# Rayons et diamètres

Philippe Langlois

L'étude qui suit porte sur deux nombres évaluant de façon différente la taille d'un ensemble fini $\mathcal{E}$ de $n$ points du plan ($n \geq 2$).

Son *diamètre* $\mathrm{d}(\mathcal{E})$, plus grande des distances mutuelles de ses points, est une notion bien connue.

Mais on peut aussi définir son *rayon* $\mathrm{r}(\mathcal{E})$, rayon du plus petit disque (fermé : bord et intérieur) le contenant, que nous appellerons disque minimal de $\mathcal{E}$.

L'existence et l'unicité d'un tel disque ne vont pas de soi. Le but de cet article est d'une part de les prouver et d'autre part d'établir une double inégalité reliant diamètre et rayon, à savoir

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{E}) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \qquad \text{(I)}$$

Les paragraphes 1 à 4 peuvent être sans mal abordés avec des élèves. Le cas $n = 3$, notamment, se prête bien à une étude expérimentale et introduit sous une forme simple les idées qui serviront au cas général.

L'annexe (§ 8) présente un thème d'activités qui ne demande que la connaissance des résultats relatifs au cas $n = 3$ et un peu de méthode dans le classement des données.

L'étude du cas général $n \geq 4$ (§ 5 et 6) reste strictement élémentaire, les démonstrations n'utilisant que les notions de géométrie du programme des lycées. Mais elle est plus complexe, ce qui rend délicate une exploitation avec des élèves. Signalons qu'elle se conclut par une « descente infinie », chose plutôt rare en géométrie.

La conclusion (§ 7) situe le problème dans un cadre plus large et donne quelques indications sur son origine.

## 1. Unicité du disque minimal

Si deux disques distincts de même rayon R contiennent $\mathcal{E}$, leurs bords se coupent en deux points A et B (figure 1). La partie commune est inscrite dans le cercle de diamètre [AB], de rayon inférieur à R. Les deux disques ne sont donc pas minimaux. Le disque minimal de $\mathcal{E}$, <u>s'il existe</u>, est donc unique.

N.B. : les termes « inférieur » et « supérieur » sont ici et dans toute la suite à entendre au sens strict.

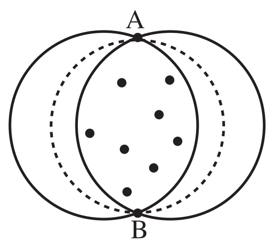

fig. 1

## 2. Existence et détermination dans le cas $n = 2$

Soit P et Q les deux points de $\mathcal{E}$. Si Δ est un disque contenant P et Q, de centre O et de rayon R, on a évidemment (fig. 2)

$$PQ \leq OP + OQ \leq 2R,$$

la première inégalité ne devenant égalité que si O est sur le segment [PQ] et la seconde que si

$$OP = OQ = R.$$

Ainsi, tout disque contenant P et Q autre que le disque de diamètre PQ est de rayon plus grand. Ce dernier disque est donc minimal et, ici,

$$r(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} d(\mathcal{E}).$$

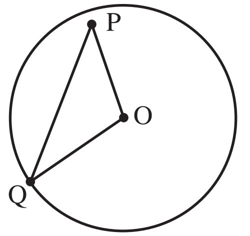

fig. 2

*Nous supposerons désormais $n \geq 3$.*

## 3. Préliminaires au cas général

Nous utiliserons deux propriétés classiques et un lemme.

**Propriété 1**

Étant donné deux points P et Q, un point M est extérieur ou intérieur au cercle de diamètre PQ selon que l'angle $\widehat{PMQ}$ est aigu ou obtus.

Pour M′ situé à l'extérieur, l'angle $\widehat{KM'Q}$ du triangle KM′Q rectangle en K est aigu.

Pour M″ situé à l'intérieur, l'angle $\widehat{KM''Q}$ étant aigu, son supplémentaire $\widehat{PM''Q}$ est obtus.

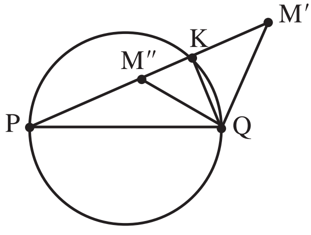

fig. 3

**Propriété 2**

Soit un cercle Γ et deux points distincts A et B de ce cercle et M un point extérieur (resp. intérieur) au cercle. Alors (position relative de deux cercles sécants) :

- l'arc $\widehat{AMB}$ est, sauf ses extrémités, tout entier extérieur (resp. intérieur) au cercle Γ.
- l'arc complémentaire de $\widehat{AMB}$ (c'est-à-dire sur le cercle circonscrit à AMB l'autre arc d'extrémités A et B) est, sauf ses extrémités, tout entier intérieur (resp. extérieur) à Γ.

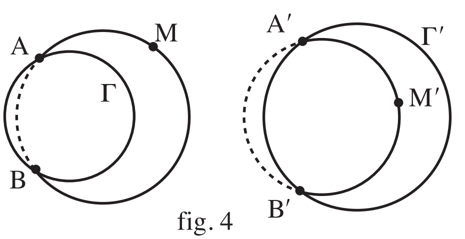

fig. 4

**Lemme (L)**

*Si un disque $D$ contient un ensemble fini $\mathcal{E}$ d'au moins deux points et si son bord contient au plus un point de $\mathcal{E}$, $D$ contient un disque plus petit contenant $\mathcal{E}$ lui aussi et dont le bord contient au moins deux points de $\mathcal{E}$.*

Soit R le rayon de $D$. Si aucun point de $\mathcal{E}$ n'est sur le cercle Γ bord de $D$, il existe un disque $D_1$ concentrique à $D$, de rayon $R_1$ inférieur à R, contenant $\mathcal{E}$ et dont le bord contient un point de $\mathcal{E}$, par exemple A. On peut donc se limiter au cas où le bord de $D$ contient au moins un point de $\mathcal{E}$, par exemple A. Supposons qu'il n'en contienne pas d'autre. En utilisant une homothétie convenable de centre A, on voit alors qu'il existe un disque $D_1$ de rayon $R_1$ inférieur à R, contenant $\mathcal{E}$ et dont le bord contient A et l'un des autres points, mettons B.

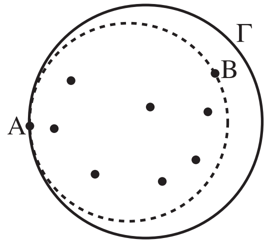

fig. 5

N.B. : On peut se passer de l'homothétie comme suit : si on considère tous les cercles tangents en A à Γ et passant par les différents points de $\mathcal{E}$, le disque défini par le plus grand contient tous les points de $\mathcal{E}$, mais il est plus petit que $D$.

## 4. Existence et détermination dans le cas $n = 3$

Quand on demande aux élèves quel est le plus petit cercle enfermant trois points, la réponse fuse très vite : « Le cercle circonscrit ! Bien sûr ! ». Reste alors à leur faire découvrir que c'est moins sûr qu'il n'y paraît, puisque c'est faux dans certains cas, et qu'en plus ce n'est pas si facile à prouver.

Passons maintenant à la démonstration.

Soit A, B et C les trois points de $\mathcal{E}$.

**Si l'un des angles de ce triangle est obtus (ou droit)**, par exemple l'angle en B, il est immédiat (cf. propriété 1) que B est dans le disque Δ de diamètre [AC]. Ce disque est le plus petit contenant A et C, donc a fortiori le plus petit contenant les trois points, donc le disque minimal de $\mathcal{E}$. On a donc ici :

$$r(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}d(\mathcal{E}).$$

**Supposons maintenant que les trois angles sont aigus.** Nous allons montrer que le disque Δ délimité par le cercle circonscrit $\gamma$ au triangle ABC est le disque minimal de ce triangle. Soit $D$ un disque contenant $\mathcal{E}$, autre que Δ. Il suffit de prouver que le rayon de $D$ est supérieur à celui de Δ.

D'après le lemme (L), on peut se limiter au cas où le bord Γ de $D$ contient deux points de $\mathcal{E}$, mettons A et B. Soit H le milieu de AB. On oriente la médiatrice $x'x$ de AB de sorte que sa partie positive H$x$ soit du côté de C.

On désigne par $q$ le cercle de diamètre [AB], L, $u$, U les points d'intersection respectifs de $q$, $\gamma$, Γ avec H$x$ et L′, $u'$, U′ leurs points d'intersection avec H$x'$.

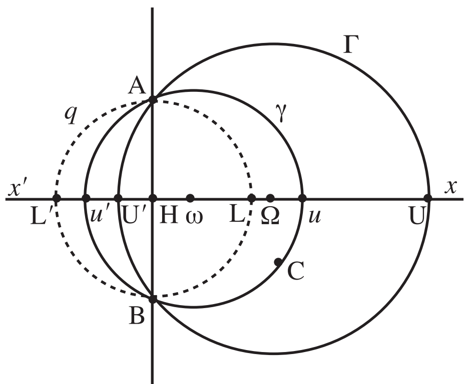

fig. 6

Le schéma du raisonnement est très simple : on exploite la position relative des trois cercles $q$, $\gamma$, $\Gamma$ pour déterminer celle de leurs points d'intersection avec $x'x$, puis celle des centres des cercles.

Puisque l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est aigu, le point C est extérieur à $q$ (propriété 1), donc (propriété 2) $u$ est aussi extérieur à $q$ et $u'$ lui est intérieur, ce qui donne sur l'axe $x'x$ l'ordre L′, $u'$, L, $u$. Mais C est intérieur à $\Gamma$, donc (propriété 2 à nouveau) on a sur l'axe $x'x$ l'ordre $u'$, U′, $u$, U. On a donc finalement sur l'axe $x'x$ l'ordre L′, $u'$, U′, L, $u$, U.

Considérons maintenant les centres respectifs H, $\omega$, $\Omega$ des cercles $q$, $\gamma$, $\Gamma$. Ce sont les milieux de [L′L], [$u'u$] et [U′U]. L′ étant avant $u'$ et L avant $u$ sur $x'x$, le milieu H de [L′L] est avant le milieu $\omega$ de [$u'u$] ; de même $u'$ étant avant U′ et $u$ avant U, le milieu $\omega$ de [$u'u$] est avant $\Omega$, milieu de [U′U].

[Pour qui préfère un calcul, en désignant pour tout point J son abscisse sur $x'x$ par $x$(J), on déduit de la position relative de L′, $u'$, U′, L, $u$, U la double inégalité

$$\frac{1}{2}\big(x(\mathrm{L}')+x(\mathrm{L})\big)<\frac{1}{2}\big(x(u')+x(u)\big)<\frac{1}{2}\big(x(\mathrm{U}')+x(\mathrm{U})\big),$$

c'est-à-dire $0 < x(\omega) < x(\Omega)$.]

Il s'ensuit que $\omega$ est entre H et $\Omega$, d'où l'on tire aussitôt $\mathrm{A}\omega < \mathrm{A}\Omega$ ; le rayon de $\gamma$ est donc inférieur à celui de $\Gamma$, ce qui règle la question.

**Démontrons l'inégalité** $\mathbf{r}(\mathcal{E}) \leq \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\mathbf{d}(\mathcal{E})$. Elle est évidente lorsque le triangle a un angle obtus ou droit, puisqu'alors $\mathrm{r}(\mathcal{E}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{E})$. Supposons donc les trois angles aigus. Le disque minimal est alors le disque dont le bord est le cercle circonscrit ; soit $\omega$ son centre. La somme des trois angles $\widehat{\mathrm{A}\omega\mathrm{B}}$, $\widehat{\mathrm{B}\omega\mathrm{C}}$, $\widehat{\mathrm{C}\omega\mathrm{A}}$ étant 360°, le plus grand d'entre eux est au moins égal à 120° ; le côté correspondant, qui est d($\mathcal{E}$), est donc au moins égal au côté du triangle équilatéral inscrit, soit $\mathrm{r}(\mathcal{E})\sqrt{3}$.

## 5. Existence et détermination dans le cas $n \geq 4$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

*Toute partie finie $\mathcal{E}$ du plan admet un disque minimal unique. Ou bien ce disque a pour diamètre un couple de points de $\mathcal{E}$, ou bien il est circonscrit à un triangle de points de $\mathcal{E}$ n'ayant que des angles aigus.*

Comme pour beaucoup de théorèmes à conclusion de type « ou bien, ou bien », le plus simple est de montrer que, si la première moitié de la conclusion est fausse, l'autre est vraie.

Soit donc un ensemble $\mathcal{E}$ de $n$ points du plan sur lequel nous faisons l'hypothèse ($\mathcal{H}$) suivante : aucun disque ayant pour diamètre un couple de points de $\mathcal{E}$ n'est le disque minimal de $\mathcal{E}$. Soit $D$ un disque contenant $\mathcal{E}$ et dont le bord contient au moins deux points de $\mathcal{E}$ (l'existence d'un tel disque découle du lemme (L)).

Si $\Gamma \cap \mathcal{E}$ contenait deux points diamétralement opposés sur $\Gamma$, mettons A et B, $D$ serait le disque minimal de $\mathcal{E}$, puisqu'il serait déjà celui de $\{A, B\}$, ce qui est exclu par $(\mathcal{H})$.

Il en résulte que deux situations seulement sont possibles pour $\Gamma \cap \mathcal{E}$ :

**Cas nº 1 : trois des points de $\Gamma \cap \mathcal{E}$, mettons A, B et C, forment un triangle dont tous les angles sont aigus** (ce qui revient à dire qu'aucun demi-cercle de $\Gamma$ ne contient $\Gamma \cap \mathcal{E}$).

Alors le disque $D$ est le disque minimal de $\mathcal{E}$, puisqu'il est déjà celui de $\{A, B, C\}$, et la démonstration est terminée.

**Cas nº 2 : Les points de $\Gamma \cap \mathcal{E}$ sont inclus dans un arc de $\Gamma$ inférieur à un demi-cercle.**

On prend le plus petit arc possible répondant à la question et on appelle A et B ses extrémités, qui sont donc dans $\Gamma \cap \mathcal{E}$. Si le disque $Q$ de diamètre [AB] contenait tous les points de $\mathcal{E}$, il serait évidemment disque minimal de $\mathcal{E}$, ce qui est exclu par $(\mathcal{H})$. Il y a donc dans $\mathcal{E}$ un certain nombre de points non situés dans $Q$.

*Nous allons « fabriquer » un disque plus petit que D contenant $\mathcal{E}$.*

La méthode s'inspire fortement de celle qui a servi pour le cas $n = 3$, dont on reprend les notations : H milieu de [AB], $\Omega$ centre de $\Gamma$, $x'x$ médiatrice de AB orientée de H vers $\Omega$ (H$x$ moitié positive, H$x'$ moitié négative), U et U′ points d'intersection de $\Gamma$ avec H$x$ et H$x'$ respectivement, L et L′ points d'intersection du bord $q$ de $Q$ avec H$x$ et H$x'$ respectivement.

De HU = H$\Omega$ + $\Omega$U = H$\Omega$ + $\Omega$A, on tire HU > HA, ce qui prouve que L est entre H et U. Ainsi U est extérieur à $Q$ et donc (propriété 2) U′ est intérieur à $Q$.

Appelons $(P)$ le demi-plan fermé de bord la droite AB et contenant $\Omega$, $(P')$ l'autre demi-plan de même bord. Le point U′ étant intérieur à $Q$, l'arc $\overset{\frown}{AU'B}$ l'est aussi ; on a $D \cap (P') \subset Q$ et a fortiori $\mathcal{E} \cap (P') \subset Q$.

Si M est un des points de $\mathcal{E}$ non situés dans $Q$, il est donc dans $D \cap (P)$, mais il n'est pas sur $\Gamma$ d'après la façon dont ont été choisis A et B.

Nommons $u$ et $u'$ les points d'intersection respectifs du cercle $\gamma$ circonscrit à AMB avec H$x$ et H$x'$, et $\delta$ le disque de bord $\gamma$.

Le point M étant intérieur à $\Gamma$ et extérieur à $Q$, $u$ l'est aussi. Il est donc situé entre L et U.

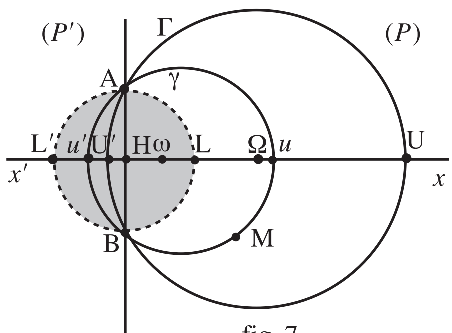

fig. 7

Parmi les différents points M possibles, il en est un (pas forcément unique) tel que la distance H$u$ soit maximale. <u>On ne considère désormais que celui-là</u>.

Puisque $u$ est entre L et U, $u'$ est entre L′ et U′, donc U′ entre $u'$ et H. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{E} \cap (P') \subset D \cap (P') \subset \delta \cap (P')$. Voyons $\mathcal{E} \cap (P)$. Compte tenu du fait que M a été choisi maximisant la distance H$u$, $\mathcal{E} \cap (P)$ est inclus dans $\delta \cap (P)$. Finalement, $\mathcal{E}$ est inclus dans $\delta$.

Reste à prouver que le rayon de $\delta$ est inférieur à celui de $D$.

Il suffit de reprendre mot pour mot le raisonnement fait dans le cas $n = 3$. On a sur l'axe $x'x$ l'ordre L′, $u'$, U′, L, $u$, U ; il en résulte que les milieux respectifs de [L′L], [$u'u$] et [U′U], c'est-à-dire H, $\omega$ et $\Omega$ sont dans le même ordre. On a donc, puisque $\omega$ est entre H et $\Omega$, $A\omega < A\Omega$ : le rayon de $\delta$ est inférieur à celui de $D$.

*Nous avons ainsi trouvé un disque $\delta$ contenant $\mathcal{E}$, de rayon inférieur à celui de D et dont le bord $\gamma$ contient au moins trois points de $\mathcal{E}$* (A, B, M).

*Itérons maintenant le processus.* Si $\delta$ est dans le cas n° 1, il est minimal. S'il est dans le cas n° 2, le raisonnement précédent appliqué à $\delta$ montre qu'il existe un disque $\delta_1$, contenant $\mathcal{E}$, de rayon $\rho_1$ inférieur au rayon $\rho$ de $\delta$ et dont le bord $\gamma_1$ contient au moins trois points de $\mathcal{E}$. Si $\delta_1$ est dans le cas n° 1, il est minimal ; s'il est dans le cas n° 2, on continue.

Nous sommes ainsi arrivés à une suite de disques $\delta_j$ contenant $\mathcal{E}$, dont le bord $\gamma_j$ contient au moins trois points de $\mathcal{E}$ et dont les rayons $\rho_j$ forment une suite strictement décroissante.

Cette suite ne peut être infinie, car il y a $\binom{n}{3}$ combinaisons des points de $\mathcal{E}$ trois à trois. Il y a donc une valeur de $j$ pour laquelle le disque $\delta_j$ est dans le cas n° 1 et donc est minimal pour $\mathcal{E}$.

N.B. : Il n'est pas nécessaire d'avoir fait de la combinatoire pour prouver que le nombre de combinaison des points 3 à 3 est fini : on en choisit un, puis un autre, puis un troisième, soit $n\ (n - 1)\ (n - 2)$ choix. Ils ne sont pas tous distincts, mais on s'en moque.

## 6. Démonstration de la double inégalité (I)

Nous voulons prouver que l'on a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \le \mathrm{r}(\mathcal{E}) \le \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \qquad \text{(I)}$$

**La première inégalité** est immédiate. Prenons deux points A et B de $\mathcal{E}$ dont la distance soit maximale. Cette distance est donc d($\mathcal{E}$) ; mais A et B sont dans le disque minimal de $\mathcal{E}$ et donc leur distance est au plus égale à 2 r($\mathcal{E}$), d'où le résultat.

**Établissons maintenant la seconde inégalité.**

Si le disque minimal de $\mathcal{E}$ a pour diamètre un couple (A, B) de points de $\mathcal{E}$, on a évidemment $\mathrm{r}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \le \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}(\mathcal{E})$.

Si le disque minimal de $\mathcal{E}$ a pour bord le cercle circonscrit à trois points A, B, C de $\mathcal{E}$ formant un triangle aux angles aigus, ce disque est aussi le disque minimal pour le triplet {A, B, C} pour lequel on a déjà démontré $\mathrm{r}(A,B,C) < \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}(A,B,C)$. Mais $\mathrm{r}(\mathcal{E}) = \mathrm{r}(A, B, C)$ et $\mathrm{d}(A, B, C) \leq \mathrm{d}(\mathcal{E})$.

Notons que le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit, car si $\mathcal{E}$ est formé des sommets d'un triangle équilatéral, on a $\mathrm{r}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}(\mathcal{E})$.

## 7. Conclusion

La démonstration élémentaire exposée ci-dessus est longuette, mais elle a le mérite d'être constructive : en même temps qu'elle justifie l'existe et l'unicité de l'objet, elle donne un processus pour le déterminer.

Les résultats que nous avons obtenus se généralisent (H.W.E. Jung, 1901, *Journal de Crelle*, volume 123, pages 241 à 257) à un espace affine euclidien de dimension finie $k$ : pour toute partie bornée $\mathcal{E}$ d'un tel espace, il existe une boule fermée unique de rayon minimal la contenant, la double inégalité (I) devenant :

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{E}) \leq \mathrm{r}(\mathcal{E}) \leq \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}\,\mathrm{d}(\mathcal{E}) \qquad \text{(I)}$$

Dans le cas du plan, une démonstration voisine(1) de celle qui est donnée ici figure dans *The Enjoyment Of Mathematics*, de Rademacher et Toeplitz. Cet excellent ouvrage, dont le sous-titre, « Selections from Mathematics for the Amateur », est tout un programme, est une traduction adaptée et augmentée d'un livre allemand paru en 1929, dont il existe une version française (épuisée) parue chez Dunod sous le titre *Le plaisir des mathématiques*.

Le lecteur curieux de savoir comment s'établissent ces résultats en dimension quelconque pourra trouver une démonstration (utilisant quelques notions sur les compacts et sur la convexité) sur le site Internet de l'APMEP, sous le titre « Inégalité de Jung ».

## 8. Annexe : un thème d'activités

Pour un ensemble de quatre points, le raisonnement que nous avons fait dans le cas général se simplifie, puisque le raisonnement de « descente infinie » terminal n'est plus nécessaire, mais on est vraiment à la limite de ce que l'on peut demander à des élèves. En revanche, pour quatre points donnés, les choses deviennent beaucoup plus faciles : on peut, en s'appuyant uniquement sur les résultats obtenus pour $n = 2$ et $n = 3$, trouver empiriquement le bon cercle, la difficulté étant de justifier ce choix.

(1) Que le lecteur n'ait pas de fausse joie : elle n'est ni plus courte ni plus simple.

Nous présentons dans ce qui suit un thème de travail inspiré de cette idée, qui se prête bien à une expérimentation avec un logiciel de géométrie dynamique tel que *Cabri Géomètre* ou *GeoGebra*.

*On donne dans le plan un triangle* ABC *fixe et un point mobile* M. *En fonction de la position de* M *dans le plan, justifier l'existence et étudier la nature du disque minimal de* {A, B, C, M} *: disque ayant pour diamètre le segment joignant deux des points (lesquels ?), disque limité par le cercle circonscrit à trois des points (lesquels ?).*

La situation la plus facile à traiter est d'assez loin celle où **le triangle ABC est rectangle** (on peut même le prendre rectangle isocèle, mais la simplification apportée est un peu illusoire).

Nous donnons ci-après les résultats, dont la justification est aisée. La difficulté majeure est de faire découvrir aux élèves la nécessité de tracer les perpendiculaires en A et B aux côtés aboutissant en ces points.

Pour les notations, le lecteur est prié de se reporter à la figure 8, sur laquelle les traits séparant les différentes zones sont en surépaisseur.

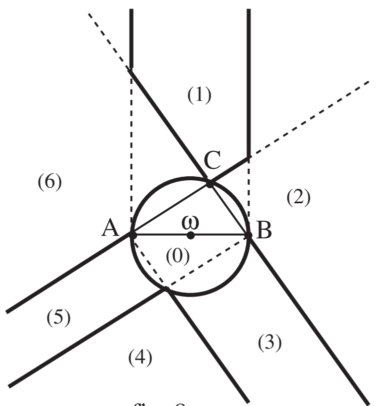

fig. 8

• Si M est dans la zone (0), le disque minimal cherché est celui de diamètre AB.
• Si M est dans la zone (1), le point C est intérieur au triangle AMB, dont tous les angles sont aigus. Le disque cherché est alors le disque circonscrit à AMB.

• Si M est dans la zone (2), les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACM}$ sont obtus, donc le disque cherché est celui de diamètre [AM]. De même, si M est dans la zone (6), le disque cherché est celui de diamètre [BM].

• Si M est dans la zone (4), les angles $\widehat{CAM}$ et $\widehat{CBM}$ sont obtus, donc le disque cherché est celui de diamètre [CM].
• Si M est dans la région (3) [resp. (5)], le travail est plus délicat. Il faut d'abord montrer que les angles du triangle ACM sont tous aigus (pour $\widehat{AMC}$, utiliser $\widehat{AMC} \leq \widehat{AMB}$), et ensuite que B est intérieur au cercle circonscrit à ACM (utiliser la propriété 2 pour les deux cercles circonscrits respectivement à ABC et AMC), ce qui permet de conclure que le disque cherché est le disque circonscrit au triangle AMC [resp. BMC].

*À titre de curiosité*, esquissons ce qui se passe dans le cas d'**un triangle ABC dont tous les angles sont aigus.**

On est amené (voir figure 9) à diviser le plan en 13 zones : le disque circonscrit à ABC et trois types différents de zones limitées par des segments ou demi-droites.

La figure 9 (sur laquelle les séparations des zones sont là encore en surépaisseur) a été tracée à partir des côtés du triangle ABC et des perpendiculaires à ces côtés issues de leurs extrémités, ce qui fait jouer un rôle important aux points diamétralement opposés à A, B et C sur le cercle circonscrit au triangle. Nous laissons aux héros le soin d'effectuer les démonstrations.

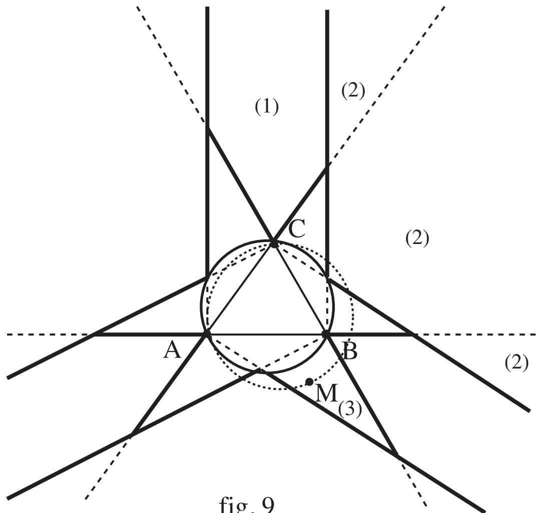

fig. 9

Signalons enfin que, lorsque le triangle a un angle obtus, la situation se corse, puisqu'il n'y a plus symétrie des données.