Sur l'invention des quaternions

Jean Lefort(*)

La plupart des mathématiciens connaissent l'histoire d'Hamilton découvrant brusquement le 16 octobre 1843 à la traversée d'un pont la règle régissant la multiplication des quaternions $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, à savoir $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$. Mais si Hamilton a eu une idée lui permettant d'achever la théorie, il y avait auparavant une longue maturation et ce jour là ce n'est que le tout dernier maillon qu'il mettait en place et un bien petit maillon d'une longue chaîne de démonstrations et de réflexions.

Pour comprendre comment fonctionnent les mathématiques, on a l'habitude d'étudier les démonstrations. Mais celles-ci, toutes faites et souvent retravaillées par des siècles d'études, ne permettent que rarement de comprendre comment elles ont été découvertes. Le but de cet article est justement de montrer comment Hamilton a su exploiter ses propres erreurs pour arriver à ses fins. Comme un mathématicien, aussi génial soit-il, n'est pas hors de son temps, nous commencerons par essayer de comprendre l'esprit des mathématiques en son temps, pour ensuite analyser la démarche d'Hamilton, démarche dont il nous a laissé de nombreuses traces dans ses écrits.

La construction des quaternions aujourd'hui

Aujourd'hui le corps des quaternions est très souvent présenté comme le premier exemple de corps non commutatif. On le note habituellement H en l'honneur d'Hamilton. On peut l'introduire de diverses manières. Nous en donnons quatre et le lecteur pourra vérifier que ces formes sont isomorphes et qu'elles correspondent bien à un corps non commutatif.

1) H est l'ensemble des combinaisons linéaires réelles des quantités symboliques 1, i, j, k (c'est-à-dire des éléments de la forme $a1 + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ où a, b, c, d sont réels) avec les règles suivantes : la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition, 1 est élément neutre, et enfin :
$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$
On confond $a1$ avec a. On en déduit facilement que $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$ et que $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$ (par multiplication à droite ou à gauche des relations précédentes par l'une des trois quantités i, j, k) ainsi que les relations obtenues par permutation circulaire. On vérifie alors que $\dfrac{a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ est l'inverse de $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$. La quantité $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est le carré de la norme du quaternion.

2) H est l'ensemble des couples de complexes (x, y) avec les deux lois suivantes : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et $(x,y)\times(x',y')=\left(xx'-\overline{y'}y, y'x+y\overline{x'}\right)$, qui ressemble beaucoup à la définition des complexes comme couples de réels.

(*) jlefort.apmep@wanadoo.fr

L'inverse de (x, y) est alors $\dfrac{\left(\bar{x}, -y\right)}{x\bar{x} + y\bar{y}}$.

3) H est le sous ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 4 de la forme $\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$ muni des opérations habituelles sur les matrices.

4) H est l'ensemble des combinaisons linéaires réelles des quatre matrices carrées complexes d'ordre 2 : $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$, muni des opérations habituelles sur les matrices.

L'environnement mathématique au début du XIX^e^ siècle

Si l'analyse commence à prendre son indépendance, les mathématiques restent très géométriques. On peut dire qu'un objet mathématique n'acquiert ce statut d'objet mathématique que si justement on peut l'interpréter géométriquement. Or les nombres complexes viennent justement d'obtenir ce certificat géométrique grâce à l'interprétation de Caspar Wessel dès 1799, mais qui passe inaperçue car publiée en danois, de Gauss mais qui ne publie qu'en 1831 et surtout d'Argand (et accessoirement et indépendamment de Bué) qui donne l'interprétation en module et argument dès 1806, interprétation reprise par Legendre qui en fait une savante publicité dès 1813 dans les Annales de Gergonne.
On se rend alors compte que les complexes permettent le calcul géométrique dans le plan et simplifient souvent la résolution de nombreux problèmes en les ramenant à un simple calcul algébrique.
Devant le succès des nombres complexes pour l'étude de la géométrie plane, de nombreux mathématiciens vont tenter de trouver un analogue aux complexes pour l'espace. Nous allons extraire de toutes les recherches et tentatives d'Hamilton l'essentiel de ce qui l'a conduit à créer les quaternions.

Une première tentative d'Hamilton

Vers 1835, assez naturellement, Hamilton écrit (a, b, c) sous la forme $ax_1 + bx_2 + cx_3$ avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$ et $x_3 = (0, 0, 1)$. Il se rend alors compte que pour calculer le produit de deux tels triplets, en supposant que la distributivité a lieu, il lui faut définir les produits $x_i \times x_j$ qui, *a priori*, sont également des triplets du style $\alpha_{ij}x_1 + \beta_{ij}x_2 + \gamma_{ij}x_3$. Cela veut dire qu'il y a 27 coefficients constants à déterminer. À l'instar de ce qui a été fait pour les complexes, Hamilton imagine facilement que x_1 est ce que nous appellerions aujourd'hui un élément neutre. Cette hypothèse détermine 15 coefficients. Il ajoute ensuite l'hypothèse de commutativité, ce qui fait qu'il ne lui reste plus que 9 coefficients à trouver :

$$\begin{cases} x_2^2 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x_2x_3 = dx_1 + ex_2 + fx_3 \\ x_3^2 = gx_1 + hx_2 + jx_3 \end{cases}$$

Comme Hamilton impose assez naturellement l'associativité, ces 9 coefficients ne sont pas indépendants. Cela se voit en comparant $(x_2)^2x_3$ et $x_2(x_2x_3)$ d'une part, puis $(x_3)^2x_2$ et $x_3(x_3x_2)$ d'autre part ce qui conduit aux cinq relations :

$$\begin{cases} d + ef = ch \\ ae + df = bd + cg \\ ah + dj = de + fg \\ ce + f^2 = a + bf + cj \\ fh + e^2 = g + bh + ej \end{cases}$$

Il est donc possible d'exprimer les coefficients en fonction de 4 d'entre eux convenablement choisis. Ensuite il faut fixer arbitrairement ces 4 coefficients. Ainsi en comparant les deux dernières équations, on peut prendre $f = h$, $c = e$ et $a = g$, ce qui impose ensuite $d = 0$, puis $e^2 + f^2 = a + bf + cj$. Hamilton va expérimenter plusieurs choix. Étudions avec lui l'un d'entre eux pour voir la difficulté à laquelle il se heurte.

Il prend $a = 1, b = \beta - \beta^{-1}, c = 0, d = e = 0, f = \beta, g = 1, h = \beta, j = \gamma$.

C'est-à-dire qu'il a

$$\begin{cases} x_2^2 = x_1 + \left(\beta + \beta^{-1}\right)x_2 \\ x_2x_3 = \beta x_3 \\ x_3^2 = x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \end{cases}$$

Il étudie alors le produit de deux triplets arbitraires

$$\left(mx_1 + nx_2 + px_3\right) \times \left(rx_1 + sx_2 + tx_3\right)$$

qui vaut

$$\left(mr + ns + pt\right)x_1 + \left(ms + nr + \left(\beta + \beta^{-1}\right)ns + \beta pt\right)x_2 + \left(mt + pr + \beta\left(nt + ps\right) + \gamma pt\right)x_3 .$$

Or en prenant $n = \beta m$, $r = -\beta s$ et $t = 0$, il remarque que le résultat est nul. Il vient de découvrir des diviseurs de zéro, ce qui le conduit à rejeter le choix fait. Malheureusement d'autres choix font également apparaître des diviseurs de zéro, ce qui l'amène à penser que c'est toujours le cas. Il lui faut donc chercher dans une autre direction.

L'analyse de ses erreurs et la découverte

Après avoir essayé d'autres méthodes sur lesquelles nous n'insisterons pas, Hamilton revient à l'idée des triplets et cherche à comprendre pourquoi il n'aboutit pas.
Il écrit dorénavant ses triplets sous la forme $x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z$ qui est une extension de l'écriture d'un nombre complexe. Il impose assez naturellement $\mathrm{i}^2 = -1$ et il interprète géométriquement ce -1 comme un demi-tour autour de l'axe OZ. Par analogie, il pose $\mathrm{j}^2 = -1$ où ce -1 est maintenant interprété comme un demi-tour autour de l'axe OY. Ce qui veut dire que les plans XOY et XOZ sont identifiés à $\mathbb{C}$, OX étant dans les deux cas l'axe réel.
Par ailleurs, Hamilton veut que le produit des normes soit égal à la norme du produit où le carré de la norme de $x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z$ est évidemment $x^2 + y^2 + z^2$. Et, dans un premier temps, il conserve les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité. Cela lui permet d'écrire :

$$(a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c)(x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z)=(ax-by-cz)+\mathrm{i}(ay+bx)+\mathrm{j}(az+cx)+\mathrm{ij}(bz+cy),$$

toute la question étant de connaître la valeur du produit ij. Comme de façon implicite il cherche une loi interne, il propose que ce soit également un triplet qu'il écrit sous la forme :

$$\mathrm{ij}=\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma.$$

Il suppose alors que les coefficients α, β, γ sont des constantes qu'il cherche à évaluer. Pour cela il va étudier le cas particulier où b et c sont proportionnels respectivement à y et z (c'est-à-dire que $bz = cy$). Dans ce cas il trouve

$$(ax-by-cz)+\mathrm{i}(ay+bx)+\mathrm{j}(az+cx).$$

> Pour arriver à ce résultat, Hamilton identifie tout plan contenant OX à $\mathbb{C}$, OX étant l'axe réel, l'axe imaginaire étant dans le plan YOZ.
> Utilisons le vocabulaire actuel pour comprendre sa démarche. Pour évaluer le produit de (a, b, c) par (x, y, z), il se place dans le repère orthonormé $\mathrm{I} = (1, 0, 0)$, $\mathrm{J}=\dfrac{(0,b,c)}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\mathrm{K}=\dfrac{(0,-c,b)}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Les deux vecteurs s'écrivent alors $a\mathrm{I}+\sqrt{b^2+c^2}\,\mathrm{J}$ et $x\mathrm{I}+\dfrac{y}{b}\sqrt{b^2+c^2}\,\mathrm{J}=x\mathrm{I}+\dfrac{z}{c}\sqrt{b^2+c^2}\,\mathrm{J}$. En identifiant I à l'unité réelle et J à l'unité complexe (soit $\mathrm{I} = 1$, $\mathrm{J}^2 = -1$, $\mathrm{IJ} = \mathrm{J}$), le produit donne
>
> $$\left(ax-\frac{y}{b}\left(b^2+c^2\right)\right)\mathrm{I}+\left(\frac{ay}{b}+x\right)\sqrt{b^2+c^2}\,\mathrm{J}$$
> $$=(ax-by-cz)(1,0,0))+\left(\frac{ay}{b}+x\right)(0,b,c),$$
>
> ce qui est bien le résultat donné.

Il constate que le produit ij n'apparaît pas. Est-il toujours nul ou bien est-ce le choix particulier des facteurs qui fait que son coefficient s'annule ? Comme le premier cas l'avait conduit à une impossibilité lors de ses recherches antérieures, il réfléchit au deuxième cas. Dans un premier temps, il se rappelle qu'il veut toujours que le produit des longueurs soit égal à la longueur du produit, ce qu'il a bien dans ce cas particulier puisque :

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(ax-by-cz\right)^2+\left(ay+bx\right)^2+\left(az+cx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2$$

et que le dernier terme est nul. En comparant cette écriture au cas général, il note la grande ressemblance entre le quatrième terme $(bz - cy)$, nul dans le cas particulier, et le coefficient de ij, $(bz + cy)$ dans le cas général. Pour passer du signe + au signe –, il analyse finement que le terme ij $(bz + cy)$ provient très exactement de $\mathrm{ij}bz + \mathrm{ji}cy$ et que s'il abandonne la commutativité et qu'il pose ij = k et ji = –k il trouvera $\mathrm{k}(bz - cy)$ qui est bien nul dans le cas particulier qu'il a envisagé. L'abandon de la commutativité est un saut épistémologique important, car si Hamilton connaît des opérations géométriques non commutatives comme les rotations de l'espace, il n'a jamais été question d'opérations non commutatives entre nombres. Reste à savoir ce que peut représenter k.

Arrivé à ce stade de ses réflexions, Hamilton peut écrire :

$$\left(a+\mathrm{i}b+\mathrm{jc}\right)\left(x+\mathrm{iy}+\mathrm{jz}\right)=\left(ax-by-cz\right)+\mathrm{i}\left(ay+bx\right)+\mathrm{j}\left(az+cx\right)+\mathrm{k}\left(bz-cy\right).$$

Il obtient bien que le produit des longueurs est égal à la longueur du produit à condition de pouvoir écrire que le carré de la longueur du deuxième membre est justement la somme des carrés des coefficients

$$\left(ax-by-cz\right)^2+\left(ay+bx\right)^2+\left(az+cx\right)^2+\left(bz-cy\right)^2 .$$

Il fait alors l'analogie avec un résultat d'arithmétique, à savoir que le produit de deux entiers qui sont somme de trois carrés est un entier qui est en général somme de quatre carrés.

Cela le conduit, selon ses propres termes *à concevoir que, peut-être, au lieu de chercher à nous confiner à des triplets tels que a* + ib + jc ou (a, b, c), *nous devrions regarder ceci comme une forme incomplète de* QUATERNIONS *tels que a* + ib + jc + kd ***ou*** (a, b, c, d), *le symbole* k *notant une nouvelle sorte d'opérateur unité*. Hamilton ajoute ensuite : *Mais il était nécessaire, pour travailler définitivement avec de tels* QUATERNIONS, *de fixer la valeur du carré* k^2 *ainsi que les valeurs des produits* ik, jk, ki, kj. *Il semblait naturel, après avoir posé comme ci-dessus* $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$ *et* ij = k, ji = –k *de poser également* $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = -\mathrm{i}^2\mathrm{j}$. *Il était moins évident de proposer une valeur pour* k^2.

Peu à l'aise avec l'absence de commutativité, il pense pendant un certain temps que $\mathrm{k}^2 = +1$ en raison de $\mathrm{i}^2\mathrm{j}^2 = +1$. Mais ce faisant il n'obtient plus que le produit des longueurs est égal à la longueur du produit. Il semble plausible que son flash du 16 octobre 1843 corresponde à la remarque qu'il note dans différents textes, à savoir que :

$$\mathrm{k}^2 = \mathrm{ijij} = -\mathrm{iijj} = -\mathrm{i}^2\mathrm{j}^2 = -(-1)(-1) = -1$$

Hamilton vient donc de mettre en place le calcul des quaternions. Il remarque alors, ce qui le conforte dans ses recherches, que le produit de deux quaternions donne :

$$\left(a+\mathrm{i}b+\mathrm{jc}+\mathrm{k}d\right)\left(a'+\mathrm{i}b'+\mathrm{jc}'+\mathrm{k}d'\right)=\left(a''+\mathrm{i}b''+\mathrm{jc}''+\mathrm{k}d''\right)$$

avec

$$\begin{cases} a'' = aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' = (ab' + ba') + (cd' - dc') \\ c'' = (ac' + ca') + (db' - bd') \\ d'' = (ad' + da') + (bc' - cb') \end{cases}$$

et que l'on a

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\right) = \left(a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2\right),$$

retrouvant ainsi, au passage, un résultat d'Euler sur la décomposition d'un entier en somme de quatre carrés.
La vérification de l'associativité est fastidieuse mais sans difficulté.

Une nouvelle présentation des quaternions

Un lecteur moderne estimera que l'essentiel est fait puisque Hamilton vient de mettre en place la structure algébrique des quaternions. Mais l'environnement très géométrique de l'époque le pousse à retrouver l'espace habituel à trois dimensions. Dans un premier temps il remarque :
Je vis également qu'au lieu de représenter une ligne[(1)] *par un triplet de la forme* $x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}z$, *il serait plus agréable de la représenter par une autre forme trinomiale,* $\mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z$. *On serait alors capable d'exprimer le produit de deux lignes de l'espace par un* QUATERNION *dont les coefficients ont une signification géométrique très simple, à savoir, si*

$$(\mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z)(\mathrm{i}x' + \mathrm{j}y' + \mathrm{k}z') = w'' + \mathrm{i}x'' + \mathrm{j}y'' + \mathrm{k}z''$$

où

$$w'' = -xx' - yy' - zz' \ ;\ x'' = yz' - zy' \ ;\ y'' = zx' - xz' \ ;\ z'' = xy' - yx',$$

alors w'', *partie indépendante de* i, j, k *dans l'expression du produit, représente le produit des longueurs des deux facteurs multiplié par le cosinus du supplément de leur angle ; la partie restante,* $\mathrm{i}x'' + \mathrm{j}y'' + \mathrm{k}z''$ *de ce même produit représentant une ligne dont la longueur est le produit des longueurs des deux facteurs multiplié par le sinus de leur angle, tandis que la direction en est perpendiculaire au plan défini par les deux facteurs et le sens est tel que…*[(2)]. Suit l'équivalent de la règle des trois doigts dans un langage assez technique propre au XIXe siècle.
À partir de là Hamilton n'hésitera plus à confondre un réel a avec un quaternion réduit à ce qu'il appelle la PARTIE SCALAIRE, c'est-à-dire de la forme $a + 0\mathrm{i} + 0\mathrm{j} + 0\mathrm{k}$ et un vecteur (pour nous, c'est-à-dire une ligne pour lui) α de coordonnées (x, y, z) avec un quaternion réduit à la PARTIE VECTORIELLE, c'est-à-dire de la forme $0 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$. Au passage, on voit d'où provient l'habitude de noter les vecteurs unités des trois axes de l'espace par i, j, k.

(1) C'est à partir des travaux de Hamilton que l'on introduira le mot « vecteur » avec le sens moderne. Les mathématiciens de son époque parlent de « lignes » qui sont selon les cas des bipoints ou des vecteurs.
(2) On aura reconnu respectivement l'opposé de ce que nous appelons le produit scalaire et le produit vectoriel. Mais nous n'en sommes pas encore là.

Pourtant cela ne lui suffit pas et il cherche une introduction purement géométrique aux quaternions. Il la trouvera en 1846 en introduisant les quaternions comme quotient symbolique de deux vecteurs (pour prendre un langage moderne). C'est cette présentation qu'il utilisera dans son ouvrage fondamental de 1853 : *Lectures on quaternions*. On peut comprendre cette démarche en reprenant l'analogie avec les complexes. Un complexe peut être interprété comme un vecteur du plan ou comme une similitude vectorielle du plan. Par suite, le rapport de deux vecteurs peut être interprété comme la similitude plane qui transforme le dénominateur en le numérateur. Le problème, dans l'espace, c'est que deux vecteurs définissent une infinité de similitudes ; or une similitude vectorielle de l'espace dépend bien de quatre paramètres (2 pour définir l'axe, 1 pour l'angle et 1 pour le rapport) d'où l'apparition des quaternions. Hamilton est donc obligé de faire un choix et naturellement il choisira la similitude dont l'axe est orthogonal au plan déterminé par les deux vecteurs. Mais tout cela l'oblige à de longs détours, à quelques approximations géométriques et à beaucoup de lourdeurs pour finalement retrouver la forme algébrique.
À partir de là, il appliquera le calcul des quaternions à la résolution de nombreux problèmes de géométrie de l'espace, en particulier les formules de trigonométrie sphérique (indispensable en astronomie et Hamilton était directeur de l'observatoire de Dublin), retrouvant des résultats classiques et en découvrant d'autres en particulier sur les quadriques et sur ce qui s'appelle alors les coniques sphériques, intersection d'un cône du second ordre avec une sphère centrée au sommet du cône.

En conclusion

C'est bien par une analyse très fine des raisons qui le conduisaient à une impasse que Hamilton a pu aboutir et surmonter des difficultés. Il a fallu pour cela s'abstraire de certaines pesanteurs de son époque, mais, malgré son génie, il n'a pas pu s'en abstraire complètement, ce qui l'a conduit à donner finalement une présentation assez lourde de sa découverte.

L'accueil enthousiaste qui a été fait aux quaternions a entrainé Hamilton dans une sorte de fuite en avant où toute la géométrie de l'espace pouvait et devait être traitée à l'aide de ces nouveaux nombres. Dès le décès de ce mathématicien, une controverse va s'engager avec schématiquement les physiciens d'un côté qui vont extraire des quaternions tout le calcul vectoriel et d'un autre côté les mathématiciens qui vont longtemps rester fidèles aux quaternions. Cette controverse va affaiblir la renommée de Hamilton alors qu'il faut reconnaître que c'est grâce à lui que le calcul vectoriel a pu s'établir, même si l'idée était dans l'air comme on peut le voir chez Grassman ou Möbius.

Aujourd'hui, les quaternions restent le premier exemple de corps non commutatif. Mais curieusement ces nombres ont trouvé un retour en grâce d'une part avec l'informatique et d'autre part avec la mécanique quantique. En effet :

1) En informatique, l'animation des images de synthèse nécessite le recours à l'enchaînement de rotations. Habituellement une rotation est définie par une matrice 3 × 3 orthogonale, mais pratiquement, en raison des erreurs d'arrondi, l'orthonormalité des vecteurs colonnes n'est pas rigoureuse et au bout d'un certain nombre de rotations la scène est complètement distordue. Il se trouve que la correction de ce phénomène est très compliquée sur les matrices. Or avec les quaternions c'est beaucoup plus simple. Pour cela on identifie le vecteur $\vec{v}(x, y, z)$ avec le quaternion $v = 0 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ et on démontre qu'une rotation d'angle 2θ autour de l'axe unitaire (n_1, n_2, n_3) est donnée par $v \to qvq^{-1}$ où

$$q = \cos\theta + n_1 \sin\theta\,\mathrm{i} + n_2 \sin\theta\,\mathrm{j} + n_3 \sin\mathrm{k}$$

est un quaternion de norme 1. Or on peut toujours se ramener à un quaternion de norme 1 en le divisant par sa norme, ce qui évite l'accumulation des erreurs d'arrondi.

2 En mécanique quantique, Pauli, pour introduire le spin de particules non relativistes, a été amené à utiliser outre la matrice identité, les matrices, dites depuis matrices de Pauli : $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. On remarque alors que ces matrices sont liées aux matrices I, J, K, données à la quatrième définition du premier paragraphe, par les relations $\mathrm{I} = \mathrm{i}\sigma_1$, $\mathrm{J} = \mathrm{i}\sigma_2$, $\mathrm{K} = \mathrm{i}\sigma_3$.

Bibliographie

William R. HAMILTON :

- On new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2 (1844), 424-434.
- On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra, *Philosophical Magazine*, (1844–1850).
- On quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3 (1847), p. 1-16. (Lu le 11-11-1844).
- On symbolical geometry, *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* : vol. i (1846), p. 45-57, 137-154, 256-263 ; vol. ii (1847), p. 47-52, 130-133, 204-209 ; vol. iii (1848), p. 68-84, 220-225 ; vol. iv (1849), p. 84-89, 105-118.
- *Lectures on quaternions*, Hodges and Smith, Dublin, 1853.

David R. WILKINS :

- a effectué un énorme travail de compilation des œuvres de Hamilton sur son site :
  http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/