Des mathématiques modernes : la notion de q-analogues

Richard Choulet

Introduction

Cet article n'a pas d'autre objectif que de donner un coup de projecteur sur une notion assez simple dans l'esprit de départ, qui rapidement par ses ramifications conduit a des études délicates, toujours d'actualité, qui seront évoquées plus bas.
L'idée d'introduire des paramètres dans des développements en séries de « fonctions ordinaires » n'est pas nouvelle ; par exemple Gauss en 1812 présente la série

$$1+\frac{ab}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots$$

et en étudie la convergence suivant les paramètres a, b et c.
En particulier, après les preuves d'irrationalité et de transcendance de valeurs prises par certaines de ces fonctions, il fut naturel de se demander ce qu'il advenait pour les fonctions apparentées et le travail est toujours d'actualité.
Citons l'exemple de la fonction de Tschakaloff T_q (1929), q-analogue de la série géométrique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$:

$$\mathrm{T}_q(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

($q\in\mathbb{Q}^*$). Avec certaines hypothèses sur q, Tschakaloff démontre que $\mathrm{T}_q(\alpha)\notin\mathbb{Q}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{Q}^*$.
Bien souvent certains problèmes d'irrationalité ou d'indépendance linéaire sont résolus dans les corps de nombres et les résultats dans $\mathbb{Q}$ n'en sont que des corollaires.

Dans ce qui suit on se restreint à prendre q réel distinct de un. On parle de q-analogue de telle fonction f pour désigner toute fonction f_q de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que la « fonction limite de f_q pour q tendant vers 1 soit la fonction f ». Ainsi tout naïvement on peut dire que la fonction f_q qui à x réel associe $\sin(q^2x)$, est une q-analogue de la fonction sin puisque pour tout x réel : $\lim\limits_{q\to 1}\sin(q^2x)=\sin x$.

Thomas Ernst, à l'adresse www.math.uu.se/research/pub/Ernst4.pdf retrace en 231 pages, un historique complet et abondamment documenté sur la notion de q-analogue.

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. richardchoulet@yahoo.fr

Que le lecteur pointilleux se contente de : on regarde des séries formelles et on constate bien intuitivement que lorsque q tend vers 1, les coefficients convergent vers ceux de la bonne fonction considérée ! Et là ça doit marcher.

I. Où l'on parle de *q*-dérivation

On se limite à considérer des fonctions de variable réelle.

On note τ_α la fonction $x \mapsto \alpha x$ et, pour toute fonction f, f_α la composée $f \circ \tau_\alpha$, s'il n'y a pas de confusion possible. On nomme $\mathcal{D}_q$ l'opérateur de q-dérivation ainsi construit : à f est associée $\mathcal{D}_q(f)$ qui est telle que : pour $x \neq 0$,

$$\mathcal{D}_q(f)(x) = \frac{f_q(x) - f(x)}{(q-1)x}$$

et $\mathcal{D}_q(f)(0) = f'(0)$ si toutefois $f'(0)$ existe !

Le mieux, pour éviter des désagréments, est de supposer f définie sur $\mathbb{R}$; on pourrait se contenter de prendre un ensemble de définition qui soit stable par τ_q et ses itérés, mais cela complique notablement.

Pourquoi est-ce une q-analogue de la dérivation ? Parce que $\lim\limits_{q \to 1} \mathcal{D}_q(f)(x) = f'(x)$. En revenant à la définition du nombre dérivé en un réel, on peut avoir une bonne vision du résultat.

Il est alors amusant de voir comment s'adaptent les formules habituelles de la dérivation mais, avant, que cela donne-t-il pour nos fonctions classiques ?

Les fonctions de base

1. Il est clair que $\mathcal{D}_q$(Constante) = 0 et que $\mathcal{D}_q$ est linéaire.

2. Et les fonctions polynômes ? Abusivement écrit, on voit que $\mathcal{D}_q(x) = 1$. Qu'est-ce que cela devient plus généralement avec le monôme ou la fonction exponentielle x^t ?

$\mathcal{D}_q(x^t) = \dfrac{q^t x^t - x^t}{(q-1)x} = \dfrac{q^t - 1}{q-1} x^{t-1}$. Il est d'usage en q-analogie de noter $[t]_q$ ce nombre $\dfrac{q^t - 1}{q-1}$ qui joue le rôle de l'exposant t en dérivation ordinaire. Pour éviter de surcharger, on délaissera par la suite l'indice q.

En effet la limite quand q tend vers 1 de $\dfrac{q^t - 1}{q-1}$ est t sachant que $q^t - 1 \sim_{t \to 1} t \ln q$.

3. Les fonctions rationnelles ? Commençons prudemment avec $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Cela pourrait être pire puisque : $\mathcal{D}_q\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{qx^2}$ et, plus généralement,

$\mathcal{D}_q(x^{-n}) = [-n]x^{-n-1}$. Tout va bien.

4. Pour $\sqrt{\ }$, c'est encore sympathique : $\mathcal{D}_q\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{q}+1\right)\sqrt{x}}$.

5. Quant aux autres sin, exp, rien sinon la sécheresse de la définition…

Les théorèmes usuels de dérivation

1. $\mathcal{D}_q$ est linéaire. Ceci a déjà été dit.
2. Dérivée d'un produit. Cela devient assez désagréable :

$$\mathcal{D}_q(fg) = f_q\ \mathcal{D}_q(g) + \mathcal{D}_q(f)\ g = f\ \mathcal{D}_q(g) + \mathcal{D}_q(f)\ g_q$$

avec la convention d'écriture du début du paragraphe. On forme en effet, avec une transformation classique :

$$\frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x} = \frac{f(qx)\big(g(qx)-g(x)\big) + g(x)\big(f(qx)-f(x)\big)}{(q-1)x},$$

qui amène le résultat et son symétrique de la même manière.
3. Dérivée d'un quotient. Pas joyeux non plus :

$$\mathcal{D}_q\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathcal{D}_q(f)g_q - f_q\mathcal{D}_q(g)}{gg_q}$$

avec le produit de f par l'inverse de g.
4. Dérivée d'une puissance :

$$\mathcal{D}_q\left(f^n\right) = \mathcal{D}_q(f)\sum_{i=1}^{n-1} f_q^i f^{n-1-i}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$; pour un exposant négatif, on revient à inverse et puissance.
5. Dérivée d'une racine carrée :

$$\mathcal{D}_q\left(\sqrt{f}\right) = \frac{\mathcal{D}_q(f)}{\sqrt{f}+\sqrt{f_q}}.$$

6. Dérivée d'une composée :

$$\mathcal{D}_q\left(f \circ \tau_\alpha\right) = \alpha\mathcal{D}_q(f) \circ \tau_\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Utiliser la composée générale $f \circ g$ semble très délicat !

II. Quelques équations *q*-différentielles

On prend ici $q > 1$ pour assurer les diverses convergences (suites, séries, produits infinis) qui vont intervenir.

$\mathcal{D}_q(f) = 0$

Cela veut donc dire que pour tout réel (ou complexe) x : $f(qx) = f(x)$ ou encore

$f(x)=f\left(\dfrac{x}{q}\right)$. Par récurrence $f(x)=f\left(\dfrac{x}{q^n}\right)$, donc en supposant la continuité de f en zéro, f est une fonction constante.
En conséquence, *deux fonctions f et g continues en zéro qui ont même q-dérivée diffèrent d'une constante.*

$\mathcal{D}_q(f) = a$

On suppose f définie sur $\mathbb{R}$.
Cela veut donc dire que pour tout réel x : $f(qx) = f(x) + a(q - 1)x$ ou encore $f(x)=f\left(\dfrac{x}{q}\right)+\dfrac{a(q-1)x}{q}$. Par récurrence :

$$f(x)=a(q-1)x\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots+\frac{1}{q^n}\right)+f\left(\frac{x}{q^n}\right).$$

La série converge car $q > 1$ et avec la continuité de f en zéro, on obtient donc $f(x) = ax + b$.

$\mathcal{D}_q(f) = f$

Il s'agit donc de trouver les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout x : $f(qx) = f(x) + a(q - 1)xf(x)$ ou encore $f(x)=\left(1+\dfrac{(q-1)x}{q}\right)f\left(\dfrac{x}{q}\right)$ en remplaçant x par $\dfrac{x}{q}$. Par récurrence, on obtient que pour tout n :

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(q-1)x}{q^k}\right)f\left(\frac{x}{q^n}\right).$$

Le produit infini converge (car $q > 1$) et si l'on suppose f continue en zéro de sorte que $f\left(\dfrac{x}{q^n}\right)$ tende vers $f(0)$,

$$f(x)=\lambda\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(q-1)x}{q^k}\right)$$

avec λ dans $\mathbb{R}$.
La solution continue en zéro telle que $f(0) = 1$ est donc $\exp_q$ telle que

$$\exp_q(x)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(q-1)x}{q^k}\right).$$

Qu'a de remarquable cette fonction ? Au regard de l'équation de départ, c'est un *q*-analogue de la fonction exponentielle, mais ce n'est pas évident sur le produit infini et on y reviendra au paragraphe IV.

III. Où il y a dérivation, la primitivation n'est pas loin !

Les exemples traités en II, ainsi que la définition de $\mathcal{D}_q$, suggèrent donc d'introduire la *q*-primitivation associée de sorte que :
$\mathrm{Prim}_q(0) = \mathrm{Cste}$,
$\mathrm{Prim}_q(a) = ax + \mathrm{Cste}$,

$$\mathrm{Prim}_q(x^n) = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}x^{n+1} + \mathrm{Cste} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

En rappelant que, pour toute fonction f, on a noté f_α la composée $x \mapsto f(\alpha x)$, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\mathrm{Prim}_q(\mathcal{D}_q(f)\,g) = fg - \mathrm{Prim}_q(f_q\mathcal{D}_q(g)) + \mathrm{Cste}.$$

Quelle définition ?

Naturellement, on dit que F est une *q*-primitive de f lorsque la *q*-dérivée de F est f.

Voyons ce que cela impose à F.
La définition prise veut dire que pour tout réel x :

$$\mathrm{F}(qx) - \mathrm{F}(x) = (q-1)\,x f(x)$$

ou si l'on préfère

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{q-1}{q}\,x\,f\left(\frac{x}{q}\right).$$

Par récurrence

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}\left(\frac{x}{q^n}\right) + (q-1)x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q^k}f\left(\frac{x}{q^k}\right).$$

Nous voyons que sous la réserve que la série converge et que F soit continue en zéro, F est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{C} + (q-1)x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{q^k}f\left(\frac{x}{q^k}\right).$$

La réciproque est immédiate.
Une question vient assez naturellement : $\mathrm{F}_{(q)}$, *q*-primitive de la fonction f, est-elle une *q*-analogue d'une primitive F de f ? La réponse est loin d'être évidente sans parler de topologies ; a-t-on seulement même la relation $\mathrm{F}_{(q)}(x) = \mathrm{F}(qx)$? Précisons la question à travers l'exemple qui suit : un *q*-analogue de Arctan.

Prenons $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; une *q*-primitive de f définie sur $\mathbb{R}$, continue et nulle en zéro est F telle que :

$$\mathrm{F}(x)=(q-1)x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{x^2+q^{2n}}$$

où la série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$.

En toute logique, si l'on pense qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction Arctan, la fonction F ci-dessus doit être considérée comme une q-analogue de Arctan que l'on note Arctan_q : mais il n'est pas du tout évident et c'est hors de notre propos de justifier que $\lim_{q\to 1}(q-1)x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{x^2+q^{2n}}=\mathrm{Arctan}\,x$.

Pour $x\neq 0$, nous avons

$$\mathrm{Arctan}_q\left(\frac{1}{x}\right)=(q-1)x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{1+x^2q^{2n}},$$

la série étant normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}^*$. Sur $\mathbb{C}$, il est prudent de contourner les pôles ! Calculons sa q-dérivée :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_q\left(\mathrm{Arctan}_q\frac{1}{x}\right)&=\frac{1}{(q-1)x}\left[(q-1)qx\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{1+q^2x^2q^{2n}}-(q-1)x\sum\frac{q^n}{1+x^2q^{2n}}\right]\\&=-\frac{q}{1+q^2x^2}=-\mathcal{D}_q\left(\mathrm{Arctan}_q(qx)\right).\end{aligned}$$

En pensant à l'égalité $\mathrm{Arctan}\,x+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ pour $x>0$, on aurait aimé que la fonction somme

$$x\mapsto \mathrm{Arctan}_q(qx)+\mathrm{Arctan}_q\left(\frac{1}{x}\right)$$

fut constante pour introduire un q-analogue de π, mais la fonction n'a pas été définie en zéro et elle y est encore moins continue.

IV. Analogues de l'exponentielle

Euler a démontré deux résultats qui transforment une série en produit infini. Le premier est valable pour tout complexe z ($q>1$) :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{q^nz^n}{\prod_{p=1}^{n}\left(q^p-1\right)}=\prod_{n\geq 0}\left(1+\frac{z}{q^n}\right)\qquad\text{(Euler 1)}$$

Rappelons la convention qui veuille qu'on prenne 1 pour le produit infini indexé sur l'ensemble vide.

On pose $d(z)=\prod_{n\geq 0}\left(1+\frac{z}{q^n}\right)$; d possède la propriété fonctionnelle

$$d(qz) = (1 + qz)\,d(z).$$

On cherche ensuite des coefficients (a_n) en écrivant $d(z)$ sous la forme $d(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

La suite (a_n) vérifie donc la relation $a_0 = 1$ et, pour tout n, $a_{n+1}q^{n+1} = a_{n+1} + a_n q$, en identifiant les coefficients de z^{n+1} dans la relation $d(qz) = (1 + qz)\,d(z)$.
Cela conduit donc à

$$a_{n+1} = \frac{qa_n}{q^{n+1} - 1}$$

pour tout n, puis finalement à

$$a_n = \frac{q^n}{\prod_{p=1}^{n}(q^p - 1)}.$$

D'où la formule formelle.

Si, dans cette première formule d'Euler on remplace z par $\frac{q-1}{q}x$, qu'obtient-on ?

Simplement vient :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(q-1)^n}{\prod_{p=1}^{n}\left(q^p - 1\right)} x^n = \prod_{n\geq 0}\left(1 + \frac{(q-1)x}{q^{n+1}}\right) = \prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{(q-1)x}{q^{n+1}}\right).$$

Or à gauche $\frac{\prod_{p=1}^{n}(q^p - 1)}{(q-1)^n} = \prod_{p=1}^{n} \frac{q^p - 1}{q - 1}$ apparaît comme un q-analogue de $n!$ (qu'on note souvent $n!_q$), tandis qu'à droite, c'est la fonction définie plus haut comme q-analogue de l'exponentielle qu'on découvre ; rappelons qu'on l'avait obtenue comme satisfaisant $\mathcal{D}_q(f) = f$ et $f(0) = 1$.

Le second résultat d'Euler impose $|z| < 1$ et dit que :

$$\sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{z^n}{\prod_{p=1}^{n}\left(q^p - 1\right)} = \frac{1}{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{z}{q^n}\right)} \qquad \text{(Euler 2)}$$

Formellement cela se justifie par un raisonnement similaire au précédent.

Pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{|q-1|}$, on obtient alors :

$$\sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{((q-1)z)^n}{\prod_{p=1}^{n}\left(q^p - 1\right)} = \frac{1}{\prod_{n\geq 0}\left(1 - \frac{(q-1)z}{q^n}\right)}.$$

Ainsi se trouve introduite une seconde q-analogue de l'exponentielle, moins naturelle et non définie sur $\mathbb{C}$ tout entier en posant

$$\mathrm{Exp}_q(z) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{z^n}{n!_q}$$

qui vérifie donc pour tout z, $|z| < \dfrac{1}{|q-1|}$:

$$\exp_q(z)\mathrm{Exp}_q(-z) = 1.$$

Certes, cela n'a pas l'élégance de $e^z \times e^{-z} = 1$, mais on a quand même :

$$\frac{1}{\exp_q(z)} = \mathrm{Exp}_q(-z).$$

Il y a donc ainsi autant de cosinus et sinus que d'exponentielles !

V. Conclusion

De belles et bonnes choses n'ont pas été abordées, mais cet article était censé faire découvrir des joies nouvelles : un petit « *q*-analog » sur un bon moteur de recherche (en anglais) ouvrira au lecteur intéressé les clés d'un paradis quelque peu infernal par sa « vastitude ». La bibliographie ci-dessous ne donne qu'un faible aperçu de l'abondance des ouvrages parus sur le thème ; celle du « Gaspar et Rahman » annoncé est proprement gigantesque.
Que le lecteur soucieux de rigueur soit enfin rassuré : certes la présentation des *q*-analogues du point de vue de la convergence vers sa fonction de référence est loin d'être faite ici (et d'ailleurs les auteurs ne se posent plus la question), mais tout ce qui est fait à partir de là, tel qu'envisager des problèmes d'irrationalité, de $\mathbb{Q}$-indépendance linéaire met en œuvre des mathématiques sérieuses. Juré non craché !

VI. Bibliographie

EXTON H. q-hypergeometric functions and applications, *Ellis Horwood Series : Mathematics ans its Applications, Ellis Horwood Ltd., Chicester*, 1983.

GASPER G and RAHMAN M., Basic hypergeometric series, *Cambridge university Press* (1990).

http://www.imub.ub.es/collect/accdocg/E52001020.pdf

http://www.mathword.wolfram.com

Merci à l'ultime relecteur pour ses re marc avisées.