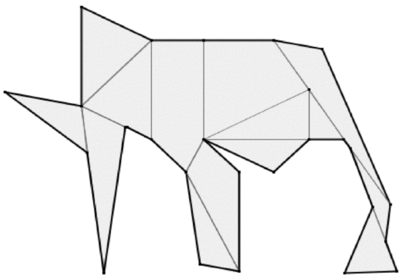
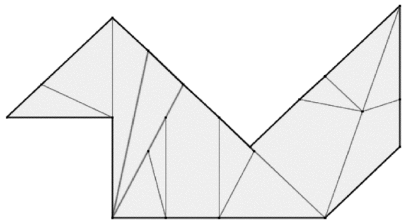
Un puzzle chargé d'histoire

Pierre Legrand





Cet éléphant et cette cocotte sont deux exemples de figures issues d'un même puzzle, le plus ancien à être historiquement attesté.

Cet objet, appelé *Ostomachion* (ou *Stomachion*) par les Grecs et *Loculus* par les Romains, est l'œuvre d'Archimède(1). Le nom latin signifie « petit endroit » (ricaneurs s'abstenir). Le mot grec *Ostomachion* est défini ainsi par le dictionnaire Bailly, bible des hellénistes : « jeu de quatorze pièces d'ivoire qu'on disposait pour former diverses figures ». Ses racines seraient *ost*- et *mach*-, respectivement *os* et *combat* (le combat des os).

Le but de cet article est double : présenter une prestigieuse relique, montrer une partie des usages que l'on peut en faire au collège et au lycée, … voire au-delà. Il ne demande pour être abordé d'autres connaissances que celles de la classe de quatrième, essentiellement la version minimale du théorème de Thalès enseignée dans cette classe et la formule donnant l'aire d'un triangle comme demi-produit de la base par la hauteur.

1. Construction des pièces du puzzle

Première étape (figure 1)

Dessinons un carré ABCD ; appelons E le milieu de BC et F celui de AD. Traçons le segment EF. Nous allons d'abord découper le rectangle ABEF.

Traçons le segment BF. On appelle L et G respectivement les points d'intersection des segments BF et EF avec la diagonale AC. Traçons le segment AG.

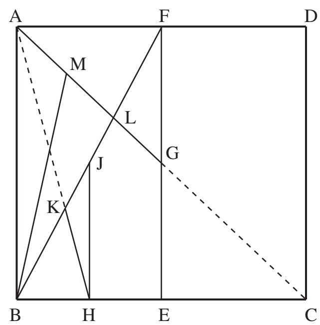


figure 1

(1) Pour l'histoire rocambolesque de sa redécouverte, voir sur le site de l'APMEP l'article de M.-J. Pestel et M. Criton, *2000 ans d'énigmes mathématiques*.

Soit H le milieu de BE et J le point où la perpendiculaire en H à BE coupe BF ; on trace le segment HJ. On trace de même le segment HK, où K est le point du segment BF tel que H, K et A soient alignés. Enfin, si on appelle M le milieu du segment AL, on trace le segment BM.

On a ainsi partagé le rectangle ABEF en sept parties (six triangles et un pentagone).

Seconde étape (figure 2)

Découpons maintenant le rectangle FECD. On trace les segments FC et GC. Soit P le point d'intersection des droites DE et FC ; on trace le segment PE. On appelle Q le point d'intersection des droites AC et DE. Si N est le milieu de CD, on trace le segment PN. Enfin, si R est le point du segment CD tel que B, P et R soient alignés, on trace le segment PR.

On a ainsi partagé le rectangle FECD en sept parties (cinq triangles et deux quadrilatères).

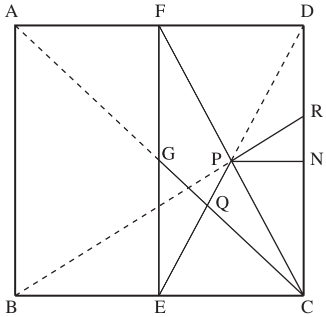


figure 2

Le puzzle (figure 3)

Au total, on a découpé le carré ABCD en quatorze morceaux : onze triangles, deux quadrilatères, un pentagone.

J'ai conservé dans la description de ce puzzle la figure et le schéma de construction d'origine[(2)] ; j'ai seulement séparé plus nettement les deux étapes de la mise en place et un peu modernisé le langage. J'ai modifié les noms de certains points, essentiellement pour les « latiniser », en remplaçant par exemple les six premières lettres de l'alphabet grec A, B, Γ, Δ, E, Z par les six lettres A, B, C, D, E, F.

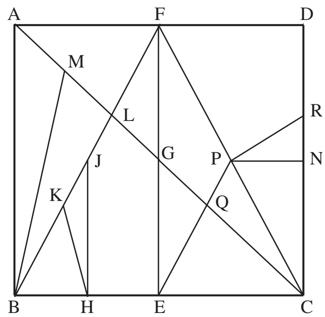


figure 3

Les intentions d'Archimède

La raison pour laquelle un génie de cette taille a pris la peine d'étudier cette amusette reste obscure. On ne sait d'ailleurs s'il l'a lui-même bâtie ou s'il a vu dans un jeu déjà existant une situation mathématique digne d'intérêt. On peut cependant observer qu'il a fabriqué une autre récréation mathématique (beaucoup plus coriace d'ailleurs) : le fameux « problème des bœufs ».

La seule chose que l'on sache de façon certaine est que, selon la conclusion d'Archimède lui-même, « la figure entière ΑΒΓΔ [ABCD pour nous] est partagée en quatorze parties commensurables avec elle ; et c'est ce que nous voulions ». L'idée

(2) Telles qu'elles figurent dans les *Œuvres complètes d'Archimède*, traduites par Paul Ver Eecke [6].

était donc de montrer que l'aire de chacun des morceaux était une fraction (simple, d'ailleurs) de l'aire du carré initial.

Peut-être ce petit problème entrait-il dans le cadre de ses réflexions sur le rationnel et l'irrationnel, de même que le problème des bœufs était sans doute lié à ses réflexions sur les très grands nombres.

Les Anciens semblent bien n'y avoir vu qu'un jeu (assez populaire dans la Gaule romaine), permettant de reconstituer avec les quatorze pièces une variété de figures géométriques, humaines, animales et autres.

2. Usages possibles en classe

Notons pour commencer que, si l'on juge la figure trop complexe, il est toujours possible de se limiter à la construction et à l'étude des sept pièces de la moitié gauche ou des sept pièces de la moitié droite.

Ces deux constructions peuvent être rendues totalement indépendantes en définissant G comme milieu de EF et R comme le point de CD tel que $DR = \frac{1}{3}DC$.

Un exercice de dictée

Donner par écrit ou – plus perfide – verbalement le texte définissant la figure (ou une de ses moitiés) et demander aux élèves de faire le tracé.

Étude géométrique de la figure

Par applications successives du théorème sur la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on voit que J est le milieu du segment BF, puis que J, G, P, N sont alignés sur une parallèle à BC et que les trois segments JG, GP et PN ont même longueur, qui est le quart du côté du carré.

Le théorème (classe de quatrième) sur les segments déterminés par deux droites parallèles et deux droites sécantes permet de préciser la position de plusieurs points :

- en considérant les triangles LFA et LBC, puis les triangles QEC et QDA, on voit que L et Q partagent la diagonale AC en trois segments de même longueur ; de plus G, centre du carré, est le milieu de LQ ;
- en considérant les triangles KHJ et KAB, on montre de même que KB = 2 KJ. Il en résulte que K est au tiers du segment BF à partir de B ; mais L est au tiers du segment BF à partir de F (voir les triangles LFA et LBC), donc J est le milieu de KL ;
- enfin, en considérant les triangles RPN et RBC, on voit que $\frac{RN}{RC} = \frac{PN}{BC}$; donc RC = 4 RN, d'où l'on tire que R est au tiers du segment ND à partir de N.

N.B. : Les raisonnements se simplifient dans une classe possédant la notion d'homothétie.

Étude analytique (figure 3 bis)

Définir deux axes Bx et By passant respectivement par C et A et choisir les unités de sorte que $\overline{BC} = 12$ et $\overline{BA} = 12$. Il est alors aisé de calculer les coordonnées de tous les points ; le choix des unités fait que ces coordonnées sont entières.

Pour ne pas surcharger les tracés, le quadrillage de la figure ci-contre a été fait de deux en deux.

Les calculs sont simples, mais permettent une bonne révision des coordonnées d'un milieu, de l'équation de la droite joignant deux points, de l'intersection de deux droites.

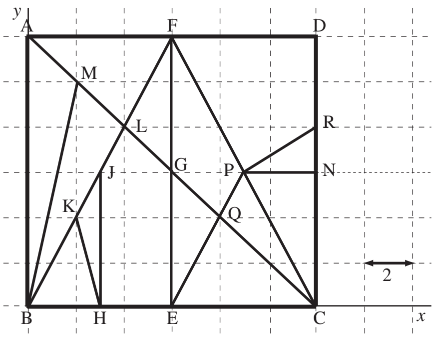


figure 3 bis

Calcul des aires des pièces

Les sept pièces de la moitié gauche

Nous désignerons par a le côté du carré et par S(UV…W) l'aire du polygone UV…W. Nous chercherons les aires des quatorze pièces en allant de la gauche vers la droite.

De $AM = \frac{1}{6}AC$, on déduit que la distance de M à la droite AB est le $\frac{1}{6}$ de la distance de C à B. Il en résulte que $S(AMB) = \frac{1}{6}S(ACB) = \frac{a^2}{12}$.

Les deux triangles AMB et MLB ont même hauteur issue de B et des bases de même longueur, d'où $S(MLB) = S(AMB) = \frac{a^2}{12}$.

De $AL = \frac{1}{3}AC$, on déduit que la distance de L à la droite AD est le tiers de la distance de C à AD. Comme de plus $AF = \frac{1}{2}AD$, il vient $S(ALF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}S(ACD) = \frac{a^2}{12}$.

On contrôle que la somme des trois aires ci-dessus est bien $\frac{a^2}{4}$, aire du triangle ABF.

Intéressons-nous maintenant aux deux triangles HBK et HKJ ; ils ont même hauteur issue de H que le triangle HBJ et leurs bases BK et KJ valent respectivement $\frac{2}{3}\mathrm{BJ}$ et $\frac{1}{3}\mathrm{BJ}$. Leurs aires sont donc respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ de celle de HBJ, triangle rectangle de côtés $\frac{a}{4}$ et $\frac{a}{2}$. D'où $\mathrm{S(HBK)} = \frac{a^2}{24}$ et $\mathrm{S(HKJ)} = \frac{a^2}{48}$.

On voit de même que l'aire du triangle FLG est le tiers de celle du triangle FAG, qui est le huitième de celle du carré : $\mathrm{S(FLG)} = \frac{a^2}{24}$.

Nous avons ainsi les aires de six des sept pièces du rectangle ABEF. L'aire de la septième, le pentagone EGLJH, s'obtient par différence ; elle vaut $\frac{7a^2}{48}$.

Les sept pièces de la moitié droite

Les triangles EQG et EQC sont symétriques de FLG et FAL respectivement par rapport à G. Donc $\mathrm{S(EQG)} = \frac{a^2}{24}$ et $\mathrm{S(EQC)} = \frac{a^2}{12}$.

Les triangles ECG et ECP ont même base EC et des hauteurs de même longueur $\frac{a}{2}$, donc ils ont même aire. On en déduit que S(CQP) = S(EQG), donc que $\mathrm{S(CQP)} = \frac{a^2}{24}$.

L'aire du quadrilatère FGQP s'obtient alors par différence entre l'aire $\frac{a^2}{4}$ du triangle FEC et la somme des trois aires que nous venons de calculer, d'où $\mathrm{S(FGQP)} = \frac{a^2}{12}$.

Reste à voir les trois pièces dont le groupement donne le triangle FDC, d'aire $\frac{a^2}{4}$. Les deux triangles NPC et NPR sont rectangles en N et nous connaissons la longueur des côtés de l'angle droit. On obtient $\mathrm{S(NPC)} = \frac{a^2}{16}$ et $\mathrm{S(NPR)} = \frac{a^2}{48}$.

On en tire par différence $\mathrm{S(FPRD)} = \frac{a^2}{6}$.

Nous donnons ci-contre (figure 4) pour chaque pièce son aire en quarante-huitièmes de l'aire du carré.

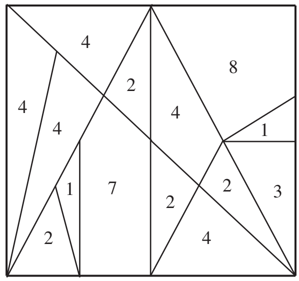


figure 4

N.B. 1 : Dans le cadre de l'étude analytique faite pour $a = 12$, et avec de grands élèves qui connaissent la formule $\frac{1}{2}|xt - yz|$ pour l'aire du triangle construit sur les vecteurs donnés par (x, y) et (z, t) dans un repère orthonormal, les aires des pièces triangulaires peuvent être immédiatement calculées ; les autres s'en déduisent.

N.B. 2 : Avec des étudiants, on peut utiliser le théorème de Pick(3) pour déduire directement de la figure tracée sur un quadrillage l'aire de chacun des morceaux.
Rappelons ce théorème :
On suppose le plan muni d'une grille $\mathcal{G}$ formée de tous les points à coordonnées entières d'un repère orthonormal(4) donné. Soit un polygone $\mathcal{P}$ dont tous les sommets sont éléments de $\mathcal{G}$; l'aire S de $\mathcal{P}$ est donnée par la formule :

$$\mathrm{S} = \mathrm{I} + \frac{1}{2}\mathrm{B} - 1$$

où I est le nombre de points de $\mathcal{G}$ intérieurs à $\mathcal{P}$ et B le nombre de points de $\mathcal{G}$ (sommets compris) situés sur le bord de $\mathcal{P}$.

N.B. 3 : On peut calculer sans difficulté les angles aux sommets des différentes pièces à partir des coordonnées des sommets : il suffit d'utiliser, pour deux vecteurs (x, y) et (x', y') d'angle orienté θ, la formule $\tan\theta = \dfrac{xy' - yx'}{xx' + yy'}$, ce qui permet d'affirmer que les pièces du puzzle ont toutes des angles à tangente rationnelle (à condition d'y inclure les angles droits, de tangente infinie)(5).

Utilisation de l'Ostomachion comme puzzle

Reconstitution du carré

On voit aisément que le carré de base peut être reconstitué de différentes façons.

Il y en a d'évidentes, comme celle que l'on obtient à partir de la figure 3 en échangeant les deux moitiés droite et gauche du carré, en faisant tourner l'une de ces moitiés de 180° autour de son centre ou encore en échangeant le triangle CNP avec la

(3) On trouvera une démonstration (un peu sommaire) sur la version anglophone de *Wikipedia.*
(4) Le théorème reste valable avec un repère quelconque, en prenant comme unité d'aire le parallélogramme de base.
(5) Les seuls angles à mesure rationnelle en degrés et à tangente rationnelle étant les multiples de 45°, les angles au sommet des pièces autres que 45° et 90° ont tous une mesure en degrés irrationnelle.

réunion des deux triangles BHK et HKJ.

Si on s'autorise à retourner les pièces sens devant derrière, on obtient d'autres solutions immédiates : par exemple en retournant l'une des deux moitiés rectangulaires autour de son grand axe ou de son petit axe, en retournant l'une des deux moitiés séparées par la diagonale, en permutant les quatre triangles FAB, FDC, FEB, FEC (avec retournement pour certains si nécessaire).

Mais il y en a beaucoup d'autres. Un certain Cutler s'est attaqué en 2003 au problème, muni d'un petit programme, d'un gros ordinateur et d'une énorme patience. Il a trouvé 536 configurations [4] non superposables. La plupart respectent un découpage du carré en deux rectangles de même taille, mais une quarantaine d'entre eux ne le respectent pas. On trouvera ci-après (figures 5 et 6) deux exemples de ces derniers.

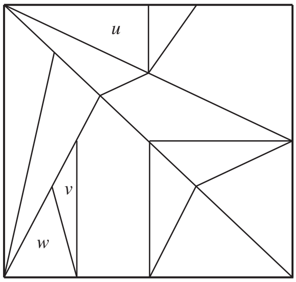


figure 5

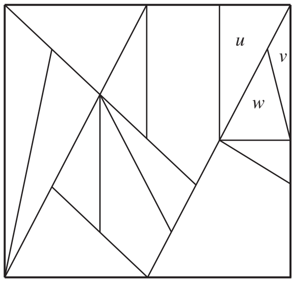


figure 6

Remarque : un exercice intéressant est de faire repérer par les élèves, sur une quelconque réalisation du puzzle (éléphant, cocotte, figure 5 ou 6, etc.), les pièces qu'il a fallu retourner et non pas faire seulement glisser à partir de la configuration de base.

Noter que dans la figure 5 :

1) les quatre triangles formant le carré sud-est peuvent être placés de huit façons différentes ;

2) par retournement d'un des deux grands triangles limités par la diagonale on obtient une autre solution ;

3) le triangle marqué u peut être permuté avec la paire de triangles v et w.

De même, dans la figure 6, les trois triangles marqués u, v, w peuvent être différemment placés dans le rectangle qu'ils recouvrent. Trois autres pièces peuvent être simultanément déplacées sans toucher aux onze autres ; nous laissons au lecteur le plaisir de les découvrir.

Autres figures [2] [3]

Il est possible de faire jouer les élèves à fabriquer d'autres figures soit géométriques (triangle rectangle isocèle, losange, parallélogramme, trapèze isocèle, hexagone convexe), soit humaines (diverses variétés de danseurs) ou animales.

Bibliographie

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Ostomachion
Traduction en anglais du texte d'Archimède (traduction très libre de la traduction allemande de la traduction arabe de l'original, celui-ci étant en grande partie perdu).

[2] www.geocities.com/tangramfan/stomachion.html
Une cinquantaine de figures réalisables avec les quatorze pièces … sans les solutions.

[3] www.cassetete.org/archives/514
17 figures accompagnées de leur solution (cliquer deux fois sur la minuscule image pour l'agrandir).

[4] www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html
Les 536 façons de reconstituer le carré.

[5] E. Fourrey : *Curiosités géométriques*, chapitre III, § 1.
Livre érudit et distrayant dont la première édition est de 1907 ; réédité en 2001 chez Vuibert avec une préface d'Évelyne Barbin.

[6] Les œuvres d'Archimède :
L'édition bilingue publiée par les Belles-Lettres (quatre tomes, le *Stomachion* étant dans le tome III) a plus d'intérêt pour les hellénistes que pour les scientifiques.
La traduction de Paul Ver Eecke (*Les œuvres complètes d'Archimède*, chez Vaillant-Carmanne, Liége) est préférable, car elle est accompagnée de notes très éclairantes, mais elle est épuisée et chère. À ne pas manquer si on peut l'emprunter dans une bibliothèque universitaire.