Recherche de minima et de maxima en géométrie(*)

Alain Mascret(**)

Résumé : Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour rechercher, au niveau du collège, des problèmes de minima et de maxima en géométrie : rectangle d'aire maximum ou de périmètre maximum inscrit dans un cercle ou de diagonale fixe ; rectangle d'aire maximum et de périmètre fixe ; maximum du produit de deux nombres de somme constante ; minimum de la somme de deux nombres de produit constant ; minimum du périmètre d'un parallélogramme inscrit dans un rectangle.

Afin de pouvoir animer les figures, elles seront déposées sur le site du groupe de géométrie dynamique de l'IREM de Dijon, (http://geowiki.u-bourgogne.fr.)

Les logiciels de géométrie dynamique permettent d'aborder les problèmes par des manipulations. Il est aisé de voir ce qui varie et dans quel sens se produit cette variation. La recherche de maxima ou de minima apparaît naturelle et les conjectures sont faciles à tester. Il reste bien sûr à les démontrer.

1. Présentation

La plupart de mes élèves disposent d'internet. Dès le début de l'année je leur conseille de se servir de logiciels de géométrie dynamique, en particulier de *Geonext*, qui me paraît très facile d'accès ou de *Geogebra*. Ils trouvent les liens vers les sites officiels de ces logiciels sur geowiki.u-bourgogne.fr. Le passage d'un logiciel à l'autre ne pose pas de problème aux élèves, car les logiciels actuels se ressemblent beaucoup.

Pour traiter les problèmes de minima ou maxima, j'utilise plutôt *Geogebra* qui dispose d'une fenêtre « algèbre » permettant d'afficher les longueurs et les aires. Je renvoie le lecteur intéressé par ce logiciel au mode d'emploi pour les élèves de collège écrit par Nicolas Vissac et publié dans la *Feuille de Vigne* 117.

Dans ma salle de classe, je dispose d'un ordinateur sur le bureau et d'un vidéoprojecteur. Les élèves sont habitués à « passer au tableau » en venant au clavier de l'ordinateur. Les figures sont construites devant eux, soit par un élève, soit par moi.

(*) Cet article est paru dans le nº 118 de Feuille de Vigne (décembre 2010).
(**) Collège La Champagne à Gevrey-Chambertin. mascret@ac-dijon.fr

2. Aire maximale d'un rectangle dont la diagonale a une longueur fixe

Nous sommes en classe de quatrième. Les élèves viennent de voir la propriété caractéristique du triangle rectangle relative à son cercle circonscrit. La question posée est : « Quelle est la plus grande aire possible d'un rectangle dont la diagonale a une longueur fixée ? »

L'élève au bureau trace un rectangle, comme d'habitude, à partir de la longueur et de la largeur, en utilisant le bouton « droites perpendiculaires ». Malheureusement cette figure ne peut pas nous aider parce que « tout bouge en même temps » y compris la diagonale qui devait rester fixe.

La deuxième figure partira donc de la diagonale [AC], à laquelle on s'interdit de toucher. Pour placer le point B, l'élève choisit de tracer une droite (AB_1) passant par A et la perpendiculaire abaissée de C sur cette droite. Le point D est obtenu comme symétrique de B par rapport au milieu O de [AC].

En fait *Geogebra* donne automatiquement des noms aux points créés en suivant l'ordre alphabétique. L'élève doit donc renommer les points pour que sa figure corresponde au problème. C'est ce qui explique la présence de ce point B_1 que *Geogebra* avait d'abord appelé B et qui est devenu B_1 quand l'élève a imposé son point B. Je ne reviendrai plus sur cet aspect du fonctionnement de *Geogebra*.

Voici, *figure 1*, une copie de l'écran, montrant la figure et la fenêtre « algèbre » contenant les coordonnées des points, les longueurs des segments, les équations des droites et l'aire du rectangle appelé poly1. Je cache cette fenêtre quand je ne m'en sers pas. Mais si un élève veut savoir le sens de ce qui est affiché, il va de soi que je n'élude pas la question.

À l'aide de la souris, ou du crayon si l'on dispose d'un tableau blanc interactif, les points « libres » peuvent être déplacés. Les autres points sont dépendants. Ils sont construits à partir des points libres et suivent le mouvement. Les valeurs numériques sont, bien sûr, actualisées dans la fenêtre « algèbre ».

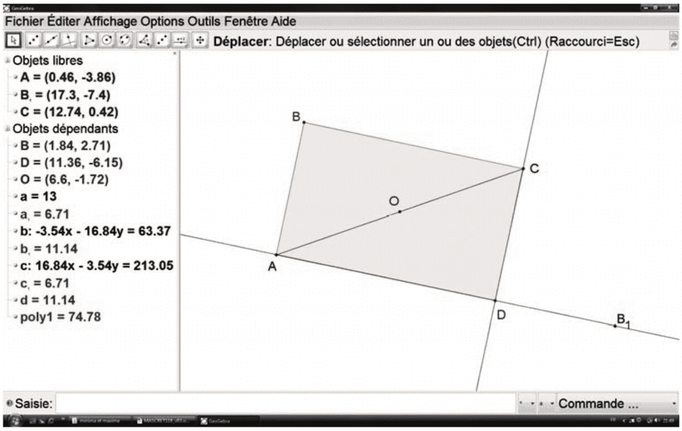

Figure 1

Nous nous sommes interdit de toucher aux points A et C. Nous pouvons modifier la figure à l'aide du point B_1. Nous constatons que l'aire est maximale quand le rectangle est un carré. Au passage nous retrouvons que le cercle de diamètre [AC] est circonscrit au rectangle ABCD. Nous traçons ce cercle. Il s'agit maintenant de prouver notre conjecture :

Parmi tous les rectangles ayant la même diagonale, celui qui a l'aire la plus grande est le carré.

Les élèves savent, depuis l'école, calculer l'aire d'un rectangle en multipliant sa longueur par sa largeur. Malheureusement quand la longueur augmente, la largeur diminue et vice-versa. Comme tout à l'heure : « tout bouge en même temps ! ». Il faudrait s'appuyer sur une longueur fixe… Nous en connaissons une : la diagonale.

Notre rectangle est partagé en deux triangles rectangles de même aire par la diagonale [AC]. Il est donc possible de calculer l'aire du rectangle à partir de celles des triangles rectangles, en utilisant la diagonale qui est leur hypoténuse.

L'aire du rectangle ABCD est le double de celle du triangle ACB, c'est-à-dire : BH × AC.

AC est fixe. BH est inférieur ou égal au rayon du cercle qu'il atteint lorsque H est en O.

Traçons la perpendiculaire à [AC] passant par O, qui coupe le cercle en F et E.

Si H est en O, B est en F ou en E, sur la médiatrice de [AC], ce qui prouve que ABCD est un carré.

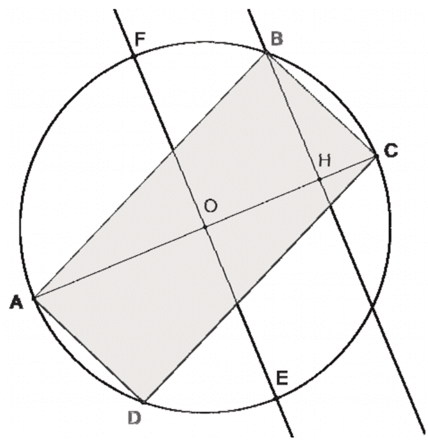

Figure 2

Remarques :

a) Nous pouvons reformuler ce résultat d'une façon différente :

Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, celui qui a l'aire la plus grande est le carré.

b) Et si les élèves connaissent le théorème de Pythagore :

Le produit de deux nombres dont la somme des carrés est constante, est maximum si et seulement si ces deux nombres sont égaux.

3. Et le périmètre ? Quand est-il maximum ?

La question est naturelle et les élèves la posent. Pour essayer de la traiter, il est possible de faire afficher la valeur du périmètre et de s'apercevoir qu'elle semble, elle aussi, maximale lorsque ABCD est un carré. Mais ceci n'est pas très visuel et ne nous aidera pas à prouver cette conjecture.

Faisons apparaître visuellement le périmètre ou le demi-périmètre du rectangle sur la figure, si possible sous la forme d'un segment dont la longueur va varier. Ensuite nous tâcherons de comparer cette longueur à la longueur d'un segment fixe de la figure.

Commençons par mettre « bout à bout » la longueur et la largeur du rectangle. Pour cela, traçons le cercle de centre B, passant par C, qui coupe la droite (AB) en deux points, dont un en dehors du segment [AB]. C'est celui-ci qui nous intéresse, appelons-le G.

En déplaçant le point B, nous constatons que la longueur de [AG] est maximale lorsque B est en F. Dans ce cas, elle semble être le double de celle de [AF].

Construisons donc le point K, symétrique de A par rapport à F, ce qui va nous permettre de visualiser l'écart entre AG et son maximum probable AK. Pour cela, traçons le cercle centré en F qui passe par A et qui recoupe la droite (AC) en K. *(Figure 3)*.

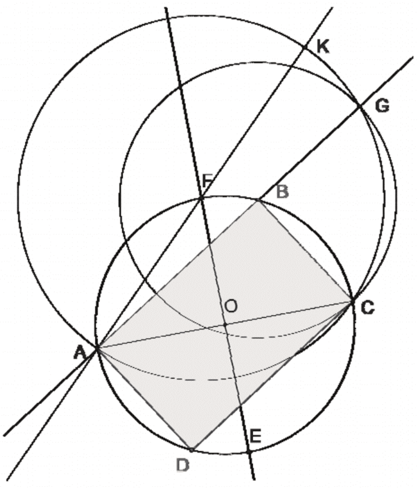

Figure 3

Quelle surprise ! Le point G se déplace sur ce dernier cercle. Les élèves font bouger le point B pour y croire ! Pas de doute !

Mais si G se déplace sur le cercle de centre F passant par A, la corde [AG] est toujours plus courte que le diamètre [AK]. Le maximum de [AG] est atteint lorsque G est en K, c'est-àdire si ABCD est un carré. C'est terminé !

Je dois tempérer un peu l'enthousiasme car il faut tout de même prouver que G est sur le cercle de centre F et de diamètre [AK] ! C'est visible et tout le monde y croit, mais il faut le démontrer…

B est sur la médiatrice de [CG], qui est aussi bissectrice de $\widehat{CBG}$. Comme $\widehat{CBG}$ est droit, sa bissectrice fait un angle de 45° avec la droite (AB).

Mais l'angle $\widehat{FBA}$ est inscrit dans le cercle de centre O et l'angle au centre $\widehat{FOA}$ est droit. On obtient donc : $\widehat{FBA} = \dfrac{\widehat{FOA}}{2} = 45°$ et la droite (FB) est la bissectrice de $\widehat{CBG}$ donc la médiatrice de [CG], ce qui prouve que G est sur le cercle de centre F passant par A et C.

Nous obtenons donc le résultat suivant que l'on peut formuler de différentes façons :

Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle donné, celui qui a le plus grand périmètre est le carré.

Parmi tous les rectangles ayant la même diagonale, celui qui a le plus grand périmètre est le carré.

La somme de deux nombres dont la somme des carrés est constante, est maximale si et seulement si ces deux nombres sont égaux.

Remarque :

Le recours aux angles inscrits réserve la démonstration à la classe de troisième, mais les élèves de quatrième admettent facilement ce résultat, pratiquement vu en démontrant les théorèmes sur le triangle rectangle et son cercle circonscrit.

4. Rectangle d'aire maximale et de périmètre fixe

Ces recherches rappellent souvent aux élèves un résultat analogue, vu en sixième ou même à l'école :

Parmi tous les rectangles qui ont le même périmètre, celui dont l'aire est la plus grande est le carré.

Essayons de démontrer ce théorème…

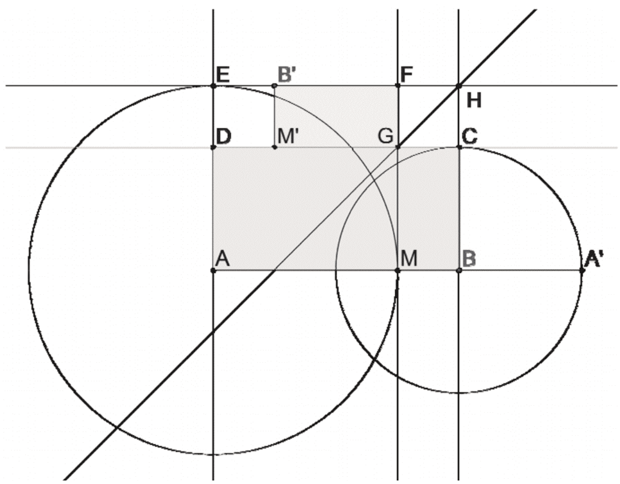

Figure 4

Le demi-périmètre est constant. Nous le représentons par un segment [AA′] qui restera fixe. Sur [AA′], plaçons un point B mobile permettant de construire les différents rectangles ABCD dont le périmètre est le double de la longueur de [AA′]. Le point C est l'intersection du cercle de centre B passant par A′ et de la perpendiculaire à (AA′) passant par B. D est le quatrième sommet du rectangle.

En déplaçant B, nous constatons que l'aire de ABCD est maximale lorsque ABCD est un carré, c'est-à-dire lorsque B est confondu avec le milieu M de [AA′]. Pour le prouver, nous allons tracer un carré de côté [AM] et montrer que l'aire de ABCD est toujours inférieure ou égale à l'aire de ce carré. Les longueurs AB et BC jouant le même rôle, il suffit de faire parcourir à B le segment [A′M].

Traçons le carré AMFE de façon que D soit sur [EA]. Les droites (EF) et (BC) se coupent en H. Le rectangle FGCH est un carré. En effet :

$$FG = MF - MG = MA - BC = MA' - BA' = MB = GC.$$

Considérons la symétrie d'axe (GH), diagonale du carré FGCH.
L'image de C est F puisque (GH) est diagonale du carré GCHF.
L'image de (CH) est (FH). L'image de B est le point B′ de (FH) tel que B′F = BC avec F sur [B′H].
L'image de (GF) est (GC). L'image de M est le point M′ de (GC) tel que M′G = MG avec G sur [M′C].

L'aire du rectangle ABCD est donc égale à l'aire du rectangle AMGD augmentée de celle du rectangle FB′M′G, puisque MBCG et FB′M′G sont symétriques.

Mais les deux rectangles AMGD et FB′M′G sont intérieurs au carré AMFE, l'aire de ABCD est donc inférieure ou égale à celle de AMFE. L'égalité est obtenue si B′ est en E. Mais alors B est en M, ce qui prouve le résultat annoncé.

Remarques :

a) En choisissant a = AM et b = MB, la figure utilisée permet de visualiser l'identité : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

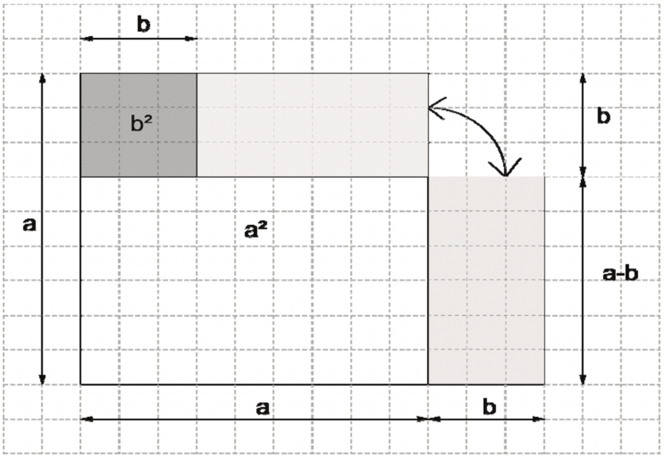

Figure 5

b) Le résultat géométrique obtenu peut s'énoncer également :

Le produit de deux nombres dont la somme est constante, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

c) La démonstration n'utilise que des notions vues en sixième : aire, périmètre et les propriétés de la symétrie axiale.

5. Maximum du produit de deux nombres dont la somme est constante (autre démonstration)

Voici une autre démonstration géométrique de ce résultat, dans laquelle le produit n'apparaît pas comme une aire. Elle utilise une relation métrique dans le triangle rectangle que l'on peut faire démontrer préalablement aux élèves :

Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

En général, pour démontrer cette propriété, les élèves tentent d'utiliser le théorème de Pythagore, mais ceux qui viennent à bout des calculs sont rares. C'est l'occasion de leur montrer combien la trigonométrie simplifie les choses :

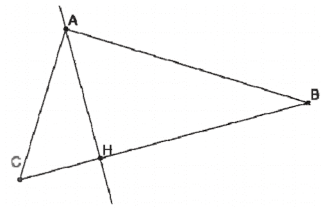

Figure 6

Les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{ABH}$ sont chacun complémentaires de $\widehat{ACH}$, donc égaux.

$$\frac{HC}{HA} = \tan\widehat{CAH} = \tan\widehat{ABH} = \frac{HA}{HB} \text{ d'où } HA^2 = HB \cdot HC.$$

Venons-en à la démonstration proprement dite :

Le produit de deux nombres dont la somme est constante, est maximum lorsque ces deux nombres sont égaux.

Un point H se déplace sur un segment [BC] dont la longueur est la somme des deux nombres x = BH et y = CH.

Traçons un demi-cercle de diamètre [BC] et de centre M. La perpendiculaire à [BC] passant par H coupe ce demi-cercle en A. La perpendiculaire à [BC] passant par M le coupe en R.

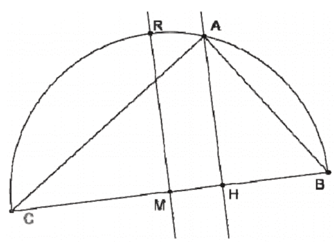

Figure 7

Comme $AH^2 = HB \cdot HC$, chercher le maximum du produit $HB \cdot HC$ revient à chercher celui de AH^2 ou encore celui de AH, le maximum ou le minimum d'une longueur ayant lieu en même temps que le maximum ou le minimum de son carré.

Dans un cercle la longueur d'une corde est toujours inférieure ou égale à celle du diamètre. La demi-corde AH est donc inférieure ou égale au rayon MR, l'égalité n'ayant lieu que si H est en M, c'est-à-dire si BH = CH.

Comme $AH^2 = HB \cdot HC$, le produit $HB \cdot HC$ est aussi maximum si BH = CH.

5. Minimum de la somme de deux nombres dont le produit est constant

Il semble naturel de se poser le problème « dans l'autre sens ». Cette fois, nous recherchons le minimum de la somme de deux nombres dont le produit est constant.

Traçons un cercle de centre O et de diamètre [BC]. Son rayon, fixe, est choisi égal à la racine carrée du produit des deux nombres. Par O, menons la perpendiculaire à [BC] qui coupe le cercle en M et M'.

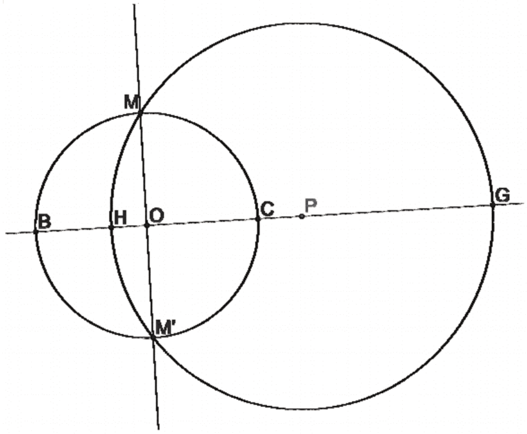

Figure 8

À partir d'un point quelconque P de la droite (BC), pris comme centre, traçons le cercle passant par M et M′.

On obtient :

$$OH \cdot OG = OM^2 = OB \cdot OC,$$

$$OH + OG = HG = 2\ PM \geq 2\ OM = BC = BO + OC.$$

PM est supérieur ou égal à OM car c'est l'hypoténuse de MOP. L'égalité n'a lieu que si P est en O c'est-à-dire si : OH = OG = OM = OC = OB.

La somme de deux nombres dont le produit est constant, est minimale lorsque ces deux nombres sont égaux.

6. Minimum du périmètre d'un parallélogramme inscrit dans un rectangle

Dans son article « *Une situation pour introduire les fonctions* » paru dans le PLOT numéro 31 (troisième trimestre 2010), Véronique Cerclé propose de faire étudier aux élèves la situation suivante :

ABCD *est un rectangle,* E *un point de* [BC]*,* F *un point de* [CD]*,* G *un point de* [DA] *et* H *un point de* [AB] *tels que* BE = CF = DG = AH = x*. Il s'agit de faire exprimer l'aire de* EFGH *en fonction de x puis de chercher pour quelle valeur de x cette aire est minimale*.

Pour plus de détails, je vous renvoie à cet article où sont analysées les difficultés rencontrées par des élèves de seconde.

La solution proposée est algébrique. Si a est la longueur et b la largeur du rectangle, l'aire du parallélogramme EFGH est obtenue par différence entre l'aire du rectangle et la somme des aires des triangles rectangles AGH, BHE, CEF et DFG. (Mes élèves de troisième, comme ceux de Véronique Cerclé, ont travaillé sur un exemple numérique.)

$$\text{Aire de EFGH} = ab - x(a - x) - x(b - x) = ab - (a + b)x + 2x^2.$$

Pour visualiser le minimum d'une fonction, *Geogebra* est très pratique puisqu'il suffit d'écrire dans la ligne de saisie ou dans l'une des cellules du tableur l'expression en x de la fonction pour obtenir le tracé de sa courbe représentative.

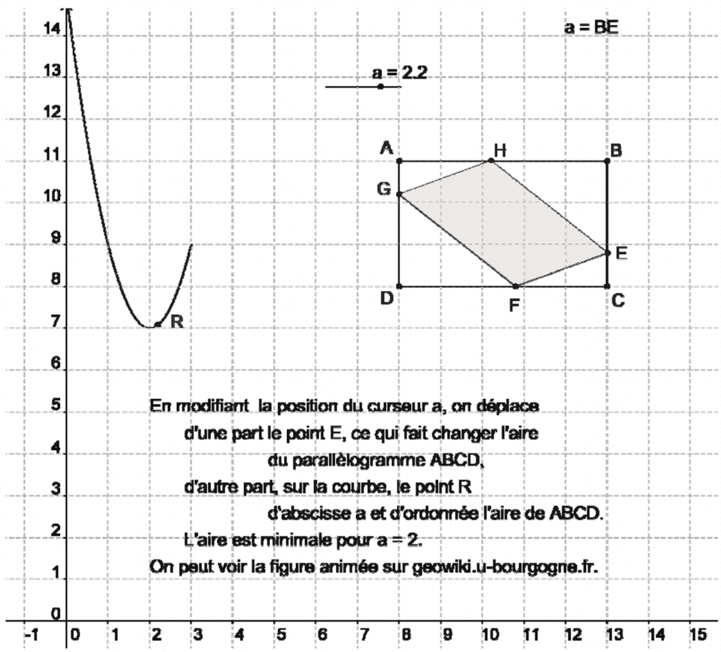

Figure 9

Comme d'habitude, le problème du minimum du périmètre s'est posé, mais les calculs sont beaucoup plus compliqués que pour le minimum de l'aire ; c'est pourquoi nous avons essayé de résoudre le problème géométriquement.

En déplaçant le point E et en regardant la valeur affichée du périmètre par Geogebra, il semble que le minimum du périmètre soit atteint lorsque les côtés du parallélogramme sont parallèles aux diagonales du rectangle.

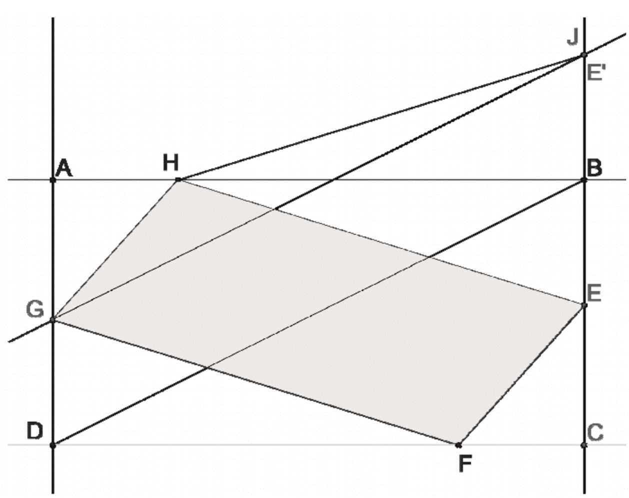

Figure 10

Traçons la diagonale (DB), ainsi que la parallèle à (DB), passant par G, qui coupe (BC) en J. Le quadrilatère GJBD dont les côtés sont parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

Ses côtés opposés ont même longueur : JB = GD = x.

Pour comparer la longueur du demi-périmètre de EFGH à la diagonale DB = GJ, prenons le symétrique E′ de E par rapport à (AB). La droite (AB) est la médiatrice de [EE′], donc B est le milieu de [EE′] et l'on a : E′B = BE = x. Les points J et E′ – tous deux situés sur (BC) – sont donc confondus et HE = HE′.

Le demi-périmètre du parallélogramme EFGH est donc égal à GH + HJ qui est supérieur ou égal à GJ, d'après l'inégalité triangulaire dans le triangle GHJ. L'égalité a lieu si H est sur (GJ), c'est-à-dire lorsque le côté (GH) est parallèle à la diagonale (DB).

Remarque :

Si (HG) est parallèle à (DB), on a aussi (EH) parallèle à (AC).

En effet, si (HG) est parallèle à (DB), les angles $\widehat{HJB}$ et $\widehat{DBC}$ sont correspondants donc égaux. Leurs complémentaires $\widehat{JHB}$ et $\widehat{BDC}$ le sont aussi. Mais $\widehat{JHB} = \widehat{BHE}$ car J = E′ est le symétrique de E par rapport à (AB) et $\widehat{BDC} = \widehat{CAB}$ dans le rectangle ABCD.

Finalement les angles correspondants $\widehat{BHE}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux ce qui prouve le parallélisme de (EH) et (AC).

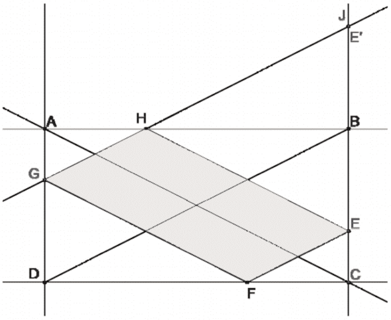

Figure 11

7. Qu'apporte un logiciel de géométrie dynamique ?

Les principaux avantages d'un logiciel de géométrie dynamique sont la qualité et la rapidité de réalisation d'une figure. Le risque de dessiner des cas particuliers qui induisent en erreur n'existe plus, puisqu'il est possible de modifier la figure à tout moment.

D'autre part, une figure n'est pas un simple dessin ; ses éléments doivent être définis explicitement à partir des données du problème. Si ce n'est pas le cas, la déformation de la figure l'empêchera de correspondre au problème. Pour obtenir des figures « solides », l'élève doit faire preuve de rigueur dans ses constructions.

En ce qui concerne les problèmes de minima ou de maxima, la possibilité de faire bouger les points en faisant afficher la valeur de la grandeur qui nous intéresse, permet d'approcher par tâtonnement la solution, et parfois de mettre sur la voie de sa démonstration. Il est peu probable, par exemple, que la solution du problème posé au paragraphe 6 ait même été aperçue sans un logiciel de géométrie dynamique.

Une fois remarquée une particularité « stable » de la figure, le besoin de tenter de la démontrer est très motivant, au moins pour certains élèves. L'idéal est de conduire la recherche en petits groupes, de façon à ce que l'enthousiasme de certains puisse plus facilement se transmettre aux autres.