MATh.en.JEANS :
définition, exemples, contre-exemples, propriétés, démonstrations, ...

Pierre Duchet et Pierre Audin(*)

En 1985-1986, Hubert Curien, alors ministre de la Recherche, lançait l'opération « mille classes-mille chercheurs ». Dans ce cadre, dans un lycée d'Argenteuil, deux classes de Première S rencontrèrent un mathématicien pendant quatre heures un samedi matin. L'APMEP, en la personne d'Henri Bareil, décida de faire une brochure sur cette aventure(1) et c'est justement alors que nous finissions de mettre les dernières virgules que nous nous sommes dit : les élèves ont été spectateurs de mathématiques, ils n'ont pas été acteurs.
Ainsi semée, l'idée MATh.en.JEANS a germé : il fallait faire en sorte que les élèves deviennent eux-mêmes des chercheurs. Les ingrédients étaient simples : reproduire ce qui se fait dans la recherche professionnelle, sous la houlette d'un mathématicien professionnel.
Il nous faut donc expliquer notre conception des maths et aussi notre conception de l'enseignement : le bulletin vert est alors l'endroit rêvé pour s'adresser à ceux qui seront concernés par les deux thèmes, les professeurs de mathématiques.

Des mathématiques : un plaisir à vivre !

Grâce aux exemples ci-dessous, on comprend que l'institution, les institutions voient d'un bon œil cette activité. C'est vrai de l'inspection générale, c'est vrai des associations comme la SMF ou l'APMEP ou bien sûr Animath. Le seul problème, c'est toujours le même, le financement : là, les choses sont plus compliquées car si les classes de nature ou les classes de neige n'ont pas pour objectif de transformer tous les élèves en paysan ou en champion de ski, leur intérêt a été bien compris. Mais favoriser une généralisation de MATh.en.JEANS représenterait un coût. Ce n'est pourtant pas le seul blocage apparent à une généralisation. D'une part, il faudrait augmenter le nombre de mathématiciens participant à des jumelages : notre expérience montre que beaucoup sont prêts à s'investir, mais aussi beaucoup de doctorants. Reste aux enseignants à franchir aussi le pas : espérons que ce dossier aura un effet de ce côté-là.

Que les enseignants le sachent : nous avons lancé MATh.en.JEANS pour les élèves, pour qu'ils soient acteurs, mais à l'intérieur du réseau ainsi constitué, chacun en ressort gagnant. Les élèves expriment une réelle satisfaction devant le travail accompli ainsi que leur plaisir pris à réfléchir, à échanger et à devenir auteurs d'une

(*) co-fondateurs de l'association.
(1) Cette publication APMEP (brochure n° 74) est disponible sur le site APMEP, rubrique brochures épuisées.

œuvre mathématique. Pour eux, la différence est très nette entre les mathématiques pratiquées ainsi et les mathématiques scolaires. Le plaisir est chose difficile à quantifier mais on l'observe régulièrement, chez chacun des participants, pour ce qu'il a fait, pour ce qu'il a aidé à faire. Le plaisir, en mathématiques, à l'école.

Une intrigue à nouer

Faire des mathématiques semble être une activité universelle, qui se décline simplement en fonction du niveau. Mais non. D'abord le sujet traité par un mathématicien n'est pas le même que lors d'une compétition mais pas non plus celui que l'on proposerait en exercice. Pour nous mettre d'accord le plus simple est de donner un exemple de sujet tel qu'on peut le proposer dans MATh.en.JEANS. Beaucoup d'autres exemples se trouvent sur le site web http://mathenjeans.fr

Où est le centre ? *Plusieurs communes disent être le centre géographique de la France…* *Comment est-ce possible ?*	[Résumé] Qu'est qu'un centre ? Une région plane a-t-elle plusieurs centres ? Sont-ils loin les uns des autres ? Comment trouver leurs emplacements ?	

[Commentaire] Ce type de question se pose pour toute espèce de territoire : un pays, une région administrative, un département, une ville, une commune, un champ, … Où installer la mairie, la poste, la caserne de pompiers, le relais de télévision, la prison ? Trouver le centre d'un territoire dépend certainement de la forme du territoire, mais dépend avant tout de ce que l'on entend par « centre » : s'agit-il d'être le point le plus enfoui possible, le plus loin possible de l'extérieur ? Veut-on contrôler le plus facilement possible tout le territoire ? Ou souhaitons-nous la position la plus moyenne, le plus neutre possible ?
Un point de vue une fois choisi, comment faire pour trouver la (ou les) solution(s) ? L'étude de cas particuliers peut nous aider : centre d'un petit ensemble de points, d'un triangle, d'un quadrilatère, … Voici, par exemple, trois pistes raisonnables et intéressantes.

Point le plus interne.
Il s'agit du point le plus difficilement accessible de l'extérieur : pour un pays, par exemple, on chercherait un lieu qui est le plus loin possible des frontières, le plus « naturellement » protégé. C'est là que l'on pourrait mettre le centre de la Défense Nationale : la distance à parcourir par tout envahisseur serait la plus grande possible…

Point le plus influent, le plus « économique »
L'endroit *le plus influent* d'un territoire est celui qui permet rapidement d'intervenir partout. Ainsi pour arroser sans difficulté toute sa pelouse avec un tuyau d'arrosage, il convient de se mettre là où la portée du jet nécessaire sera la plus faible possible. À l'échelle d'une commune, c'est sans doute au point le plus influent qu'il convient d'installer la mairie ou la poste : aucune personne n'aura trop de chemin à faire pour y venir. À moins que l'on préfère y placer la caserne des pompiers : l'intervention

d'urgence sera toujours possible, rapidement, où que survienne le feu. Un point de vue plus général est possible : si l'on désire fixer un lieu de rendez-vous « central » pour plusieurs personnes, il conviendrait de choisir *le plus économique*, celui qui minimise le temps ou le coût des déplacements…

Point d'équilibre
Les physiciens parlent de centre de gravité et proposent l'expérience suivante : on construit un modèle réduit du pays (en le découpant par exemple dans du carton rigide) et on cherche à le faire tenir en équilibre horizontal sur son doigt : si on place son doigt exactement sous « le » centre de gravité, on obtient l'équilibre.

Et dans l'espace ?
La problématique du centre se pose dès qu'il est question d'espace et de distances. Peut-on espérer des méthodes générales qui s'appliqueraient aussi bien à des ensembles de points du plan qu'à l'espace à trois dimensions (placer des capteurs, des émetteurs, des satellites, …) ou à des espaces plus généraux encore, comme ceux qui servent couramment dans les sciences dès que l'on décrit un phénomène avec plus de trois paramètres (un exemple typique est le traitement des sons en mélangeant beaucoup de fréquences) ?

[Où rencontre-t-on ces problèmes ?]
Le problème de la localisation d'un « centre » pour une certaine région se rencontre fréquemment dans la vie sociale et économique : installer un dépôt, une centrale d'achat, une tour de contrôle, un centre d'intervention d'urgence, … Ces situations relèvent de ce qu'on appelle la « Recherche Opérationnelle ». Elles amènent à des choix variables suivant les critères retenus : distance, accessibilité, coût, rapidité, … On essaye à la fois de trouver des modèles mathématiques réalistes et des algorithmes rapides. Les problématiques mathématiques sous-jacentes, de nature géométrique et combinatoire, s'avèrent ardues. Voici deux exemples de questions simples non résolues à ce jour.
La forme circulaire est-elle la plus coûteuse à couper en deux ? Essayons de diviser un champ de 100m^2 en deux parties de 50 m^2 avec la plus courte barrière possible (droite ou courbe). Si le champ est circulaire, on peut montrer que la plus courte barrière mesure 12,732 39… m (exactement le diamètre du champ, soit $4/\pi \times 10$ m). Pour une forme quelconque, il semble toujours possible de réussir le partage sans utiliser plus de 12,732 39… m de barrière ; peut-on le prouver ?
Pour une aire ou un périmètre donné, il n'est pas difficile de construire une forme dans laquelle le point le plus interne est très éloigné du point le plus influent. On ne sait pas pour quelle forme convexe ces deux points seraient les plus éloignés l'un de l'autre.

Une pièce à jouer

Une fois posée ainsi, la problématique s'inscrit forcément dans la durée. Le problème source un peu détaillé, des pistes ont été proposées, les élèves qui choisissent ce sujet vont devoir se l'approprier, en discuter avec leur prof, avec un autre groupe qui traite le même sujet, avec le mathématicien, échanges qui devront être mis à profit, et renouvelés : autant dire que l'année scolaire a bien du mal à y suffire.

L'échange entre pairs est une dimension importante et essentielle de l'activité d'une communauté mathématique. Pour cette raison, l'unité de base du dispositif MeJ est un ***« jumelage » de deux ateliers de recherche*** qui fonctionnent en parallèle et en interaction dans deux établissements scolaires différents : chaque atelier comporte de 5 à 25 élèves (si possible de niveaux mélangés) et (au moins) un enseignant. Un chercheur scientifique est associé au jumelage.
Cette organisation didactique met en jeu quatre institutions explicites : les deux institutions locales s'inscrivent dans une institution plus large — « l'École Secondaire » —, qui elle-même réfère à « la Communauté Scientifique », personnifiée par le chercheur professionnel.
L'activité comporte des ***séances ordinaires*** (1h30 à 2h par semaine dans chaque établissement, sous la conduite des seuls enseignants, les ateliers jumelés fonctionnant alors en parallèle), des ***séminaires*** (ces séances longues, de 3 à 6 h., réunissent tous les acteurs du jumelage et permettent confrontation, débats critiques, évaluations et suivi) et un ***congrès*** (durant 2 à 4 jours, il réunit un grand nombre de jumelages, quelques mathématiciens invités et un public extérieur. Il permet aux groupes d'exposer leurs résultats et de bénéficier d'une évaluation externe).
Les ***sujets***, communs aux ateliers jumelés, sont proposés par le chercheur en concertation avec les enseignants. À coté de thèmes numériques ou géométriques dont la mathématicité ne fait pas de doute pour les élèves, d'autres, totalement nouveaux pour eux, témoignent de la portée du questionnement mathématique et de ses dimensions culturelles ou technologiques. Les sujets sont ouverts (toujours pour les élèves, très souvent pour les enseignants, quelquefois aussi pour le chercheur). À la fois ambitieux, complexes, et accessibles, ils illustrent fréquemment d'authentiques problématiques vivant dans les mathématiques contemporaines. Des « ***questions-sources*** » offrent quelques pistes exploratoires possibles.
Les ***élèves*** travaillent durant toute l'année scolaire (soit 25 à 36 séances) en petits groupes stables (3 à 5 élèves) constitués selon les affinités entre eux et selon leurs préférences concernant les sujets. Chaque sujet est traité en principe par deux groupes « jumeaux », un dans chaque établissement. Chaque groupe tient un cahier de bord et garde ses brouillons. Les enseignants disposent également d'un cahier de bord personnel.

Cinq actes sur scène

Le **planning** obéit au rythme d'avancement des recherches. La progression, scandée par les rencontres, est découpée en 5 phases.

Séminaire 0. Organisation. Choix des sujets. Présentation du « contrat » de recherche.

> **Phase exploratoire** (*3 à 5 séances*). Exploration libre des questions-sources. Orientation.

Séminaire 1. Mise en commun, sujet par sujet ; regroupement pour un premier débat mathématique. Recentrage sur des objets de recherche pertinents. Identification de *questions-cibles*.

Phase expérimentale (*5 à 7 séances*). Exploration des questions-cibles ; pistes ; découverte de lois ; premiers résultats.

Séminaire 2. Mise en commun, second débat mathématique. Stabilisation des questions-cibles et relances.

Phase constructive (*5 à 7 séances*). Évolution des représentations. Recherche sur les questions-cibles. Enjeu de la preuve. Consolidation et structuration (conjectures, hypothèses, premières preuves ponctuelles).

Séminaire 3. Échange discussion et synthèse des résultats. Clôture de la recherche exploratoire.

Phase sélective (2 à 4 séances) Filtrage des points essentiels. Mises en forme en vue du congrès.

Congrès : communication et évaluation. Présentation des recherches (public des autres jumelages et public extérieur, mathématiciens, enseignants, parents, …). Échanges comparatifs, discussions. Projet de publication (mémoire de recherche ou exposition : sélection de résultats, répartition du travail).

Phase conclusive (*5 à 7 séances*). Synthèses, repérages de savoirs et réorganisations (institutionnalisations). Rédaction des preuves. Validations. Oeuvres finales (mémoires de recherche, posters, animations, expositions, …).

Séminaire 4. Stabilisation des œuvres. Bilan général et perspectives des ateliers.

Typiquement les ateliers MeJ sont périscolaires : ils s'adressent, hors-classe, *à tous ceux qui le souhaitent : d'âges et de niveaux différents*, les élèves « s'inscrivent au club », *quelles que soient leurs performances scolaires*. Depuis 1989, le programme MATh.en.JEANS s'est étendu (écoles primaires, enseignement supérieur) et a pu profiter de cadres institutionnels permettant à plusieurs jumelages de fonctionner sur le temps scolaire (options, « modules », travaux personnels encadrés, itinéraires de découverte, parcours différenciés, ateliers scientiques, …).

On cherche et ... on prouve

Par exemple, pour le professeur, il y a un moment dans l'année, mais pas au début, forcément, où il devra contrôler les démonstrations rédigées par les élèves.

Un exemple: la série harmonique

Ainsi, la divergence de la série harmonique ayant été démontrée, faut-il encore arriver à une rédaction publiable (par exemple sur le site Internet dans les « Comptes-Rendus » sur le site et il y a donc des allers-retours entre prof et élèves pour arriver à cette présentation) :

L'INFINI [EXTRAIT D'ARTICLE D'ELEVES]

(jumelage Lycée Racine (Paris) et Lycée Jean Jaurès (Argenteuil), 1989-1990)

[...] Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit S_n la somme des termes de (u_n) : $S_n = (1) + (1/2) + (1/3) + (1/4) + (1/5) + (1/6) + (1/7) + \ldots + (1/n)$. On s'intéresse à la somme de termes de u_n tels que :

$$10^p + 1 \leq n \leq 10^{p+1}, \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n + 1 > n$, et donc $(1/(n + 1)) < (1/n)$. Ainsi :

$$\underbrace{\frac{1}{10^p+1}+\frac{1}{10^p+2}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 10^p}}_{(10^p \text{ termes})}$$

$$>\underbrace{\frac{1}{2\cdot 10^p}+\frac{1}{2\cdot 10^p}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 10^p}}_{(10^p \text{ termes})}$$

$$>10^p \times \frac{1}{2\cdot 10^p} > \frac{1}{2}$$

De même :

$$\frac{1}{3\cdot 10^p+1}+\frac{1}{3\cdot 10^p+2}+\ldots+\frac{1}{4\cdot 10^p} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4\cdot 10^p+1}+\frac{1}{4\cdot 10^p+2}+\ldots+\frac{1}{5\cdot 10^p} > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{7\cdot 10^p+1}+\frac{1}{7\cdot 10^p+2}+\ldots+\frac{1}{8\cdot 10^p} > \frac{1}{8}$$

Donc :

$$\frac{1}{10^p+1}+\frac{1}{10^p+2}+\ldots+\frac{1}{10^{p+1}} > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8} = 1{,}075 > 1.$$

Comme p décrit $\mathbb{N}$, il existe une infinité de sommes de termes de (u_n) telles que

$$10^p + 1 \leq n \leq 10^{p+1}.$$

Toutes ces sommes de termes de (u_n) sont strictement supérieures à 1. S_n est donc calculée comme somme de « groupements de termes dont la somme est strictement supérieure à 1 ».

La suite S_n tend donc vers l'infini.

Un second exemple: trous et pavés

Le fait que MATh.en.JEANS soit une activité au long cours permet aussi aux élèves de comprendre qu'une définition n'apparaît que dans une dynamique au cours de laquelle elle s'avère efficace. C'est ainsi que cela se passe pour un élève de CM2, dans un jumelage qui comportait 13 élèves de collège (de la Sixième à la Troisième), et 12 élèves de CM2. Au fur et à mesure que la preuve avance, il est obligé d'adapter sa définition de « trou » pour prouver ses résultats et on voit ci-dessous à quelle complexité il arrive.

Sur le thème des polyminos (morceau d'échiquier constitué de plusieurs cases, concrétisé ici grâce à des allumettes), la question-source proposait l'étude de relations entre divers paramètres : nombres de côtés, de cases, de trous, périmètres, … (la problématique professionnelle est celle de la topologie algébrique).

Allumettes sur l'échiquier

(Jumelage collège-école primaire en ZEP, 1992-93).

Extraits d'un cahier de bord (26$^{\text{ème}}$ séance) [italiques et textes entre crochets sont ajoutés].

« Nb = nombre d'allumettes ; p = nombre de “ pavés ” (un *pavé* est un bloc carré de quatre cases) ;

t = nombre de “ trous ” (un *trou* est une région vide entourée d'une succession de cases du polymino, se touchant par un côté et se fermant : chaque case touche la précédente et la dernière touche la première)

n = nombre de cases

[futur théorème 1] $Nb = 3n + 1 - p - t$

[futur théorème 2] $P = 2n + 2 - 2p - 2t$

P désigne le périmètre (le nombre d'allumettes autour de la figure). »

Dans l'extrait ci-dessus, on repère des traces d'apprentissage relatif aux définitions et à l'usage des variables littérales. Les formules obtenues par les élèves ont été discutées (contenu des argumentations, formulation des énoncés). Elles sont inconnues des spécialistes, qui n'utilisent pas la notion de « *pavé* ». La démonstration finale de ces « *théorèmes* » s'appuie sur un une récurrence ascendante (découverte/inventée pour l'occasion) comportant une division en cas. Cette démonstration, essentiellement correcte (certains cas avaient initialement été oubliés), fut l'œuvre d'un élève de Cinquième, « spécialisé » au sein de son groupe.

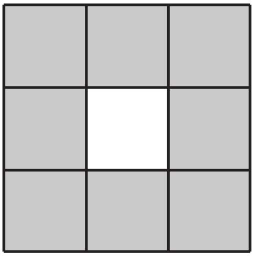
Note de la rédaction.

L'idée est de trouver des formules de calcul valables pour toute forme d'échiquier … permettant de déterminer, sans les tracer :

– le nombre nécessaire d'allumettes pour leur construction,

– le périmètre de l'échiquier obtenu en unités d'allumettes.

Exemple : 1 échiquier carré à 8 cases, la centrale étant trouée.



Les cases grises sont pleines, la blanche représente un « trou ».
Chaque case grise est délimitée par 4 allumettes.
Il y a 8 cases. (n).
Il y a 1 trou (t).
Il y a 0 « pavés » (p) : blocs carrés de 4 cases grises.

Nombre total d'allumettes pour fabriquer cet échiquier :
– par décompte : 24
– en appliquant la formule : Nb = 3 × 8 (cases) + 1 − 0 (pavés) − 1 (trou) = 24

Nombre d'allumettes « autour » de la figure :
– par décompte
– en appliquant la formule : P = 2 × 8 (cases) + 2 − 2 × 0(pavés) − 2 (trou) = 16

Chacun joue son rôle

Lors des séminaires, une communauté scientifique se met en place, regroupant tous les participants, chercheur, enseignants, élèves. Pour que cette communauté reconnaisse aux élèves la possibilité d'avancer, la démonstration perd son statut d'objectif d'enseignement pour devenir un moyen de poursuivre les recherches. Mais pour éviter que cela ne nous permette de ronronner entre nous, la présence d'un public extérieur au jumelage lors du congrès permet d'élargir cette communauté scientifique.

La vision des maths qu'ont beaucoup d'élèves, ou leurs parents, c'est que le savoir mathématiques est un tout, terminé, qui a été découpé en tranches à ingurgiter de la sixième à la terminale. Ce que vivent les élèves à travers MATh.en.JEANS ne peut laisser perdurer cette image : ils participent à une aventure actuelle, et sont confrontés à des enseignants et chercheurs qui sont bien obligés de leur dire qu'eux non plus ne savent pas. Finalement, les maths ne sont pas un savoir à ingurgiter mais une activité à mener.

C'est aussi une découverte rendue possible par le dispositif MATh.en.JEANS que de s'apercevoir que l'enseignant ne sait pas tout sur cette discipline, qu'il peut le dire, et que ça peut aider l'élève de le savoir. Bien sûr chaque enseignant est unique mais on peut quand même décrire le fonctionnement de la classe comme un faisceau de droites passant par chaque élève et l'enseignant. L'enseignant s'adresse aux élèves, à chaque élève. L'élève s'adresse à l'enseignant, et si discussion il y a entre élèves, elle passe par l'enseignant, qui donne la parole, devant lequel on n'utilise pas la langue de la cour de récréation. Dans MATh.en.JEANS, l'objectif est de constituer un réseau, dans lequel participent élèves, enseignants, chercheur, chacun avec ses capacités propres, chacun avec son rôle, aucun n'ayant de pouvoir sur le sujet traité, aucun n'ayant de pouvoir sur un autre.

Pour montrer que chacun a son rôle, qui peut être variable au cours de l'année, voici une liste de « repères » qui concerne chaque type de participant à cette activité mathématique.

Repères pour l'enseignant	Repères pour le chercheur
Présenter et rappeler les objectifs, (re)négocier les règles • Invitons les élèves à faire des mathématiques autrement, pour le plaisir ; entraînons-les à réfléchir, aidons-les à chercher, à trouver, mais ne faisons pas à leur place. • Facilitons psychologiquement et matériellement leur travail. Discutons avec eux et décidons ensemble des orientations possibles de la recherche. • N'apportons des outils de résolution qu'à la demande.	***S'informer. Concevoir et présenter des sujets. Motiver*** • Quels sont les intérêts et les attentes des enseignants et des élèves ? Quels sont les outils vraiment disponibles pour eux ? (Les jeunes sont à la fois très intelligents et très ignorants !). • Les sujets doivent avoir du sens pour les jeunes. Avec l'aide de l'enseignant, il s'agit de s'adresser à tous (thèmes et cadres variés) et de séduire : problématiques vastes, actuelles, « naturelles », abordables (au moins une piste exploratoire immédiate), vocabulaire courant, exposé vivant, …
Observer, être attentif, analyser (mémoriser, rassurer, anticiper) • Assurons-nous que le sujet est bien compris. Suivons et comprenons leur démarche. • En invitant au questionnement (« Quelle question vous posez-vous ? Quelle question me posez-vous ? »), faisons que les situations prennent du sens pour les élèves. Aidons à préciser (mathématiser) les formulations.	***Encourager, donner confiance, déculpabiliser.*** • Rien n'est évident (une question « triviale » ne l'est pas pour tous, un problème « naturel» peut paraître saugrenu, artificiel ou gratuit), mais, hors la technicité savante, aucune problématique n'est a priori inaccessible : les jeunes ont des idées et ils ne vont pas aborder la question comme nous ; des argumentations intuitives auxquelles nous n'avons pas songé peuvent s'avérer transformables en vraies preuves. • Il est normal de ne pas savoir (c'est pour cela que l'on cherche !) ; il est bon de tâtonner ; il est banal de se tromper.
Dévoluer, motiver, responsabiliser • N'apportons pas de solution ou de réponse définitive : aux élèves de se représenter les situations, d'organiser leur pensée et leur travail. La meilleure intervention est souvent le silence. • Donnons au élèves des repères dans leur travail et des moyens de contrôle (expérimentation, débats, vérification, documents). • Repérons discrètement des occasions d'apprentissage pour d'éventuelles mises au point futures. Pointons notamment les notions dont l'usage est méconnu, sans s'en étonner à haute voix.	***Populariser les mathématiques de la recherche (informer, éclairer, séduire)*** Adressons-nous au cœur et à la raison. En éliminant techniques et mots « savants », répondons à la curiosité des jeunes sur notre métier, sur notre goût des mathématiques et de la recherche (enthousiasmante, gratuite, patiente, utilitaire, esthétique, fastidieuse, créatrice, désintéressée, etc.). Éclairons, si possible, les programmes scolaires, en dégageant une cohérence et une perspective (en les reliant plutôt aux mathématiques actuelles qu'aux sujets proposés).

<table>
<tr>
<td>Faire débattre, débattre, mathématiser
• Les énoncés des élèves doivent être clairs pour tous, particulièrement en situation de débat ou de mise en commun.
• Distinguons affirmations, règles (expérimentales) et théorèmes. Mettons en doute, demandons des argumentations, des preuves. Apportons pour cela une terminologie adaptée (hypothèse, conjecture, loi, preuve, théorème, résultat).</td>
<td rowspan="2">Initier à la démarche de recherche mathématique et à la preuve, légitimer
• Ne résolvons pas à la place des élèves : c’est eux qui travaillent, qui cherchent, qui trouvent. Donnons-leur des conseils méthodologiques : apprivoiser les objets étudiés, s’informer, relier à d’autres champs, choisir ses définitions, reformuler, multiplier et trier les questions, conjecturer, adopter des hypothèses, expérimenter, envisager des exemples, des contre-exemples, conserver ses notes, faire le point, vérifier, analyser ce qui marche et ce qui ne marche pas, remettre en cause, … Montrons la particularité des règles de la rationalité scientifique.
• Une idée importante à transmettre, avec le relais des enseignants, est celle de la double approche : d’un côté, le chercheur s’attache à comprendre et à élargir ce qu’il sait en allant le plus loin possible (développements, approfondissements) ; de l’autre, il essaye de cerner la difficulté en s’intéressant au cas résistant le plus simple.
• Donnons une légitimité aux nouvelles démarches et constructions des élèves. Expliquons le statut des énoncés (définitions, axiomes, question ouverte, conjecture, loi expérimentale, théorème, démonstration) ; soulignons le rôle et le caractère provisoire des hypothèses, des notations et définitions (consistance locale, recherche d’une contradiction).</td>
</tr>
<tr>
<td>Orienter, faciliter et valider la recherche
• Informons le chercheur et décidons ensemble de certaines consignes et orientations. Expliquons aux élèves pourquoi (enlisement, déviation, évitement, absence de vérification, langage inadapté, …).
• Faisons comprendre et apprendre le fonctionnement des outils institutionnels utilisés (sans que les élèves y perdent leur motivation ni le contrôle de leur démarche).
• Avec l’aide éventuelle du chercheur, validons les résultats de la recherche, donnons leur un statut mathématique. On discutera en particulier :
– l’exactitude du vocabulaire utilisé,
– la cohérence des argumentations avec le but formulé,
– la validité des preuves, des définitions et des autres résultats,
– la pertinence des savoirs mis en jeu,
– la correspondance des résultats avec les objectifs poursuivis.</td>
</tr>
<tr>
<td>Aider, apprendre (fournir des outils)
• Répondons à la demande des élèves quant aux outils et aux documents tout en restant prudent : attention à ne pas « tuer » la recherche, à ne pas créer d’obstacles pour la compréhension de l’objet de recherche (qui ne serait vu qu’à travers le prisme de l’outil) ou pour la compréhension de l’outil lui-même (qui deviendrait un attribut de l’objet de recherche sans acquérir pour les élèves une fonction autonome).
• Comme en classe, c’est au maître de prévoir et de surmonter les difficultés liées à l’emploi d’un outil. À la différence de la</td>
<td>Diriger les recherches (alimenter, contrôler, évaluer, valoriser)
• Posons les « bonnes questions ». Expliquons pourquoi certaines pistes paraissent sans avenir, d’autres intéressantes. En coopération avec les enseignants, suggérons éventuellement d’autres approches ou outils, en expliquant leur pertinence et leurs limites. Enrichissons et organisons la recherche (documents, suggestions, théorèmes ou définitions utiles) ; Orientons les activités en distinguant les questions centrales et périphériques. Proposons des partages du travail.</td>
</tr>
</table>

classe, ce sont les élèves qui formulent leur demande (« Nous avons besoin de quelque chose qui ferait cela… »). Il sera préférable d'apporter les outils de manière décontextualisée et officielle, en expliquant leur fonction et leur technique, mais sans se prononcer sur leur pertinence pour la recherche en cours.	• Favorisons l'émergence et la conduite de *projets de recherche* : – identification et formulation de problèmes cibles, d'*objectifs révisables*, généraux et intermédiaires, – constitution de théories locales, souci de cohérence globale, – utilité d'une anticipation quant à la forme et la fonction des résultats escomptés (le chercheur novice est ignorant dans ce domaine. Que cherche-t-on ? De quel type va être le résultat ? Qu'en fera-t-on ?). • Avec les enseignants, contrôlons la *mathématisation* des sujets étudiés et la *mathématicité* des travaux menés. Vérifions et commentons les preuves, les résultats, les formulations, les outils et méthodes (intérêt, portée). Mettons en évidence les hypothèses utilisées, les concepts unificateurs, l'intérêt et la pertinence des travaux. Relevons les insuffisances : plutôt qu'un jugement d'autorité, exprimons notre doute, apportons des contre-exemples, suggérons des prolongements, des réajustements, des simplifications, des notations. Apprécions les résultats à l'aune des objectifs visés et de la maîtrise de leurs auteurs (évaluation analogue, toutes proportions gardées, à celle d'un mémoire de DEA). • Aidons aux mises au point, aux réorganisations et à l'important « *travail de deuil* » (abandon des travaux obsolètes ou des pistes trop coûteuses, sacrifice des résultats mineurs). • *Organisons et aidons la communication* : comment présenter clairement le sujet, éveiller l'intérêt du public, mettre en valeur et choisir les résultats ? Jouons le rôle du « chairman » pour libérer les jeunes conférenciers des soucis matériels et techniques lors des exposés. Comment utiliser des transparents ? Le tableau ? Le temps ? Comment rédiger un article ?

Repères pour les élèves : règles du jeu

Règle 1 : Nous sommes là pour chercher ensemble, sur des sujets bien définis. La recherche demande une certaine continuité ! On admettra donc que chacun participe régulièrement au travail et aux discussions.

Règle 2 : Nous avons du temps devant nous. Nous réfléchissons nous-mêmes, à notre manière. Nous pouvons demander conseil au professeur ou au chercheur : ils suivent et aident notre travail mais ne peuvent pas répondre à notre place. Ils ne sont pas là pour nous noter.

Règle 3 : Qui dit recherche dit équipe de recherche. Nous fonctionnerons donc sur la base de groupes de 3 ou 4 élèves, groupes qui resteront stables. Chacun fera profiter les autres de ses idées et de ses résultats.

Règle 4 : Les sujets de recherche sont proposés par le chercheur et le professeur. Mais chaque élève, ou groupe d'élèves peut suggérer de nouvelles pistes, ou de nouveaux problèmes.

Règle 5 : Pas de recherche sans mémoire. Chaque groupe a donc un cahier de recherche dans lequel il consigne ses résultats. Au début de chaque séance, il désigne un secrétaire. À la fin de chaque séance, il réserve 10 minutes pour faire le bilan de ses résultats. Le secrétaire consigne ce bilan sur le cahier, et en rend compte en début de la séance suivante.

Règle 6 : Nous discuterons périodiquement de notre sujet avec d'autres équipes de recherche avec lesquelles nous échangerons et vérifierons nos résultats. Nous rendrons publics nos résultats communs pour que d'autres puissent continuer le travail.

Règle 7 : Aucune règle n'est immuable : nous verrons ensemble, à l'usage, s'il faut en modifier, en ajouter, ou en retrancher.

Dans un tel contexte, le travail des élèves prend la forme d'une authentique « ***situation-recherche*** ».