La méthode de Tartaglia

Comment utiliser les volumes pour résoudre une équation du troisième degré

Nicole Bopp(*)

Résumé : Ce texte donne une description, utilisant le symbolisme algébrique, de la méthode géométrique expliquée en langage courant dans le roman *Le maître des nombres* publié en 1999 par D. Jörgensen et montre la figure permettant de comprendre cette méthode.

Introduction

La méthode décrite ici est extraite de l'excellent roman de Dieter Jörgensen ([5]) qui raconte la vie de Tartaglia (1499–1557). Dans ce roman on trouvera une description de la querelle entre celui-ci et Cardan, querelle dramatisée par l'organisation à l'époque de concours entre savants. L'auteur prend le parti de Tartaglia qui assurait avoir transmis à Cardan sous le sceau du secret sa méthode pour résoudre les équations du troisième degré de la forme $x^3 + px = q$ (voir par exemple [3] page 100–104). Dans le roman, l'auteur suggère que c'est une méthode géométrique généralisant la méthode du *gnomon* qui aurait permis à Tartaglia de résoudre son problème. Bien qu'aucun texte ne permette de confirmer cette hypothèse, l'utilisation d'une méthode géométrique pour obtenir un résultat général était naturelle pour les gens de cette époque. En effet ils ne disposaient pas encore du formalisme algébrique et le secret de Tartaglia aurait d'ailleurs été transmis sous la forme de vers (voir [4] page145).

Dans les abrégés d'histoire des mathématiques, on trouve généralement citée une méthode algébrique (voir par exemple [1], page 102). C'est pourquoi j'ai écrit ce texte pour donner une description, utilisant le symbolisme algébrique, de la méthode géométrique expliquée en langage courant dans le roman de Jörgensen et surtout pour montrer la figure permettant de la comprendre.

1. Équation de degré 2 et *gnomon*

1.1. La question posée

Il s'agit de résoudre le problème suivant posé en langage géométrique :

Un carré et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre donné.
Quel est le côté de ce carré ?

En utilisant le formalisme algébrique l'énoncé de ce problème s'écrit :

Des nombres b et c sont donnés. Trouver x tel que

$$x^2 + bx = c \qquad (1)$$

(*) IUFM d'Alsace. IRMA -Université Louis Pasteur Strasbourg. bopp@math.u-strasbg.fr

Vu l'énoncé du problème initial il est clair que b est un nombre entier. En tout cas on étudie ici le problème lorsque b et c sont des nombres positifs.

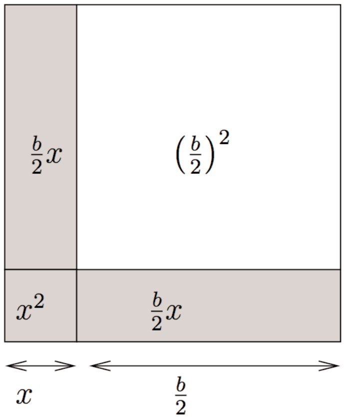
1.2. La résolution

La solution géométrique remonte à Al Khwarizmi (début du IX^e siècle).

On inscrit un petit carré de côté x dans un coin d'un grand carré de côté $x + \dfrac{b}{2}$ (c'est là que se trouve l'astuce !) comme dans la figure ci-dessous. La surface grisée (qui s'appelle un gnomon, voir [2], page 48 pour une explication de ce terme) est égale à :

$$x^2 + 2 \times \frac{b}{2} x,$$

donc égale à c, si $\boldsymbol{x}$ vérifie l'équation(1).



La surface non grisée est un carré de côté $\dfrac{b}{2}$. Par conséquent la surface du grand carré est connue. Elle est égale à :

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

On en déduit le côté du grand carré par une simple extraction de racine carrée et on obtient finalement :

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

Évidemment ici on recherche une solution positive et il en existe une seule car b et c sont supposés positifs(1).

(1) On pourra trouver une construction géométrique des racines d'une équation du deuxième degré dans [1], page 102.

2. Méthode de Tartaglia (1535 ?) pour résoudre une équation de degré 3

En langage géométrique, il s'agit de résoudre le problème suivant :

Un cube et quelques-uns de ses côtés sont égaux à un nombre donné.
Quel est le côté de ce cube?

En utilisant le formalisme algébrique l'énoncé de ce problème s'écrit :

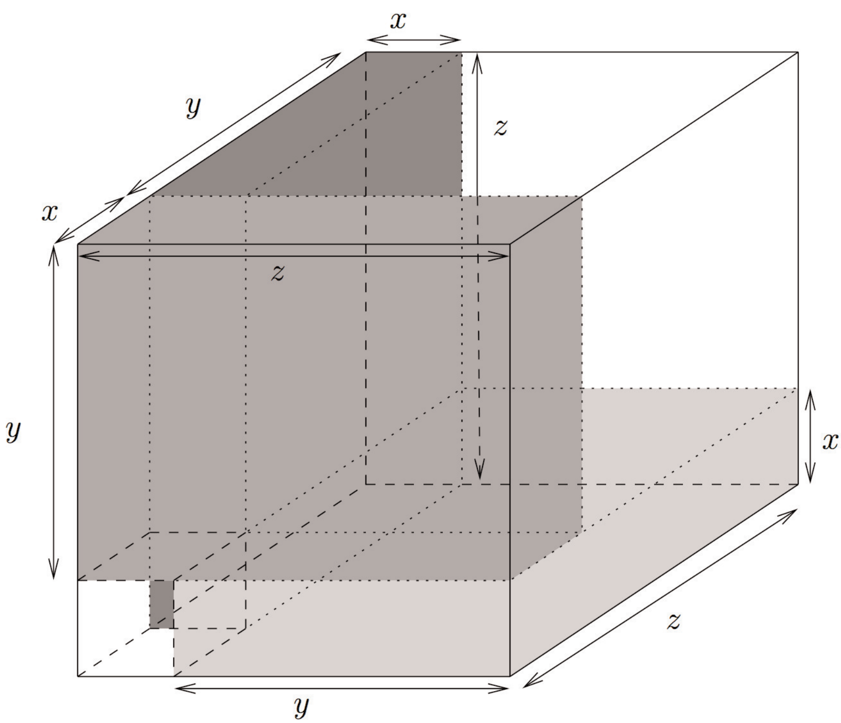
Des nombres p et q sont donnés. Trouver x tel que

$$x^3 + px = q. \tag{2}$$

Comme ci-dessus on étudie le problème pour p et q positifs. Dans ce cas on peut vérifier aujourd'hui très rapidement qu'il n'y a qu'une seule racine réelle et que celle-ci est positive.

On place un petit cube de côté x dans un coin d'un grand cube de côté z et on appelle y la différence $z - x$. Le solide grisé est la réunion de trois parallélépipèdes (rectangles) de côtés x, y et z. Si on lui ajoute le petit cube de côté x on obtient un solide (en quelque sorte le « gnomon[2] » de TARTAGLIA) de volume :

$$x^3 + 3xyz.$$



(2) déjà décrit un siècle plus tôt par Regiomontanus.

De plus le volume restant est un cube de côté y d'où la relation :

$$z^3 = y^3 + (x^3 + 3xyz).$$

Si on trouve y et z tels que $3yz = p$, on se retrouve dans une situation analogue à celle de l'équation du deuxième degré. En effet, si x est solution de (2), alors $x^3 + 3xyz$ est égal à q, le volume du gros cube est égal à $q + y^3$ d'où la relation :

$$q + y^3 = z^3.$$

La question qui est alors posée est la suivante : peut-on résoudre le système

$$\begin{cases} yz = \dfrac{p}{3} \\ z^3 = q + y^3 \end{cases} ?$$

Comme ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} yz = \dfrac{p}{3} \\ z^6 - qz^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

il suffit de résoudre une équation du deuxième degré(3) pour trouver z^3, puis d'extraire une racine cubique pour obtenir z. Et on finit en calculant y qui est égal à $\dfrac{p}{3z}$, puis x qui est égal à $z - y$. C'est, d'après JÖRGENSEN, la méthode de TARTAGLIA.

Poursuivons les calculs (ce que TARTAGLIA n'a certainement pas fait ainsi). L'équation du deuxième degré satisfaite par z^3 s'écrit :

$$\left(z^3 - \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Elle admet donc comme racine positive :

$$z^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} x &= z - y = z - \frac{p}{3z} \\ &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}}. \end{aligned}$$

En multipliant le dénominateur et le numérateur de la fraction intervenant dans cette formule par

(3) La résolution d'une telle équation était connue même dans les cas différents de celui exposé au paragraphe 1. Les contemporains de TARTAGLIA pouvaient la trouver dans la *Suma* de Luca PACIOLI parue en 1494.

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}$$

qui est bien défini car $\frac{q}{2}<\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$. On obtient finalement la célèbre formule publiée par CARDAN en 1545 (mais probablement déjà connue de Scipione del FERRO) :

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}}.$$

La suite de cette histoire conduira à introduire les nombres complexes. CARDAN, le premier, utilisera (avec réticences) dans ses calculs la racine carrée d'un nombre négatif, mais c'est BOMBELLI qui, en 1572, introduira l'utilisation systématique des nombres complexes pour résoudre une équation du troisième degré même quand la racine carrée de la formule de CARDAN–TARTAGLIA est celle d'un nombre négatif et qui déterminera dans ce cas les autres racines réelles de l'équation (voir [1], page107).

Bibliographie

[1] J. BAUDET (2002), *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*, Vuibert.

[2] A. DAHAN-DALMEDICO & J. PFEIFFER (1986), *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Points Seuil.

[3] COMMISSION INTER-IREM ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars.

[4] COMMISSION INTER-IREM ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, (1998), *Images, Imaginaires, Imaginations*, Ellipses.

[5] D. JÖRGENSEN, (1999), *Le maître des nombres* (roman)(4), Traduction française, Phebus (2002).

On trouvera sur le site

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/

des biographies des mathématiciens cités dans ce texte ainsi qu'une description assez détaillée de l'histoire de la résolution des équations de degré inférieur ou égal à 4.

Je remercie Jean-Pierre Friedelmeyer qui m'a évité certains contre-sens historiques mais qui n'est en rien responsable de ceux qui pourraient subsister dans ce texte.

(4) Cet ouvrage est vraiment un roman, avec histoire d'amour et description de la vie vénitienne de l'époque, et ne comporte aucune référence bibliographique.