

Plaidoyer pour une pratique de la décomposition des nombres et du calcul à l'envers

Éric Trouillot

Une des clés pour accéder au concept de nombres : la décomposition

Le dénombrement par comptage se transmet de génération en génération depuis très longtemps. Derrière cette pratique rituelle se cache un vrai problème de sens : Pourquoi le dernier nombre prononcé lors du pointage du dernier objet d'une collection définit-il la quantité d'objets de cette collection ? C'est le fameux principe cardinal, pas si simple à comprendre pour un enfant de trois ou quatre ans.

La plupart des enfants en fin de maternelle connaissent et appliquent cette technique du dénombrement par comptage avec des performances différentes suivant la taille de la collection. En clair, à la question « Combien y a-t-il de jetons ? », l'enfant prononce souvent le mot-nombre attendu. Pour autant, peut-on affirmer que cet enfant maîtrise le concept de nombres ? Pas sûr...

Les collections-témoins et la décomposition de ce nombre sont un bon moyen pour le contrôler. L'enfant devrait être capable à l'issue de son comptage de mettre en liaison le mot-nombre prononcé avec différentes collections-témoins. Les doigts, les cartes ou les dés sont d'excellents supports pour fabriquer des collections-témoins, sorte de repère visuel numérique. C'est une première façon de vérifier si le mot-nombre prononcé est bien un nombre ou un simple numéro. Et surtout, il devrait pouvoir proposer des décompositions de ce nombre. Quatre objets, c'est aussi un objet et un objet et un objet et un objet, mais aussi deux et deux ainsi que trois et un. L'enfant capable de le montrer avec des regroupements d'objets et de le verbaliser, accède véritablement au concept de nombre. Ces pratiques peuvent se généraliser, avec dans un premier temps des collections d'objets de taille plus grande et, par la suite, mentalement sans le support visuel de la collection. Le principe de décomposition est un complément indispensable au comptage et aux collections-témoins. Rémi Brissiaud est un ardent promoteur de cette pratique qu'il propose de véritablement développer en maternelle. Brissiaud va encore plus loin (trop loin ?) en déconseillant aux enseignants de petite section de maternelle l'enseignement du dénombrement par comptage. Il me semble que dans les différentes étapes de la construction du concept de nombre chez l'enfant, il faut plutôt tendre vers un bon équilibre entre ces trois approches complémentaires :

- le dénombrement par comptage avec le pointage des objets accompagné de la récitation de la comptine numérique,
- l'utilisation de collections-témoins (doigts, cartes, dés, ...),

- la pratique de la décomposition du nombre obtenu. Par exemple, si l'enfant a compté cinq objets, lui faire fabriquer des décompositions de cinq en passant par deux regroupements de deux et trois objets ou deux regroupements de un et quatre objets

Une hypothèse qui me semble intéressante mais qui reste à démontrer : il est probable que de nombreuses difficultés en calcul constatées en primaire et au collège trouvent en partie leur explication en maternelle par un excès de comptage et/ou un manque de pratique de décomposition.

Prolonger la pratique de la décomposition en primaire et au collège

De la même façon qu'on manipule un objet mystérieux en le retournant dans tous les sens pour mieux l'appréhender et l'analyser, la décomposition d'un nombre de différentes façons donne à ce nombre plus d'épaisseur et de consistance. Elle enracine plus fortement le concept de nombre.

Après avoir découvert l'univers des entiers ou plus exactement les premières galaxies de cet univers, l'enfant découvre, dans son parcours scolaire, les opérations, sorte de machines à transformer les nombres. Au-delà de l'apprentissage des techniques opératoires de base, se pose alors pour l'élève la question centrale du sens de ces nombres et de ces opérations. Je ne peux m'empêcher d'établir un parallèle entre la décomposition des premiers nombres entiers en maternelle telle que Brissiaud le préconise et la décomposition des nombres (entiers et autres) en utilisant les quatre opérations, le principe du « compte est bon » ou le calcul à l'envers. En clair, j'ai un nombre à fabriquer, le nombre cible et j'ai à ma disposition des nombres sur lesquels je peux opérer avec les quatre opérations afin de fabriquer le nombre cible.

Depuis quelques années, on distingue désormais clairement dans les programmes le calcul mental automatisé et le calcul mental réfléchi. Le premier étant la partie en mémoire pour laquelle la réponse est immédiate alors que le second demande réflexion et choix de procédures. Le premier est stable dans le temps mais peut s'enrichir alors que le deuxième est évolutif. Ils forment, les deux réunis, une sorte de partition modulable pour chaque individu. Cette distinction est importante car elle détermine des activités en calcul mental très différentes. Par exemple : $12 + 8$, $23 + 10$, $147 + 100$, 5×8 , 16×100 devraient faire partie de la partie automatisée d'un élève de fin de primaire. Par contre, 6×15 , 11×13 , 24×25 ou $2,7 + 12,6$ sont des calculs qui à la lecture des programmes du cycle 3, font partie du domaine du calcul mental réfléchi. Ce dernier se rapproche de la résolution de problèmes, un des piliers des programmes du primaire et du collège. Il utilise le calcul mental automatisé qu'il enrichit au fur et à mesure de la pratique. En se développant, la partie automatisée libère un espace de réflexion utilisable par la partie réfléchie.

De même qu'en maternelle le comptage suivi de décompositions-recompositions d'un nombre va donner du sens au principe de cardinalité, en primaire et au collège le calcul à l'envers va donner du sens aux opérations. Une des raisons : l'enfant est acteur. Je m'explique :

En maternelle, le dénombrement par comptage est un acte rituel qui peut se pratiquer à la frontière du sens alors que l'acte de décomposition du nombre obtenu

est un choix réfléchi par l'enfant. À lui de choisir que 5 c'est aussi 3 et 2 ou 1 et 4 . En fin de primaire et au collège, le calcul direct peut aussi se pratiquer à la frontière du sens tel un automath alors qu'un calcul à l'envers implique des choix de nombres et d'opérations. Chaque année, je suis surpris d'observer de bons élèves en début de Sixième en situation de blocage devant des choix de décompositions simples. Une pratique régulière du calcul à l'envers va donner plus d'aisance en calcul mental réfléchi par un développement des connaissances en décompositions additives et multiplicatives qui pourront même s'automatiser avec le temps. Cette institutionnalisation du calcul à l'envers me paraît importante car le principe de décomposition n'est pas naturel, il doit être travaillé. Sa mise en application va permettre le développement de procédures plus complexes en calcul mental réfléchi. De plus, une étude récente (Le calcul mental entre sens et technique de D. Butlen) montre l'importance d'une pratique régulière du calcul mental réfléchi et des décompositions. Les élèves issus de classe à pratique régulière obtiennent de meilleurs résultats dans les activités nécessitant des choix opératoires : résolution de problèmes et calcul. Cette régularité dans la pratique améliore la relation aux nombres et permet une construction plus solide du sens des opérations, des propriétés des opérations ainsi que des ordres de grandeur. Les bienfaits ultérieurs sont multiples : calculs et simplification de fractions, pourcentages, calculs avec les relatifs, calcul littéral, ... Il me paraît donc important d'intégrer ces trois composantes du calcul mental dans les différentes pratiques scolaires : le calcul mental direct automatisé, le calcul mental direct réfléchi et le calcul mental à l'envers. Ce dernier englobe les décompositions additives, les décompositions multiplicatives, la distributivité et toutes combinaisons utilisant des décompositions et/ou de la distributivité.

Les pratiques

Le calcul à l'envers peut se pratiquer dès le début du primaire lorsque les premiers mécanismes opératoires sont abordés. L'oral permet de travailler le langage numérique, un levier important pour accéder au sens. L'école doit apporter un vrai plus à l'élève au niveau du langage car, dans ce domaine, les différences culturelles sont importantes. Cette gymnastique ne nécessite aucune connaissance symbolique, le passage à l'écrit n'est pas nécessaire, il peut se faire plus tardivement au moment où l'enseignant le jugera utile. Le calcul mental réfléchi est l'occasion de mise en place d'échanges dans la classe, notamment afin d'explicitier les différentes procédures. C'est un moment important pour que l'élève découvre d'autres chemins que le sien et surtout que certaines procédures peuvent se révéler plus simples ou plus rapides. Il n'est pas question de bannir ou de mettre de côté certains choix mais plutôt de mettre en avant les avantages d'une méthode. Nous savons tous qu'un élève change difficilement de méthode lorsqu'il pense en maîtriser une et que son professeur lui en propose une autre. C'est pourquoi la régularité des exercices en calcul mental réfléchi avec explicitation des méthodes est importante. Elle va permettre à l'élève de modifier éventuellement ses choix avec une certaine maîtrise du temps.

Dans les exemples de pratiques du calcul mental, un outil a fait ses preuves : l'ardoise. Elle reste un très bon support et se prête bien au calcul mental. La communication des opérations peut se faire aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. Un

exemple d'exercice simple avec ou sans ardoise, dès le début du primaire : fabrique 10 en formant une addition ou une soustraction puis avec une multiplication, par la suite une division et encore plus tard avec des combinaisons d'opérations. La taille du nombre à décomposer permet de poursuivre cet exercice jusqu'au collège. Pour enrichir le principe et se rapprocher du jeu, il suffit de proposer quelques nombres et des opérations (imposées ou non) pour atteindre le nombre cible. La dimension jeu est encore plus grande lorsque les nombres à utiliser sont issus d'un processus aléatoire (cartes, jetons, dés, ...). Dans un autre registre, le couple ordinateur-vidéoprojecteur et la salle informatique apportent un vrai plus pour la pratique du calcul mental. Dans ce cadre, les calculs sont annoncés à l'écrit. Il est simple de préparer des séances de calcul mental et de les projeter. C'est modulable à souhait. On trouve sur internet de nombreux sites qui proposent de telles séquences : mathoumateux et mathenpoche par exemple. Encore une fois, la diversité des pratiques est une des clés de la réussite de l'élève en calcul mental.

Et le jeu ?

Le calcul mental direct est indispensable pour l'apprentissage des techniques opératoires écrites. En effet, toute opération posée nécessite un minimum de connaissances en calcul mental. Le calcul écrit posé ou en ligne utilise le calcul mental. La dimension scolaire du calcul mental direct est très marquée dans la mesure où le schéma de fonctionnement est le suivant : le maître pose une question à l'élève ou à la classe qui doit proposer une réponse. Fonctionnement très simple, vérification du résultat immédiate et sans appel. Ce type d'exercices a involontairement contribué à la fabrication de cette image des mathématiques faite de rigueur et d'austérité, le monde où règne une logique implacable !

Le calcul mental à l'envers prend le contre-pied de cette image. Une proposition-réponse, plusieurs démarches possibles dont les chemins mènent à la proposition. Comme dans toute démarche à l'envers, la question du sens devient centrale et incontournable. L'automath ne fonctionne plus.

C'est ici que la dimension ludique rentre en scène. En effet, l'élève devient acteur et créateur. Tout acte de décomposition avec ou sans opération est un choix. Le jeu se met naturellement en place grâce notamment à la dimension défi. Le défi peut être individuel, je veux trouver ou me prouver mais le défi peut aussi être collectif, je veux trouver avant les autres.

Le calcul à l'envers a naturellement un ressort ludique. Les apports de cette dimension jeu sont multiples. La notion de plaisir est essentielle car elle va améliorer la qualité de la fréquentation des nombres et installer une relation amicale avec ces derniers. Il est évident que pour certains élèves, le problème se situe déjà dans la relation aux nombres, sans même parler d'opérations. Le jeu, par l'implication plus forte qu'il suscite, donne du sens aux savoirs et il peut aussi donner l'envie d'aller plus loin, il attise la curiosité.

Attention, le jeu en classe pour devenir un véritable outil pédagogique doit avoir des objectifs pédagogiques. Il me semble important de pouvoir identifier clairement les liens avec les programmes à enseigner. C'est à cette condition que la légitimité

du jeu en tant qu'outil pédagogique à part entière sera admise. Pour une analyse plus complète et détaillée, vous pouvez vous reporter à l'article que j'ai récemment écrit dans la revue en ligne Mathématique de Sésamath : Jeux et TICE, un cheval de Troie idéal pour faire des mathématiques (<http://revue.sesamath.net/spip.php?article222>).

Quelques exemples de jeux où la décomposition des nombres est très présente

– Le coffret Numériplay pour la maternelle contient trois jeux de plateau pour 2 à 4 joueurs :

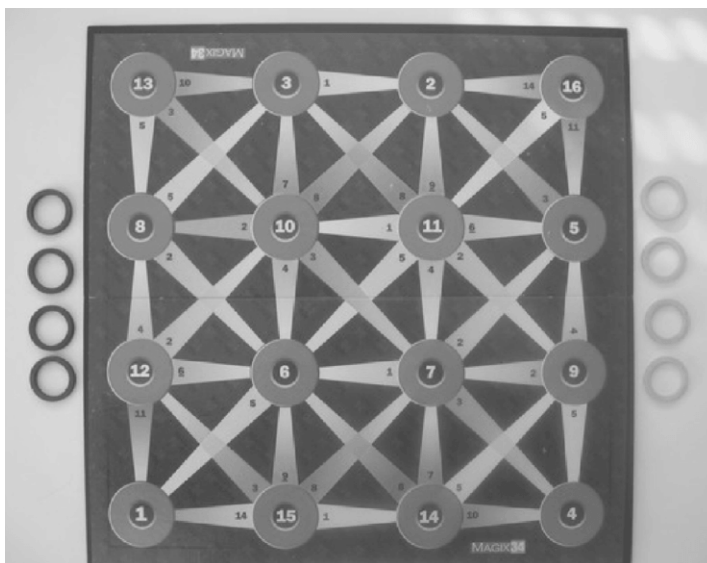
Quadruplay joue sur la décomposition du 4, Octuplay joue sur la décomposition du 8 et Equiplay sur les égalités de quantités inférieures à 5.

Dans ces trois jeux, le principe de décomposition est omniprésent.

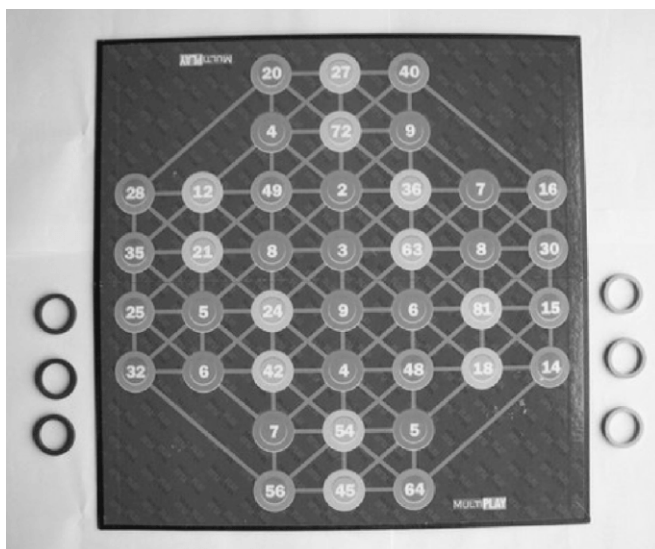
– Le coffret Multiplay pour le primaire et le collège contient trois jeux de plateau pour 2 à 4 joueurs :

Décadex aborde la décomposition du 10 avec quatre termes. Calcul mental direct et à l'envers avec décompositions additives.

Magix34 qui se joue dans un carré magique 4×4 , aborde la décomposition de 34, la somme magique, également avec quatre termes. Calcul mental direct et à l'envers avec décompositions additives.



Multiplay aborde les décompositions multiplicatives avec deux facteurs. Les multiples allers-retours entre calcul direct et à l'envers en font un jeu très intéressant. C'est encore du calcul mental direct et à l'envers.



Dans les six jeux précédents, les joueurs placent des anneaux sur le plateau de jeu. Le positionnement puis le déplacement des anneaux donnent à ces six jeux une réelle dimension stratégique.

– Mathador est un jeu de plateau à partir de 2 joueurs pour le collège. La version Junior s'adresse au cycle 3 et au début du collège.

Dans les situations de calcul du jeu, le but est de fabriquer un nombre cible (entre 0 et 99 pour Mathador et entre 0 et 69 pour Mathador Junior) en utilisant les quatre opérations et cinq nombres. C'est encore du calcul mental direct et à l'envers avec décompositions additives et multiplicatives. Les nombres sont obtenus à la suite d'un lancer de sept dés multifaces. Il est tout à fait possible avec une classe de n'utiliser que les dés, sans le plateau, pour pratiquer du calcul mental à l'envers. L'écriture des nombres au tableau permet à toute la classe de jouer. Dans l'exemple ci-dessous, il faut fabriquer 66 avec 1 ; 6 ; 9 ; 6 et 14.



– Trio est un jeu de calcul à partir de 2 joueurs pour le collège.

Il se compose de 49 jetons carrés comportant un nombre entre 1 et 9 à disposer aléatoirement en un carré 7×7 . Le but est de fabriquer un nombre cible (entre 1 et 50) écrit sur un jeton rond qui est tiré au hasard. Il faut toujours utiliser trois nombres alignés dans la grille de jeu. Le cadre de jeu est du calcul mental direct et à l'envers avec décompositions additives et multiplicatives.



Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Il s'agit de jeux que je connais bien et que je pratique régulièrement. Les règles ci-dessus sont très simplifiées, pour plus de détails et d'informations sur leurs utilisations pédagogiques, il vous suffit de faire une recherche internet, notamment sur le site de Mathador. D'autres jeux sur le thème de la décomposition se trouvent dans les brochures Jeux de l'APMEP. À partir de la brochure 5, elles présentent l'avantage d'être en format A4 donc photocopiables. La brochure Jeux 5 permet de fabriquer le jeu Trio. De nombreux jeux numériques sont aussi dans Jeux 2.

Pour l'élève, l'ordinateur est naturellement associé au jeu. C'est un outil supplémentaire dans la palette de l'enseignant. Parmi les nombreux sites internet qui proposent des jeux numériques de qualité, citons : Mathématiques Magiques (<http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/>) et Kidimath (<http://kidimath.sesamath.net/>), nouveau site de Sésamath qui propose des jeux en ligne. Un zoom sur une variante de Mathador qui est en ligne sur le site Mathador (<http://www.mathador.fr>) : Cette variante présente la particularité d'associer des points en fonction des opérations utilisées dans les calculs. Le système est le suivant : une addition, une soustraction, une multiplication et une division rapportent respectivement 1 point, 2 points, 1 point et 3 points. Les deux opérations naturelles

et fondatrices de notre système de numération ne rapportent qu'un point, par contre les deux opérations contraires et donc moins naturelles rapportent deux et trois points. Ce système de comptage incite fortement à utiliser des soustractions et des divisions en cherchant à complexifier son calcul.

Par exemple, pour fabriquer 18 avec 3 ; 5 ; 11 ; 6 et 1 : $3 \times 6 = 18$ rapporte 1 point (une multiplication) alors que $6 \times 3 : 1$ rapporte 4 points (une multiplication et une division) et $6 \times 5 - 11 - 1$ rapporte 5 points (une multiplication et deux soustractions). Une partie se joue en dix coups qui correspondent à dix lancers de dés. Le joueur totalise ses points au fur et à mesure. Il y a aussi des bonus de points pour la rapidité. Une attention particulière pour le coup Mathador qui rapporte 13 points. Pour le réaliser, il faut utiliser les cinq nombres et les quatre opérations chacune une fois. Avec l'exemple du 18 ci-dessus, on peut le réaliser en faisant : $11 \times 6 : 3 - 5 + 1$. Cette variante de Mathador peut aussi se pratiquer en classe en n'utilisant que les dés. La gymnastique neuronale est de grande qualité car il s'opère une sorte de synthèse entre automatisme, rapidité, calcul réfléchi, décomposition, ordre de grandeur et sens des opérations. Je vous invite à tester !

Conclusion

L'importance de la maîtrise de fondamentaux en calcul mental pour le futur citoyen n'est plus à démontrer et dépasse largement le simple cadre scolaire. La récente mise en avant dans les programmes d'une partition du calcul mental direct entre partie automatisée et partie réfléchie va nécessiter des années de pratique avant de bousculer l'image monolithique du calcul mental. Pour aller encore plus loin dans la quête du sens, je propose d'associer à la pratique du calcul mental direct une partie complémentaire : le calcul à l'envers. Pour cela, il suffit d'intégrer dans les diverses pratiques d'enseignement du calcul mental ces trois dimensions et ceci à tous les niveaux du parcours scolaire obligatoire : de la maternelle à la fin du collège. De même que le calcul mental automatisé et le calcul mental réfléchi interagissent entre eux et se nourrissent l'un de l'autre, le calcul à l'envers va enrichir le calcul mental direct et enraciner plus fortement le sens des opérations, le sens des nombres et les propriétés des opérations. Une pratique régulière du calcul mental en intégrant harmonieusement ces trois dimensions consolide la relation aux nombres et aux opérations.

Ces bases numériques solides sont un capital confiance qui doivent permettre à l'élève de rentrer avec plus d'aisance dans la résolution de problèmes, de pratiquer plus naturellement le tâtonnement raisonné et, plus généralement, de développer ses capacités dans l'univers des nombres.

Suite page 754

Bibliographie

- *Le comptage* de Catherine Van Nieuwenhoven, De Boeck Université.
- *Premier pas vers les maths* de Rémi Brissiaud, Retz.
- *Le calcul mental entre sens et technique* de Denis Butlen, Pufc.
- *Jeux et TICE, un cheval de Troie idéal pour faire des mathématiques*, revue Mathématique n° 15.
- *Mathématiques et jeux au collège*, Éric Trouillot, Jocelyne Richard, Didier Faradji et Philippe Le Borgne, CRDP de Franche-Comté et Hachette.
- Les brochures Jeux de l'APMEP.
- Coffret Numériplay, CRDP de Franche-Comté
- Coffret Multiplay, CRDP de Franche-Comté
- Mathador et Mathador Junior, CRDP de Franche-Comté