \dots \wedge \left(C_q \approx_{\varepsilon_q} c_q\right),$$

on peut donc dire que *le théorème de Pythagore est stable*.

Ceci a lieu en particulier lorsque les C_k sont des fonctions continues de (H_1, \dots, H_p) au point (h_1, \dots, h_p) . Par exemple, le théorème d'Al-Kashi fournit la relation

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

qui montre la *stabilité de la réciproque du théorème de Pythagore*.

Remarques. 1. En toute rigueur, il faut ajouter la condition que le produit bc n'est pas trop petit.

2. Avec cette même méthode, on peut déduire la *stabilité du théorème sur le triangle isocèle* :

Dans un triangle ABC, $b = c$ si et seulement si $\hat{B} = \hat{C}$.

et avec ce résultat, on peut démontrer la *stabilité du théorème sur la médiane du triangle rectangle* sous la forme suivante :

Un triangle ABC est presque rectangle si et seulement si il existe un point M de [BC] tel que $AM \approx BM$ et $AM \approx CM$.

2.2. Stabilité des cas d'égalité des triangles

Comme je l'ai rappelé dans le paragraphe précédent, les *trois cas d'égalité des triangles* jouaient dans mon enfance un rôle fondamental dans l'enseignement de la géométrie plane (on parlerait actuellement d'« *axiomes* »). On peut les énoncer à partir de la définition suivante :

Deux triangles ABC et A'B'C' sont *égaux* si les six conditions suivantes sont vérifiées :

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

Les trois cas d'égalité consistent à affirmer que si l'on choisit convenablement trois de ces conditions :

- $a = a', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$ (premier cas),
- $b = b', c = c', \hat{A} = \hat{A}'$ (deuxième cas),
- $a = a', b = b', c = c'$ (troisième cas),

les trois autres s'en déduisent.

Pour comprendre ces trois cas (je ne dis pas démontrer car les résultats que je vais invoquer se démontrent en utilisant de manière directe ou indirecte les cas d'égalité), il suffit d'avoir des formules permettant de calculer les six éléments (côtés ou angles) d'un triangle ABC en fonction de trois d'entre eux. Pour ceci, on a la formule d'Al-Kashi déjà invoquée :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

que l'on peut utiliser de deux manières :

- si on connaît les trois côtés a , b et c , elle permet de calculer $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$ et $\cos \hat{C}$:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

et donc les trois angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} (*troisième cas*) ;

- si on connaît b , c et \hat{A} , elle permet de calculer a , puis \hat{B} et \hat{C} (*deuxième cas*).
Pour le premier cas, on peut utiliser une autre formule classique, la *formule des sinus* :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

Si on connaît a , \hat{B} et \hat{C} , alors

$$\hat{A} = \pi - \hat{B} - \hat{C}$$

et donc

$$\sin \hat{A} = \sin(\hat{B} + \hat{C}),$$

ce qui avec la formule des sinus donne

$$b = a \frac{\sin \hat{B}}{\sin(\hat{B} + \hat{C})}, \quad c = a \frac{\sin \hat{C}}{\sin(\hat{B} + \hat{C})},$$

et donc le *premier cas d'égalité*.

Puisque les formules précédentes sont toutes continues, on a donc le résultat suivant :

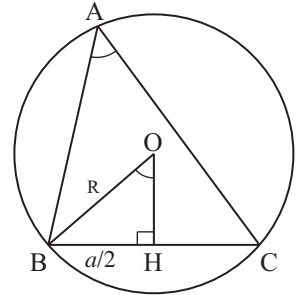
Théorème. *Les trois cas d'égalité des triangles sont stables.*

Remarques. 1. On peut montrer que la formule des sinus est équivalente à celle d'Al Kashi dans le sens que si on démontre géométriquement l'une, l'autre peut s'en déduire par un calcul trigonométrique simple.

2. On peut déduire la formule des sinus de la formule

$$\frac{a}{2} = R \sin \hat{A}$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC , que l'on peut démontrer en considérant le triangle OBH dans la figure ci-contre. De cette formule, on déduit immédiatement que *les rayons des cercles circonscrits à deux triangles presque égaux sont presque égaux*.



On peut aussi montrer que

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

où S est l'aire du triangle ABC . De cette relation, on déduit immédiatement que *les aires de deux triangles presque égaux sont presque égales*.

3. Avec ce résultat, on obtient la stabilité de tous les résultats de géométrie euclidienne pouvant se démontrer avec les cas d'égalité. Reste parfois des difficultés de définition, par exemple que seront des droites « *presque parallèles* » ?

4. Ce résultat est encore vrai pour les quatre⁽⁸⁾ cas d'égalité de la géométrie hyperbolique ou de la géométrie elliptique. Pour le voir, il suffit de remplacer la formule d'Al Kashi et la formule des sinus par

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos \hat{A} = \frac{\cos \hat{B}\cos \hat{C} + \cos \hat{A}}{\sin \hat{B}\sin \hat{C}}$$

et

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sinh(a)} = \frac{\sin \hat{B}}{\sinh(b)} = \frac{\sin \hat{C}}{\sinh(c)}$$

pour la géométrie hyperbolique (cf. [4], p. 68) et par

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c)\cos \hat{A} = \frac{\cos \hat{B}\cos \hat{C} + \cos \hat{A}}{\sin \hat{B}\sin \hat{C}}$$

et

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin(a)} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin(b)} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin(c)}$$

pour la géométrie elliptique (cf. [4], p. 185).

(8) En géométrie hyperbolique ou elliptique, le quatrième cas consiste à affirmer que *deux triangles sont égaux si leurs trois angles sont égaux deux à deux*.

2.3. Droites presque parallèles

Pour définir le presque parallélisme, on va utiliser une caractérisation numérique du parallélisme. Pour ceci, je définis l'angle \widehat{uv} de deux droites u et v comme étant l'angle (usuel) des droites u' et v' parallèles à u et v et passant par un même point.

Deux droites u et v sont alors parallèles (ou confondues) si et seulement si $\widehat{uv} = 0$. En accord avec ce qui précède, *deux droites u et v sont presque parallèles si et seulement si leur angle \widehat{uv} est petit.*

Puisque $\widehat{uv} < \varepsilon$ et $\widehat{vw} < \varepsilon'$ impliquent $\widehat{uw} < \varepsilon + \varepsilon'$, on obtient immédiatement la stabilité de la relation de parallélisme.

On en déduit que si u et v sont presque parallèles et si u et w ne sont pas presque parallèles, alors v et w ne sont pas presque parallèles.

Soit ABC un triangle. Il est évident que les droites (AB) et (AC) sont presque parallèles si et seulement si $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} \approx \pi$.

On en déduit la stabilité du théorème :

Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

et de sa réciproque :

Si u et v sont parallèles et si w est perpendiculaire à u , alors w est perpendiculaire à v .

Ajoutons la remarque suivante qui correspond bien à l'intuition que deux droites parallèles ont un point commun à l'infini : si ABC est un triangle tel que (AB) et (AC) soient presque parallèles et si BC n'est pas petit, alors la formule des sinus implique que AB et AC sont très grands.

2.4. Presque parallélogramme

Un quadrilatère ABCD est un *presque parallélogramme* si les droites (AB) et (CD) d'une part et (AD) et (BC) d'autre part sont presque parallèles.

De ce qui a été dit ci-dessus, on déduit immédiatement la stabilité des propriétés angulaires des parallélogrammes.

De même, les théorèmes

- *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont égaux,*
- *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu,*

sont stables puisqu'on peut les démontrer à l'aide des cas d'égalité des triangles.

2.5. Stabilité du théorème de Thalès

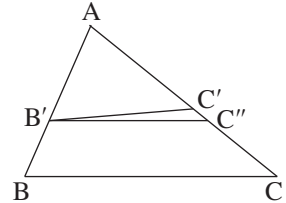
Soit ABC un triangle et B' et C' des points de (AB) et (AC) tels que (BC) et ($B'C'$) soient presque parallèles. Soit C'' le point d'intersection de la droite (AC) avec la droite passant par le point B' et parallèle à (BC). D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC''}$$

Mais les triangles $AB'C'$ et $AB'C''$ ont en commun le côté $[AB']$ et l'angle \widehat{A} . De plus $\widehat{AB'C'} \approx \widehat{AB'C''}$. De la stabilité du premier cas d'égalité, on déduit $AC'' \approx AC'$ et donc :

$$\frac{AB}{AB'} \approx \frac{AC}{AC'}$$

On a donc démontré la *stabilité du théorème de Thalès*.

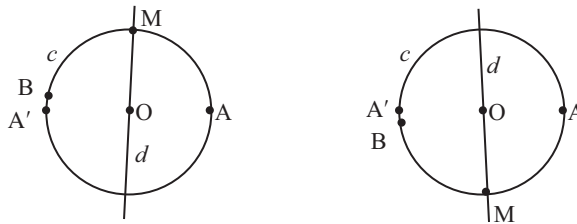


3. Stabilité et continuité

On a vu que la stabilité des théorèmes de géométrie résulte de la continuité de variation des différents éléments de la figure correspondante. On pourrait donc penser qu'il est facile de construire un logiciel de géométrie dynamique où les figures varient toujours continûment.

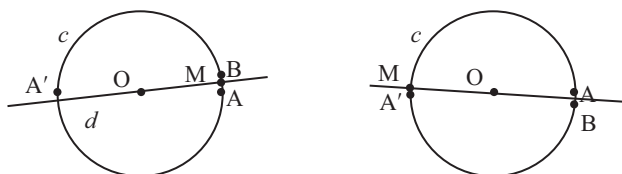
Or tous ceux qui ont utilisé un logiciel comme Cabri savent qu'il n'en est rien : *il existe des ruptures de continuité du déplacement*.

Un exemple simple consiste à prendre deux points A et B sur un cercle c de centre O et de déterminer l'un des points d'intersection M du cercle c avec la bissectrice b de l'angle \widehat{AOB} . On constate que le point M « saute d'un demi-tour » lorsque le point B traverse le symétrique A' du point A par rapport au point O.



Ce phénomène est (entre autres) étudié dans la thèse de Bernard Genevès [6]. Outre la continuité, les auteurs du logiciel Cabri ont souhaité un *déterminisme* dans la gestion des figures : *lorsque, après déplacement, les éléments de base définissant une figure reviennent à leur position initiale, toute la figure construite sur ces éléments doit revenir à sa position initiale*. Or déterminisme et continuité sont incompatibles comme le montre l'exemple précédent : si on suppose que le point B part du point A et se déplace continûment sur le cercle c toujours dans le même sens, après un tour complet le point M n'aura fait qu'un demi-tour et ne sera donc pas revenu à sa position initiale : il n'y aura pas déterminisme.

On ne peut donc pas avoir un logiciel totalement déterministe et totalement continu. Cabri qui a choisi l'option déterministe ne permet donc pas de construire un dessin continu du phénomène précédent à partir du cercle c et des points A et B comme objets initiaux. Mais la discontinuité dépendra de la manière dont M est défini : par exemple, si on définissait la droite d non comme la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} , mais comme la médiatrice de $[AB]$, la discontinuité se produirait lorsque le point B passe par le point A .



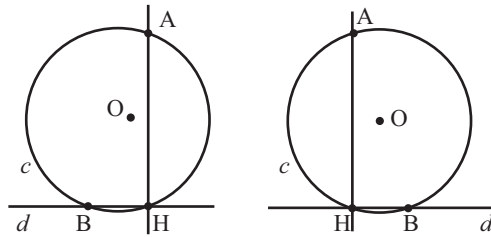
Remarques. 1. Dans la représentation plane des nombres complexes, l'exemple précédent correspond au problème de la définition de la racine carrée des nombres complexes : on sait que pour résoudre ce problème de manière complètement satisfaisante, on introduit classiquement les surfaces de Riemann. Cinderella est un logiciel de géométrie dynamique complètement continu basé sur de telles idées, mais il est évident qu'avec un tel logiciel la prévision des effets du déplacement des éléments de base d'une figure est plus difficile que dans Cabri. On peut trouver des renseignements supplémentaires sur Cinderella sur le site

<http://cinderella.de/tiki-index.php>

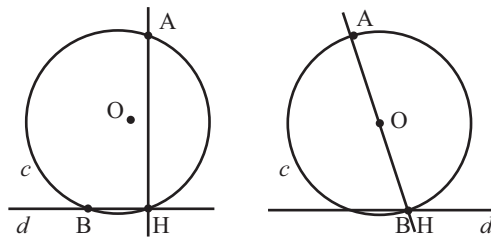
(ou en adressant à Google la requête « Cinderella »).

2. Dans les constructions à la règle et au compas, ces problèmes de discontinuité n'apparaissent dans Cabri que lorsque l'on fait jouer dans la figure un rôle dissymétrique aux deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle (ou de deux cercles) qui sont numérotés automatiquement : il faut considérer les droites de Cabri comme des axes orientés. Ces discontinuités – qui sont parfois difficiles à comprendre – peuvent être utilisées par exemple en géométrie booléenne (cf. [3], chapitre 10).

3. Un autre type de difficulté peut apparaître lorsque l'outil invoqué correspond à deux constructions différentes. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on veut construire dans Cabri la perpendiculaire à une droite donnée d passant par un point A situé en dehors de la droite d en utilisant la propriété de l'angle inscrit dans un demi-cercle : il suffit de prendre un point B sur la droite d et de déterminer le deuxième point d'intersection H de la droite d et du cercle c de diamètre $[AB]$. Si, dans Cabri, on définit le cercle c comme le cercle centré au milieu de $[AB]$ et passant par le point B , il n'y a aucun problème : la droite (AH) est perpendiculaire à la droite d quelle que soit la position du point B :



Mais si on définit le cercle c comme le cercle centré au point O et passant par le point A , la propriété ne résiste pas au déplacement du point B :



Le phénomène est simple à expliquer : dans le deuxième cas, Cabri crée deux points d'intersection qu'il numérote automatiquement et c'est l'utilisateur qui décide lequel est le point H cherché, mais lorsque le point B traverse le projeté du point A sur la droite d , il devient coïncident avec le point H et la figure n'est plus celle que l'on voulait. Par contre dans le premier cas, Cabri connaît le point B comme l'un des points d'intersection et il ne créera que le deuxième point d'intersection : la figure conviendra toujours.

4. On voit que tous ces phénomènes de discontinuité sont de fait liés à la manière dont le logiciel détermine et gère les points d'intersection d'une droite et d'un cercle, de deux cercles, etc. Pour savoir si les exemples que je viens de montrer sont traités de la même manière par d'autres logiciels, il n'y a qu'à regarder...

Conclusion

On voit que la notion de stabilité confirme les possibilités d'appliquer la géométrie euclidienne à la vie courante. On peut alors la considérer comme une science physique permettant de décrire des objets géométriques réels (cubes, sphères, cônes, ...), de les comparer, les mesurer, ... L'étude des transformations (translations, rotations, homothéties, ...) fournit en plus un cadre théorique pour étudier les déplacements (avec, éventuellement, modifications) de ces objets d'un lieu vers un autre sans tenir compte du trajet effectué. La cinématique permet d'ajouter la notion de trajectoire et d'étudier les vitesses et les accélérations. Tout ceci s'enseignait en mathématiques au lycée avant la réforme des mathématiques modernes. Les théories mathématiques fournissaient alors des exemples simples de ce que peut être une science physique avec ses origines, son développement et ses applications.

Mais, lors de la réforme des mathématiques modernes, les mathématiciens ont abandonné aux physiciens l'enseignement de la cinématique et, au lycée, on ne définit plus la vitesse moyenne d'un mobile comme le quotient de la distance parcourue par le temps de parcours. Oh, oui, Pólya avait raison !

Bibliographie

- [1] Michel CARRAL, *Géométrie*. Ellipses, 1995.
- [2] Gustave CHOQUET, *L'enseignement de la géométrie*. Hermann, 1964.
- [3] Roger CUPPENS, *Avec Cabri-Géomètre II, jouez ... et faites de la géométrie* (deux tomes). Brochures APMEP n°s 136 et 137, 2002-2003.
- [4] Roger CUPPENS, *Découvrir les géométries non euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Brochures APMEP n°s 160 et 161, 2004.
- [5] Jean-Jacques DAHAN, *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-géomètre en mathématiques. Un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problème de boîtes noires*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.
<http://www-iam.imag.fr/ThesesIAM/ThesejjDahan.pdf>
- [6] Bernard GENEVÈS. *Vers des spécifications formelles : fondements mathématiques et informatiques pour la géométrie dynamique*, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 21 décembre 2004.
- [7] Émile LEMOINE, *Géométopographie ou art des constructions géométriques*. Gauthier-Villars, 1902.
- [8] Lorenzo MASCHERONI. *Géométrie du compas*, 1798. Réédité par la Librairie Scientifique Blanchard en 1957.
- [9] Claude MATTIUSI. *Constructions logiques avec Cabri*. L'Autan, revue de l'IREM de Toulouse, n° 1 (mai 2007), p. 45-49.