Structure et genèse des Éléments d'Euclide

Bernard Vitrac(*)

I. En guise d'introduction : un mot sur la construction historique des mathématiques dans l'Antiquité grecque

La construction de traditions mathématiques dans l'Antiquité grecque présuppose – comme condition nécessaire – la transmission continue des connaissances pour qu'il ait pu y avoir accumulation, poursuite de questions non ou mal résolues, reprises de problèmes selon d'autres approches, réorganisations au moins partielles et récurrentes du savoir mathématique. Pour le dire brutalement, sans transmission, sans enseignement, pas de construction des mathématiques.

D'où une première difficulté : alors que les différentes sciences mathématiques – dans l'Antiquité grecque, cela signifie : géométrie, arithmétique, mais aussi astronomie, optique, harmonique, mécanique – sont assez tôt reconnues comme des disciplines à part entière – ce, dès le début du IVe siècle avant notre ère –, leur transmission a été confinée à la sphère privée. Malgré les vœux ou les prescriptions des programmes politiques de Platon, aucune cité ne s'est souciée de l'enseignement des mathématiques au-delà de l'école élémentaire – quand elle existait. Même quand la domination romaine a imposé une administration exigeant de nouvelles demandes de formation en ce qui concerne le droit, la rhétorique voire la philosophie, aux IIIe-IVe s. de notre ère, aucune chaire impériale d'enseignement des mathématiques n'a été créée. Par conséquent, la « visibilité publique » des mathématiques pendant la majeure partie de l'Antiquité grecque – du VIe s. avant notre ère au VIe s. après – a été très faible.

Combinée avec le fait que les mathématiques sont – et étaient – considérées comme une étude difficile, cette absence de « publicité » a fait que les vocations ont été rares et les mathématiciens peu nombreux. Pour les douze siècles de l'histoire grecque ancienne, on connaît les noms de trois à quatre cents personnes *qui ont eu affaire* avec les mathématiques (j'y inclus des philosophes comme Platon et Aristote, mais aussi des adversaires des mathématiques comme Protagoras ou Sextus Empiricus). Parmi elles, un certain nombre – qu'on peut bien appeler « mathématiciens » – a contribué à la production et/ou à la reproduction de résultats : un peu plus de 100 textes mathématiques – entendus en un sens très large (40, si on se limite à la géométrie et à l'arithmétique) – nous sont parvenus (voir Annexes, I). Ils sont d'extension très variable[1] et ils ont été rédigés, par une bonne quarantaine

(*) CNRS UMR 8567—Centre Louis Gernet, Paris. bernard.vitrac@gmail.com

(1) Le petit traité attribué à Héron, intitulé *Chirobaliste*, représente 2,5 pages de texte grec ; le manuel d'arithmétique de Domninos de Larissa, une quinzaine de pages. À l'opposé du spectre, l'*Almageste* de Ptolémée occupe 1150 pages dans l'édition de

d'auteurs, des débuts de l'époque hellénistique (vers 320[a]) jusqu'à la fin de l'Antiquité soit environ 9 siècles. Rien ne nous a été transmis des époques archaïque et classique (VIe-IVe siècles), sinon quelques précieux fragments et des témoignages littéraires et philosophiques.

Ces mêmes témoignages et les textes conservés nous parlent d'autres ouvrages, perdus – environ 130[(2)] – mais dont on nous transmet un titre, et ils mentionnent aussi des thématiques qui avaient sans doute été l'objet d'une ou plusieurs publications écrites, soit une fourchette de 30 à 70 ouvrages supplémentaires. En cumulant tout ça, malgré d'évidentes incertitudes méthodologiques, on aboutit à un total de 270 à 310 titres[(3)], produits par une centaine d'auteurs. Il faut noter la forte proportion d'ouvrages conservés – environ le tiers – alors que, pour le reste de la littérature antique, on évoque plutôt de 5 à 10 % d'écrits parvenus jusqu'à nous. J'insisterai aussi et surtout sur la petite taille de l'échantillon : on connaît les noms de plus de 8 000 philosophes ; les listes des écrits d'auteurs prolifiques comme Aristote ou Chrysippe transmises par Diogène Laërce comptent chacune plus de 150 titres. L'œuvre du célébrissime médecin Galien de Pergame occupe plus de 20 000 pages dans l'édition Kühn[(4)].

Un nombre total aussi faible de spécialistes implique qu'à chaque instant et en n'importe quel lieu du monde grec, les mathématiciens, au pire, étaient des individus isolés, au mieux, constituaient de tout petits groupes. Comme les préfaces de l'époque hellénistique le montrent, la vitalité d'une telle communauté était suspendue à la possibilité que les hommes et les écrits circulent à l'intérieur d'un réseau centré sur une métropole, par exemple Alexandrie[(5)]. À l'époque classique, il semble qu'Athènes ait pu jouer un rôle comparable, mais sur une échelle chronologique et géographique plus petite. Inutile de souligner que cette circulation était infiniment plus compliquée (et risquée) dans l'Antiquité qu'elle ne l'est aujourd'hui.

*

La continuité des traditions est un trait constitutif de l'histoire de la philosophie grecque ancienne telle que la décrivent les Anciens, bien au-delà de la réalité historique. On restitue des filiations parfois imaginaires entre penseurs, on postule la pérennité des principales écoles. Pour ce faire, on a même inventé un genre littéraire, celui des *Successions* (*Diadochai*), également opératoire pour la médecine et la

Heiberg, les 13 Livres des *Éléments* d'Euclide environ 800 pages, et la *Collection mathématique* de Pappus, environ 550 pages dans l'édition de Hultsch (alors qu'il manque le Livre I et une partie des Livres II et VIII).

(2) Dont une soixantaine pour la géométrie et l'arithmétique.

(3) De 115 à 130 pour la géométrie et l'arithmétique. Voir les tableaux dans les Annexes, II.

(4) Elle représente 1/8 de toute la littérature grecque conservée pour la période qui va d'Homère à la fin du IIe siècle.

(5) Je me permet de renvoyer à une étude à paraître très prochaînement : « Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens » dans *Liber amicorum Jean Dhombres*, P. Radelet-de-Grave (éd.) avec la collaboration de C. Brichard. Collection Réminiscences (nº 8). Louvain-la-Neuve, Centre de Recherches en histoire des sciences de l'Université. Turnhout : Brepols, 2008, p. 519-556.

rhétorique, qui s'appuie toutefois sur une réalité « institutionnelle » des époques classique et hellénistique – la désignation d'un « successeur » (du Fondateur) –, mais qui fut également appliqué aux premiers philosophes et savants avec beaucoup d'incertitude et d'imagination.

Une telle continuité, même reconstruite, est rare ou inexistante en mathématiques. Je ne connais que deux exemples où des témoignages suggèrent une continuité intellectuelle et institutionnelle sur (au moins) trois générations :

• L'une pour l'école qu'Eudoxe de Cnide avait fondée à Cyzique ; Ménechme et son frère Dinostrate, Hélicon de Cyzique, Polémarque et peut-être Callippe de Cyzique furent ses disciples. L'école était encore active à la charnière des III^e^-II^e^ avant notre ère, quelques 40 ans après la mort du fondateur.

• L'autre est un célèbre témoignage dans le Livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus :

> « Il (<Apollonius>) a toutefois pu ajouter certaines choses qui manquaient encore à ce lieu, parce qu'il avait eu l'imagination préalablement frappée par ce qui avait déjà été publié sur ce lieu par Euclide, et qu'il avait étudié avec les disciples d'Euclide à Alexandrie un long moment, d'où il avait acquis une disposition d'esprit non dépourvue d'expérience »
>
> (προσθεῖναι δὲ τῳ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου καὶ συσχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὃθεν ἓσχε καὶ τὴν τοιαύτην ἓξιν οὐκ ἀμαθη). (6)

À ces deux exemples, on pourrait ajouter le témoignage de Galien(7) qui rapporte que son arrière-grand-père, son grand-père et son père étaient architectes et géomètres – trois générations là aussi –, mais la transmission avait sans doute été familiale et non pas institutionnelle. Galien lui-même mit fin à cette étonnante lignée en choisissant la médecine et la philosophie, même s'il est un grand admirateur des géomètres en général et d'Euclide en particulier(8). Pour le reste, on nous dit qu'Eudoxe avait étudié avec Archytas(9). Théétète (et peutêtre Platon(10)) avait suivi l'enseignement de Théodore de Cyrène(11)… Bref, les témoignages sur la formation des mathématiciens sont rarissimes.

Il faut ajouter que le caractère essentiellement privé de l'activité mathématique a

(6) Pappus, Coll. math. VII, 678.8-12 Hultsch. Trad. Ver Eecke, p. 507. Hultsch y voyait une interpolation dans la *Collection*. Quand bien même l'indication ne proviendrait pas de Pappus, cela n'invalide pas sa valeur historique et la mention d'Aristée l'Ancien dans la portion précédant ce texte (voir Annexes, IV, Témoignage 1) présuppose certainement l'existence d'une source hellénistique.

(7) *Sur ses propres livres*, XIV. 4. Ed. V. Boudon-Millot. Paris, Les Belles-Lettres, 2007, p. 164-165.

(8) Il cite à plusieurs reprises les *Éléments*, ainsi que les *Phénomènes*. Pour un exemple, voir Annexes, IV, Témoignage 3.

(9) Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, livre VIII, § 86.

(10) *Ibid.*, livre III, § 6.

(11) La source essentielle à ce sujet est évidemment le dialogue *Théétète* de Platon

également eu comme conséquence qu'aucun auteur ancien n'a cru bon de recueillir leurs biographies comme on l'a fait pour les hommes politiques, les rhéteurs ou les philosophes. Leurs vies n'avaient rien d'édifiant et ne constituaient pas un modèle à promouvoir auprès de la jeunesse.

À la différence des médecins, il n'y avait pas de « mathématicien public » recruté par la Cité, à l'exception possible des architectes et des ingénieurs militaires, qui devaient posséder des connaissances mathématiques, mais leur sélection ne se faisait pas nécessairement sur ce critère. Par conséquent les mathématiciens sont quasiment absents des inscriptions et décrets honorifiques que l'on connaît pour d'autres sortes d'intellectuels.

Dernier constat du même genre : les papyri constituent les documents d'origine scolaire les plus proches des réalités antiques. On en connaît des milliers de fragments qui portent un passage des poèmes homériques, reflétant leur rôle primordial dans l'éducation durant toute l'Antiquité. Les extraits de Platon, les exercices de grammaire ou de rhétorique sont assez nombreux également. Seulement cinq fragments concernent les mathématiques « savantes », par ailleurs transmises dans des manuscrits médiévaux. Il faut noter que tous ces (petits) fragments portent des extraits des *Éléments* d'Euclide.

Pour conclure ces remarques, j'ajouterai que la continuité des communautés savantes dans l'Antiquité était d'autant plus importante que le support du livre ancien – autrement dit les rouleaux de papyrus auxquels je viens de faire allusion –, était fragile, du moins avant qu'on adopte définitivement, sans doute vers le IV^{e} s. de notre ère, le codex de parchemin. La simple conservation et transmission d'un texte supposait sa reproduction périodique et donc un minimum d'intérêt de la part de l'élite cultivée.

Suite du texte sur www. apmep.asso.fr :

II. Euclide
III. La genèse des *Éléments*
IV. Lecture « archéologique », exégèse et structure des *Éléments*
Conclusion

Annexes sur www.apmep.asso.fr :

I. Principaux textes mathématiques grecs conservés (au moins partiellement)
II. Quelques chiffres…
III. Œuvres d'Euclide ou attribuées à Euclide
IV. Témoignages sur Euclide
V. Structure globale des *Éléments* d'Euclide
VI. La critique des principes euclidiens
VII. Quelques « remèdes »