

## Exercices de-ci, de-là

*Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.*

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par Mél à :  
bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin,  
17 rue de la Roussille,  
79000 NIORT

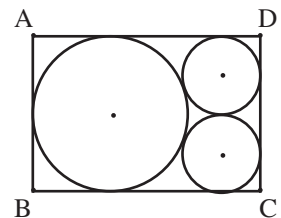
*Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial, une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.*

*Nota.* Cachée sous une pile, la réponse d'un collègue a été oubliée... Il s'agit de Raymond Heitz (Lavergne), qu'il veuille bien m'en excuser. Donnant une solution au 488-3, il commentait également une des solutions du 486-1 en regardant la figure comme une parabole décomposée en deux parallèles. J'ai aussi reçu de sa part, mais trop tardivement pour apparaître dans le numéro 493, une réponse au 491-1 ainsi qu'un commentaire sur une solution du 488-2 ; et également des solutions des 491-1 et 491-3 de la part de Jean-Yves Coquan (Albi). Que cela ne les décourage pas de me faire parvenir de nouvelles réponses !

## Exercices

**Exercice 494-1 (Daniel Reisz – Auxerre) à proposer à nos élèves de collège**

Un rectangle ABCD a pour largeur  $AB = 4$  et contient trois cercles tangents entre eux et aux cotés du rectangle comme indiqué sur la figure ci-contre. Quelle est sa longueur ?



**Exercice 494-2 (Ali Akir – Tunis)**

Trouver le terme général de la suite  $u$  dans chacun des cas suivants :

a)  $p \in \mathbb{N}$  ;  $u$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + p \cdot E(u_n) \end{cases}$$

où  $E(u_n)$  désigne la partie entière de  $u_n$ .

b)  $u$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n + 2 - \cos(\pi u_n) \end{cases}$$

c)  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels ;

$u$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 \in \mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \begin{cases} p + u_n, & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ q + u_n, & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

**Exercice 494-3 Arithmétique** (d'après les olympiades mathématiques de l'Union Soviétique 1962)

$x$ ,  $y$  et  $z$  désignent des entiers tous distincts.

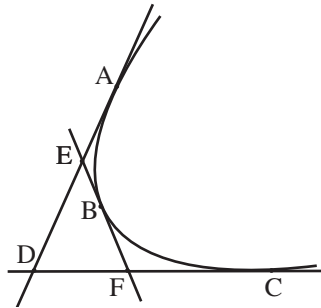
Montrer que  $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$  est divisible par  $5(x - y)(y - z)(z - x)$ .

**Exercice 494-4 Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach)** (d'après August Ferdinand Möbius)

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois points consécutifs d'une parabole  $(P)$ . Les tangentes à la parabole en  $A$  et  $C$  se coupent en  $D$ , celles en  $A$  et  $B$  se coupent en  $E$ , celles en  $B$  et  $C$  se coupent en  $F$ .

En notant  $KLM$  l'aire du triangle de sommets  $K$ ,  $L$ ,  $M$  et  $(KL)$  l'aire du segment de parabole limité par  $(P)$  et le segment de droite  $[KL]$ , démontrer les trois relations :

- $\sqrt[3]{ADC} = \sqrt[3]{AEB} + \sqrt[3]{BFC}$
- $\sqrt[3]{(AC)} = \sqrt[3]{(AB)} + \sqrt[3]{(BC)}$
- $ABC = 3 \cdot \sqrt[3]{(AB)} \cdot \sqrt[3]{(BC)} \cdot \sqrt[3]{(CA)}$



## Solutions

**Exercice 492-1 Guerre froide** (d'après les olympiades mathématiques de l'Union Soviétique 1965)

Un avion espion vole à la vitesse de 1000 km/h en décrivant un cercle de centre  $O$  et de rayon 10 km. On tire un missile depuis  $O$ . Il va à la même vitesse que l'avion et sa trajectoire est telle qu'il reste toujours aligné entre  $O$  et l'avion.

Au bout de combien de temps atteint-il l'avion ?

**Solution de Fabrice Laurent (Provins)**

Schéma et notation

On note  $R$  le rayon du cercle (10 km) et  $V$  la vitesse de l'avion et du missile (1000 km/h).

Le point O est le centre du cercle, et A la position de l'avion sur le cercle.

À l'instant  $t$ , le missile se trouve au point M sur le segment [OA], et on note  $OM = r(t)$ .

La vitesse du missile se décompose en une vitesse normale  $V_n$  portée sur la droite (OA) et une vitesse tangentielle  $V_t$  perpendiculaire au rayon.

On appelle  $\omega$  la vitesse angulaire de l'avion, et on a la relation :  $V = \omega R$ .

$$\text{D'où } \omega = \frac{V}{R} = 100 \text{ rad/h.}$$

Mise en équation du problème

On a :  $V_t(t) = \omega r(t)$  et  $V_n(t) = r'(t)$ .

La relation  $V_n^2 + V_t^2 = V^2$  conduit à l'équation différentielle :  $r'^2 + \omega^2 r^2 = V^2$ .

En dérivant cette équation différentielle, on obtient :  $2r'r'' + 2\omega^2 r'r = 0$ .

Résolution de l'équation différentielle

Cette équation peut s'écrire :  $2r'(r'' + \omega^2 r) = 0$ .

En oubliant la solution qui correspond à une vitesse nulle ( $r' = 0$ ), on tombe sur l'équation différentielle linéaire du second ordre :  $r'' + \omega^2 r = 0$ .

La résolution de cette équation, avec les conditions initiales  $r(0) = 0$  et  $r'(0) = V$ , conduit à la solution :  $r(t) = R \sin(\omega t)$ .

Recherche du temps d'interception

Le missile interceptera l'avion lorsque  $r(t) = R$ , soit au bout d'un temps  $t$  donné par :

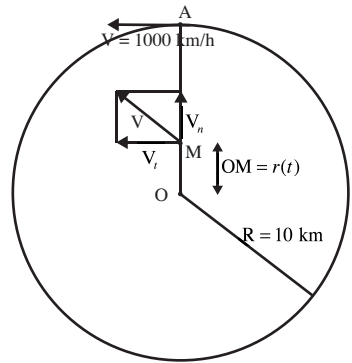
$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{200} \text{ (en heures) soit à peu près 56,5 secondes.}$$

**Autres solutions :** Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Gounon (Chardonnay), Odile Simon (La Prénessaye).

Pierre Renfer propose la même solution en se plaçant dans le plan complexe, alors que les solutions de Jean Gounon et de Odile Simon passent toutes les deux par une équation différentielle du premier ordre dont la solution est une fonction en arcsinus.

**Autre solution :**

Voici maintenant la solution proposée par les organisateurs de cette olympiade qui était destinée à des élèves de Première (d'après N.B. Vasilyev et A.A. Yegorov, dans une édition et traduction de Anton Cherney et Andy Liu de l'université d'Edmonton, Canada)

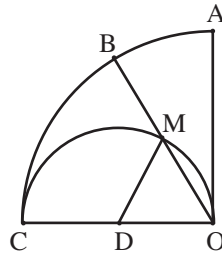


L'avion se déplace le long du quart de cercle AC de centre O.  
On suppose qu'il est en B.

M est le point d'intersection du demi-cercle de diamètre [OC] et du rayon [OB].

On pose  $\widehat{AOB} = \theta$ .

Alors  $\widehat{MOD} = \widehat{OMD} = 90^\circ - \theta$  et par conséquent  $\widehat{MDO} = 2\theta$ .  
Puisque  $OC = 2 OD$ , alors les arcs AB et OM ont la même longueur. Ainsi le demi-cercle OC constitue-t-il une trajectoire possible (cf. Nota) pour le missile qui atteindra l'avion espion en C.



Le quart de cercle AC mesure  $5\pi$  kilomètres et il faudra  $\frac{\pi}{200}$  heures à l'avion pour y parvenir.

Le missile qui vole à la même vitesse mettra le même temps.

Nota. On peut d'ailleurs affirmer que c'est bien la trajectoire du missile : en reprenant les notations de Fabrice Laurent on a  $r(t) = R \sin(\omega t)$  et  $\theta(t) = \omega t$  ; d'où  $r = R \sin(\theta)$  qui est l'équation polaire d'un cercle.

La découverte de cette trajectoire peut se faire à l'aide du logiciel Geogebra. Deux fichiers sont disponibles sur le site, dans les suppléments en ligne au BV.

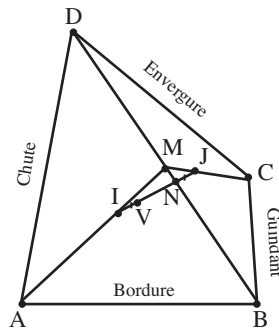
### Exercice 492-2 Jean-Yves Le Cadre – Saint Avé (issu du cours de navigation des Glénans)

Une voile aurique est assimilée à une plaque homogène ayant la forme indiquée. La construction du centre d'inertie d'une telle voile est indiquée ci-dessous et codée sur la figure.

La question, bien sûr, est de savoir si cette construction est exacte ou approximative.

Comment déterminer le centre d'une voile ABCD ? :

- Tracer une diagonale, ici BD.
- Placer le point M au milieu de BD.
- Placer I au tiers de MA, J au tiers de MC.
- Tracer IJ.
- N est l'intersection de IJ et BD.
- Le centre de voilure est le point V tel que  $IV = NJ$ .



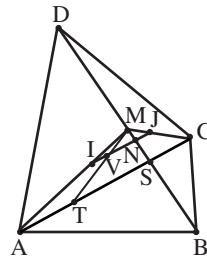
#### Solution de Jean-Claude Emeillat (Guipavas)

Si on joint A et C, la droite (AC) est parallèle à (IJ) (Thalès).

Soit S le point de rencontre de (AC) et (BD) et soit T le point de rencontre de (MV) et (AC).

Soit  $\alpha = \text{aire}(ABD)$  et  $\beta = \text{aire}(BCD)$ .

Le centre d'inertie de la voile est évidemment le barycentre de  $I(\alpha)$ ,  $J(\beta)$ , car I et J sont les centres d'inertie respectifs de ABD



et BCD. Par ailleurs,  $\frac{AS}{CS} = \frac{\alpha}{\beta}$  (propriété classique).

Ainsi (Thalès ou homothétie)  $\frac{IN}{JN} = \frac{\alpha}{\beta}$ , soit encore  $\frac{VJ}{IV} = \frac{\alpha}{\beta}$ , puisque les segments [VN] et [IJ] ont le même milieu.

D'où  $\alpha IV = \beta VJ$  et  $\alpha \vec{VI} + \beta \vec{VJ} = \vec{0}$  d'après la configuration ; et V, barycentre de  $I(\alpha), J(\beta)$ , est bien le centre d'inertie de la voile ABCD.

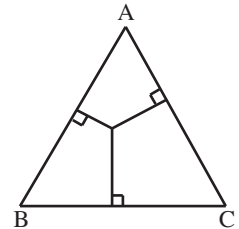
**Autres solutions :** Jean-Yves LeCadre (Saint Avé), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon).

*Nota.* Le diaporama d'une démonstration assez proche est disponible sur le site, dans les suppléments en ligne au BV.

**Exercice 492-3 Probabilités**

On choisit au hasard un point M à l'intérieur d'un triangle équilatéral et on construit ses projetés orthogonaux sur les côtés.

- 1) Quelle est la probabilité que les trois longueurs obtenues puissent être celles d'un triangle ?
- 2) Pour effectuer une simulation sur ordinateur, on se place dans un repère orthonormal dans lequel les coordonnées sont B (0;0), C (2;0) et A (1;√3). Le choix du point intérieur est alors effectué de la manière suivante : abscisse quelconque choisie entre 0 et 2 ; ordonnée choisie quelconque mais de façon à demeurer dans le triangle.



Voici ci-dessous les formules qui ont été écrites dans les cases A2 à F2.

	A	B	C	D
1	X0	Y0	I0	I1
2	=ALEA()*2	=5*(A2<1;RACINE(3)*A2*ALEA());(-RACINE(3)*A2+2*RACINE(3))*ALEA()	=B2	=0,5*ABS(RACINE(3)*A2+B2-2*RACINE(3))

	D	E	F
1	I1	I2	compter 1 si triangle, 0 sinon
2	=0,5*ABS(RACINE(3)*A2+B2-2*RACINE(3))	=0,5*ABS(RACINE(3)*A2-B2)	=5*(ET(ABS(C2-D2)<E2;E2<C2+D2);1;0)

Cette modélisation n'est pas correcte et conduit en dix fois 10 000 essais sur tableur, à une moyenne d'environ 0,153 ...

→ Calculer la valeur théorique correspondant à cette simulation.

**Solution de Michel Lafond (Dijon)**

1) Il est bien connu que, si dans la figure 1 M se déplace sur B'C', MK + ML est constant et égal la hauteur h de AB'C' (équilatéral).

Pour que (a, b, c) soit « triangulaire » il faut que  $a \leq b + c = h$  (idem pour les deux autres côtés).

$a \leq h$  équivaut à dire que M est dans la moitié « basse » de ABC.

Les valeurs favorables de M sont donc celles du triangle PQR (en gris dans la figure 2) dont les sommets sont les milieux des côtés de ABC, ce qui donne une probabilité de 1/4 pour que (a, b, c) soit triangulaire, si M est choisi AU HASARD dans ABC.

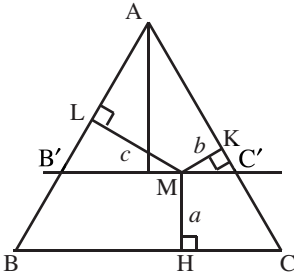


Figure 1

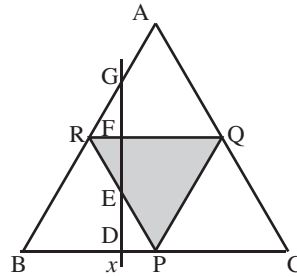


Figure 2

2) Le choix de  $M$  au hasard dans le triangle est toute la difficulté. La simulation est fautive car elle donne autant de poids aux points du voisinage de  $B$  (ou de  $C$ ), pour lesquels la probabilité d'avoir un triangle est nulle, qu'aux autres points. Elle sous-estime donc considérablement la « vraie » probabilité.

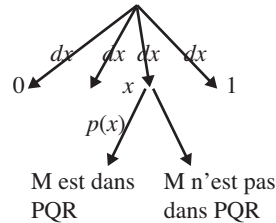
On peut supposer  $0 \leq x \leq 1$ , c'est-à-dire  $D$  entre  $B$  et  $P$  par symétrie (voir la figure 2).

Posons  $t = \sqrt{3}$ . Dans le repère de l'énoncé,  $AB$  a pour équation  $y = tx$ ,  $PR$  a pour équation  $y = t(1-x)$  et  $RQ$  a pour équation  $y = t/2$ .

Pour  $x$  fixé entre 0 et 1 (probabilité infiniment petite  $dx$ ), le rapport « cas favorables » sur « cas possibles » est :

$$\frac{EF}{DG} = \frac{t/2 - t(1-x)}{tx} = \frac{x - 1/2}{x} = 1 - \frac{1}{2x} = p(x).$$

Intuitivement, on a l'arbre infini ci-contre dont toutes les branches de la racine sont équiprobales – c'est l'erreur de la simulation –, et on raisonne comme dans le cas discret pour trouver la probabilité cherchée :



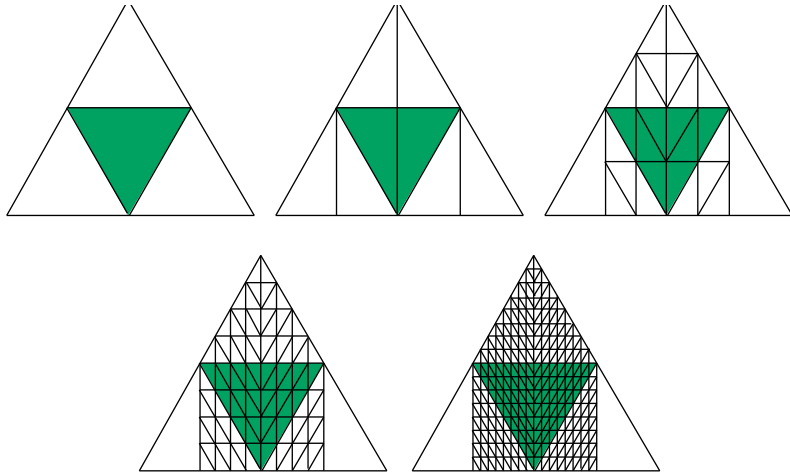
$$p = \int_{x=1/2}^{x=1} p(x) dx = \int_{x=1/2}^{x=1} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{1 - \ln(2)}{2} \approx 0,513.$$

(inutile d'intégrer entre 0 et 1/2 où la probabilité est nulle).

*Michel Lafond conclut en disant avoir déjà personnellement commis ce genre d'erreur très instructive.*

**Autre solution : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).**

*Nota.* Le passage du discret au continu, suggéré par les dessins suivants, me semble assez éclairant.



**Exercice 492-4 Chute d'échelle**

Une échelle de 5 m de long est en train de tomber par terre. Le haut glisse le long du mur vertical, le bas sur le sol horizontal. Si le pied glisse à la vitesse régulière de 18 cm/s, quelle est la vitesse du sommet de l'échelle quand celui-ci est à 3 m du sol ?



**Solution de Jean Gounon (Chardonnay)**

Les unités sont le mètre et la seconde. La chute commence l'instant  $t = 0$ . À chaque instant  $t$  on note  $x$  la distance du pied de l'échelle au mur et  $y$  la hauteur du sommet de l'échelle. On a  $y^2 = 25 - x^2$ , d'où par dérivation  $2y \frac{dy}{dt} = -2x \frac{dx}{dt}$ , soit

aussi  $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$ ,

Pour  $y = 3$ ,  $x = 4$  et  $\frac{dx}{dt} = 18$  ; d'où finalement  $\frac{dy}{dt} = -\frac{4 \times 18}{3} = -24$ .

Donc quand le sommet est à 3m du sol, sa vitesse est de 24 cm/s.

**Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Fabrice Laurent (Provins).**

*Remarque.* Fabrice Laurent utilise le fait que la vitesse angulaire du bas et du sommet de l'échelle est la même par rapport au centre instantané de rotation. Le problème se ramène alors au simple calcul d'une quatrième proportionnelle !