

« Mathématiques et Musique » au Lycée Marseilleveyre

Bénédicte Espariat(*)

Cette année scolaire 2010/2011, le lycée Marseilleveyre a mis en place la nouvelle option d'exploration « Méthode et Pratiques Scientifiques », dite MPS, pour les élèves de seconde.

A – Organisation

Cette option alterne les enseignements de Mathématiques, Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre à raison de 2 h par semaine durant 27 semaines. Les élèves ont donc vu le professeur de Mathématiques 2 h toutes les trois semaines.

L'équipe enseignante a choisi deux thèmes à traiter tout au long de l'année : la musique et l'eau.

Le travail sur la musique a été intégré à un projet PASS (Projet Académique Sup'Sciences) intitulé : « Luthier, un métier d'art et de science ! ». Ce projet a eu pour but de mettre en évidence les notions scientifiques intervenant dans la construction d'un instrument : la guitare. Dans ce but, nous avons travaillé toute l'année en collaboration avec le luthier et acousticien marseillais Joël Laplane.

Plusieurs sorties ont été proposées aux élèves afin d'illustrer les notions travaillées en cours. Ces sorties ont été réparties entre les différents groupes participant au projet :

- à l'atelier de lutherie,
- au laboratoire d'acoustique du CNRS,
- à la faculté des sciences de Luminy, lors d'un stage de 3 jours,
- à la forêt de la Sainte Baume,
- au lycée voisin Poinso-Chapuis qui propose des formations sur les métiers du bois.

Le projet s'est conclu par la construction de deux épinettes des Vosges et par un concert donné au lycée par l'orchestre à plectres du Conservatoire de Marseille.

Ces multiples activités ont fait que, cette année, le thème de la musique a été abordé sur une période bien plus longue que celui de l'eau.

B – CONTENU

Le travail sur la musique et les sciences a été abordé suivant trois grands thèmes :

(*) Professeur de mathématiques au lycée Marseilleveyre (Marseille).
math.espariat@gmail.com

I – La nature ondulatoire du son

En physique, les élèves ont enregistré puis visualisé (oscilloscope) différents sons (diapason, guitare, voix, flûte). Le signal observé pour le diapason est une sinusoïde car le son est pur : il ne contient qu'une seule fréquence et aucune harmonique. Pour les autres instruments le son est composé. Les élèves ont comparé les oscillogrammes d'une même note jouée par différents instruments (même période mais signal différent, c'est ce qui caractérise le timbre de l'instrument). Ils ont défini l'onde sonore et appris à calculer sa période et sa fréquence. Par une expérience en TP, ils ont déterminé la célérité du son dans l'air.

La formule liant fréquence, masse volumique de la corde, tension, longueur et rayon de la corde a été travaillée en mathématiques et physique :

Une corde qui vibre émet une fréquence f (en Hz) : $f = \frac{1}{2Lr} \sqrt{\frac{t}{\mu\pi}}$ qui dépend :

- de la masse volumique μ , exprimée en g/m^3 ,
- de la force de tension notée t , exprimée en newton,
- de la longueur L de la corde, exprimée en mètre,
- du rayon r de la corde, exprimé en mètre.

Au laboratoire de mécanique et d'acoustique du CNRS, les chercheurs (Solvi YSTAD et Erick OGAM) qui ont reçu les élèves avaient mis au point des expériences avec le luthier Joël LAPLANE ayant pour but de mettre en évidence la nature vibratoire du son (tube de Kundt, pot vibrant, ...) et les vibrations des différentes parties de la guitare, en particulier de la table d'harmonie.

La sinusoïde obtenue pour le diapason a été exploitée en Mathématiques : lien avec le sinus d'un angle, cercle trigonométrique, périodicité de la fonction, tableau de variation, tracé de la courbe représentative de la fonction sinus, symétries de la courbe. À l'aide d'un traceur de courbes nous avons visualisé les courbes de différentes fonctions associées à la fonction sinus et la relation liant amplitude, fréquence et période du signal a permis d'émettre des hypothèses sur l'effet produit sur le son en termes d'intensité et de hauteur du son. Ils ont également pu visualiser la somme de plusieurs sinusoïdes de fréquences différentes et voir que le signal obtenu ressemble à ceux des sons composés étudiés en physique.

En SVT, les élèves ont travaillé par groupes au CDI et ont effectué des recherches sur le son biologique audible (les chants, la voix humaine), l'appareil vocal et l'appareil auditif : les organes, l'analyse de la voix : acquisition des sons produits et étude du larynx, (rôle des cordes vocales, caisse de résonance, ...).

Un groupe d'élèves a effectué un stage « Hippocampe » de trois jours à l'IREM sur « Mathématiques et musique », encadrés par Anne PICHON, chercheur à l'IML (Institut de mathématiques de Luminy) et ses collègues Jean DOUGNAC, Julien LEFÈVRE et Serge TROUBETZKOY. Les élèves se sont répartis en 6 groupes de 3 et ont travaillé sur trois thèmes différents :

- la gamme pythagoricienne et la quinte du loup,

- la gamme chromatique et les transpositions
- les canons rythmiques.

Ils ont fait des hypothèses, des calculs, des dessins, des vérifications à l'aide d'instruments de musique pendant un jour et demi, aidés par leurs tuteurs et Anne PICHON.

À la fin de la deuxième journée, ils ont présenté un exposé de l'avancée de leurs recherches devant leurs camarades (épreuve difficile...).

Puis, le lendemain, ils ont confectionné des posters résumant les idées et théories abordées, ils ont présenté ces posters aux chercheurs de l'IML ainsi qu'aux étudiants de licence de mathématiques. Ils ont répondu aux questions posées (pas toujours faciles...) et surtout échangé des idées.

Les deux premiers thèmes sont liés et s'appuient sur une expérience faite par les pythagoriciens avec le monocorde (une corde tendue entre deux chevilles sur une caisse de résonance).

On pince la corde en son milieu et le son obtenu en jouant sur la moitié de corde restante « se marie parfaitement » avec le son de la corde à vide. On appellera « octave » l'intervalle obtenu entre ces deux sons.

On pince ensuite la corde aux $\frac{2}{3}$ de la corde, et le son obtenu en jouant sur les deux tiers de corde restante « se marie bien » aussi avec le son de la corde à vide. On appelle « quinte » l'intervalle obtenu entre ces deux sons.

1) La quinte du loup

Les élèves ont travaillé sur la fréquence de chaque son (on leur a indiqué qu'elle est inversement proportionnelle à la longueur de corde qui vibre).

Ils ont construit une suite numérique de fréquences sur les principes suivants (fig. 1) :

Gamme Pythagoricienne

On construit la gamme pythagoricienne de la façon suivante :

Les six premiers termes sont calculés comme pour la gamme précédente.

Puis on choisit F_6 telle que F_6 est sa quinte. Cela implique que $F_6 = \frac{3}{2} F_5$ donc $F_6 = \frac{3}{2} F_5$ pour la ramener dans l'intervalle $[F_5, F_6]$.

On obtient 7 notes.

On constate par le calcul que le rapport de fréquence entre les notes est $\frac{256}{243}$ pour les tons et $\frac{256}{243}$ pour les demi-tons.

On construit les \sharp en multipliant chaque note par $\frac{256}{243}$ et les \flat en divisant par $\frac{243}{256}$.

Par cette construction, les \sharp ne sont pas égaux aux \flat .

Exemples :

$$Re^{\flat} = Re \times \frac{243}{256} \quad Do^{\sharp} = \frac{256}{243}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{243}{256}$$

$$= \frac{3^2}{2^3} \times \frac{3^5}{2^8}$$

$$= \frac{3^7}{2^{11}}$$

$$= \frac{2187}{2048} \approx 106.$$

La gamme Pythagoricienne est la différence entre Re^{\flat} et Do^{\sharp} . il se calcule de la façon suivante :

$$Comme $P = \frac{Re^{\flat}}{Do^{\sharp}}$$$

$$= \frac{2187}{2048} \times \frac{243}{256}$$

$$= \frac{3^7}{2^{11}} \times \frac{3^5}{2^8} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 101$$

Figure 1

Le poster « Gamme pythagoricienne »

La fréquence de départ est 1.

On multiplie par $3/2$ la fréquence précédente afin d'obtenir la quinte supérieure et si la fréquence obtenue est en dehors de l'intervalle $[1 ; 2]$ (c'est-à-dire si on sort de l'octave) on la divise par 2 pour la ramener à l'octave inférieur.

Ils ont ensuite ordonné ces fréquences dans l'ordre croissant. Les élèves ont pu ainsi comprendre pourquoi la gamme utilisée le plus couramment contenait 12 demi-tons : en effet, la douzième fréquence obtenue par ce principe est très proche de 1 qui est la fréquence de départ. En prenant 1 comme douzième fréquence on fait une approximation qui correspond à cette fameuse quinte du loup qui sonne faux⁽¹⁾.

Les élèves ont aussi créé une nouvelle gamme construite sur le même principe, mais en augmentant de quarts successives⁽²⁾ (au lieu des quintes) et ils l'ont jouée sur la corde d'un violoncelle, après avoir marqué les longueurs de corde correspondantes sur le manche.

Ils ont aussi comparé la gamme créée avec la gamme dite « pythagoricienne ».

En calculant les fréquences de différents sons, ils ont constaté que Do dièse (obtenu avec la première gamme) n'était pas le même son que Ré bémol (obtenu avec la seconde gamme), alors que sur le piano ou la guitare ces deux notes sont les mêmes.

2) Gamme chromatique et congruences : L'horloge musicale

Dans ce groupe, le travail des élèves a été basé sur le principe de la gamme tempérée chromatique, composée de 12 notes espacées d'un même intervalle : le demi-ton.

Deux notes successives de la gamme (peu importe lesquelles) ont donc toutes le même rapport de fréquences (puisque'il se trouve que l'oreille humaine est sensible aux rapports de fréquence, et non aux différences).

La suite des fréquences des notes de la gamme est ici une suite géométrique dont la raison k vérifie $k^{12} = 2$, puisque douze demi-tons forment une octave (qui s'obtient en multipliant la fréquence initiale par 2).

Les élèves ont déterminé une valeur approchée de ce nombre par approximations successives, puis ont calculé les fréquences des notes de la gamme.

Ils ont découvert le système des congruences en travaillant à une octave près et en assimilant par exemple le Do3 (Do de la troisième octave à partir de l'octave de référence) au Do4 (Do de la quatrième octave). Ils ont ainsi travaillé modulo douze demi-tons et ont découvert les bases du calcul dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Ils ont aussi mis en évidence des sous-groupes stables de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ qu'ils ont nommés « accords ». En plaçant les douze demi-tons de la gamme sur le cadran d'une horloge (fig. 2), ils ont mis en place un moyen rapide de transposer une mélodie dans la tonalité désirée : pour transposer de n demi-tons au-dessus (resp. en dessous), il suffit de tourner de n crans vers la droite (resp. vers la gauche).

(1) On l'appelle ainsi parce qu'elle « hurle ».

(2) Ce qui revient à faire une succession de quintes descendantes.

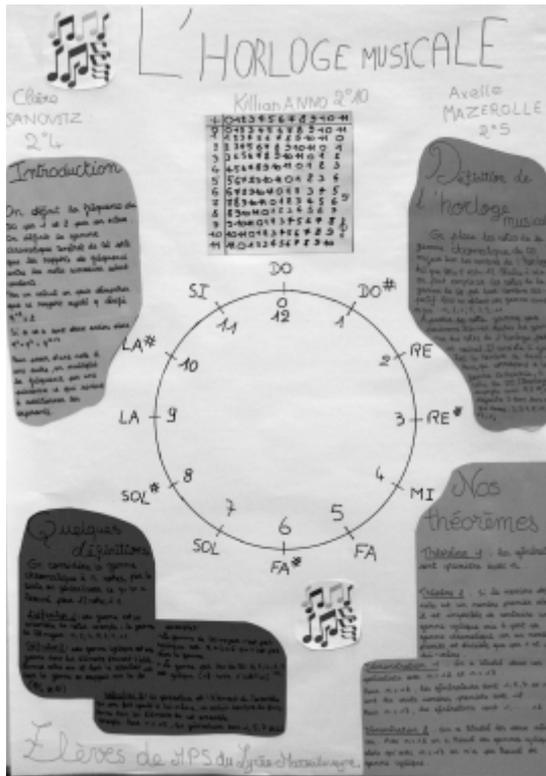


Figure 2
Le poster « Horloge musicale »

3) Les canons rythmiques

À travers ce thème, les élèves ont étudié différentes façon de faire jouer le même rythme (décalé dans le temps) à trois ou quatre instruments différents, en faisant attention à ce qu'il n'y ait pas deux instruments qui jouent sur le même temps et à ce que chaque temps soit joué par un instrument.

L'étude des différentes possibilités n'a pas été très évidente, trouver de nouveaux canons a été un peu laborieux au départ. Cette recherche a amené les élèves à modéliser chaque canon par deux ensembles A et B représentant les temps joués (A) et les temps d'entrée des différentes voix (B), ainsi que la période du canon. Afin de déterminer si tous les temps étaient joués, les élèves ont établi une addition particulière de ces deux ensembles.

Ils se sont alors rendu compte que chaque canon possédait un canon dual, obtenu par échange des ensembles A et B, et ils se sont intéressés aux propriétés de ce dual. Des propriétés géométriques, par exemple en représentant les canons par des polygones inscrits dans un cercle correspondant à la période du canon et non plus de manière linéaire.

Ils ont joué avec beaucoup de sérieux et de concentration les canons obtenus à l'aide d'instruments de percussion !

Les élèves qui ont participé à ces trois jours de recherche n'étaient pas tous des scientifiques mais ils ont été unanimes. Même si certains ont été un peu déstabilisés au départ par le travail demandé (qui est bien moins cadré qu'au lycée), ils ont tous beaucoup apprécié ces trois jours et souhaitent renouveler l'expérience. La présentation des posters a été un moment assez angoissant en amont, mais au final très valorisant et plus naturel que l'exposé fait la veille devant les camarades. Le bilan de ces trois journées a été positif pour les élèves mais également pour moi qui les accompagnait !

II – Le bois, matériau indispensable

Le luthier Joël LAPLANE est venu au lycée donner une conférence sur la fabrication d'une guitare : il a présenté les différents bois intervenant dans la construction de l'instrument ainsi que les conditions de croissance de l'arbre et les caractéristiques requises pour le bois utilisé (rigidité, légèreté, vitesse de propagation du son, résistance à la déformation). Il a présenté les différentes pièces de la guitare et les étapes de la construction. Il a aussi présenté les différents modes vibratoires des pièces de bois constituant la guitare. Il a répondu à de nombreuses questions des élèves et certains élèves sont ensuite allés visiter son atelier.

Au lycée, les élèves ont élaboré des protocoles expérimentaux afin de tester la résistance, la densité, la masse volumique de différents bois.

Ils ont aussi observé des lames de coupe transversale de bois au microscope et en ont réalisé des dessins d'observation afin d'en comprendre la structure interne.

Nous sommes allés visiter la forêt de la Sainte Baume avec Joël LAPLANE et Christian VACQUIÉ, guide forestier de l'Office National des Forêts. Nous avons pu apprendre l'histoire particulière de cette forêt et le rôle joué par le couvent de la Sainte-Baume dans la protection de la forêt au fil du temps. Ils nous ont présenté les différentes essences présentes dans le massif (frêne, hêtre, érable, if, houx, ...) et leurs conditions de croissance. Le guide a insisté sur le fragile équilibre de l'écosystème, sur le travail de l'ONF, ainsi que sur la place importante de l'eau dans ce massif qui est bassin versant de l'Huveaune. Cette sortie a d'ailleurs permis une articulation avec le thème de l'eau qui a suivi celui de la musique.

III – L'Instrument : La guitare

J. LAPLANE nous a transmis une étude géométrique (qu'il a effectuée sur la forme de la table d'harmonie de la guitare classique dite « de Torres »⁽³⁾) faisant intervenir le nombre d'or dans des rapports de différents rayons ou diamètres des nombreux cercles utilisés dans le tracé de la table d'harmonie, étant donné que la forme de cet instrument est basée sur deux pentagones réguliers (fig. 3). Cela a permis d'effectuer un travail intéressant sur le nombre d'or, allant de la définition du format d'un

(3) Du nom du luthier sévillan Antonio DE TORRES JURADO (1817-1892) qui l'a créée.

rectangle et de la résolution d'une équation du second degré jusqu'à la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

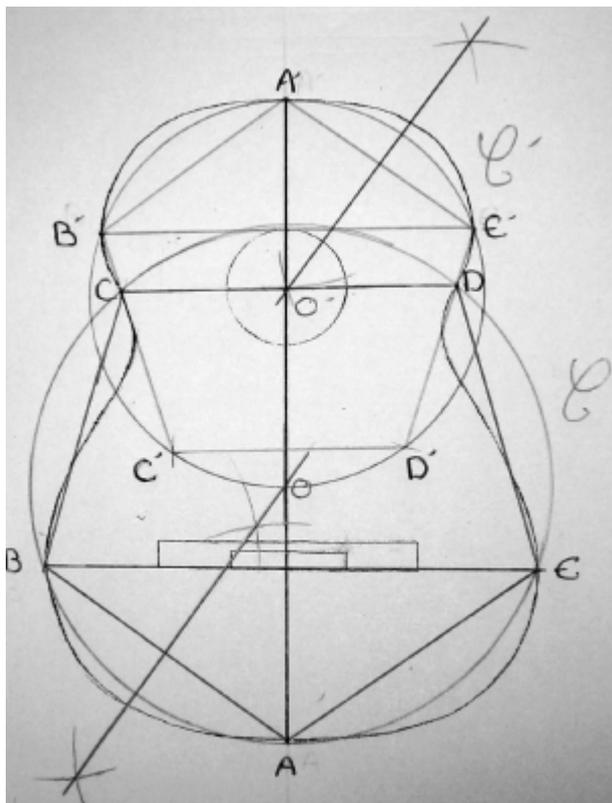


Figure 3

Le schéma théorique de la guitare de Torres

Après avoir classé les instruments de musique en trois grandes familles, les élèves ont noté la nécessité d'un résonateur et d'un excitateur pour chaque instrument : la guitare en particulier, avec les cordes qui vibrent et la caisse de résonance.

En mathématiques, nous avons observé le manche de la guitare, mesuré les longueurs de corde vibrante correspondant aux différentes frettes et avons constaté que le rapport de deux longueurs de corde successives était constant. Nous avons alors déterminé la valeur théorique de ce rapport en décrivant le tempérament égal, et comparé aux différents rapports trouvés par les mesures : on est en présence d'une suite géométrique de raison $\sqrt[12]{2}$. Ces calculs ont permis, en pratique, de déterminer l'emplacement des frettes sur nos épinettes.

Un travail sur le vernis a été fait en chimie : les élèves ont préparé au labo 100 ml de vernis (solution alcoolique de concentration massique 100g/l) en suivant le protocole élaboré par le luthier Joël LAPLANE. Le vernis n'a pas seulement un intérêt esthétique,

il permet aussi de supprimer les dernières impuretés du bois, d'améliorer son acoustique et de le rendre plus résistant au temps. Ce vernis a été utilisé lors de la construction des instruments en fin d'année.

Nous avons mis en pratique l'ensemble des notions abordées lors de la construction de deux épinettes. L'épinette des Vosges est un instrument diatonique à 6 cordes possédant des frettes comme la guitare. Les pièces ont été découpées par Joël LAPLANE dans son atelier et nous avons poncé, verni avec la solution préparée en chimie, calculé les emplacements des frettes, percé et assemblé les différentes pièces. Le cordage et l'accordage ont été effectués par le luthier en classe et les finitions réalisées à l'atelier (fig. 4).



Figure 4
Les épinettes

Un groupe d'élèves a visité les classes d'ébénisterie, de sculpture et de marqueterie du lycée professionnel Poinso-Chapuis, voisin du nôtre, spécialisé dans les divers métiers du bois. Cette visite nous a permis d'apprendre que les élèves y fabriquaient eux aussi des épinettes ! Cela permettra certainement de poursuivre ce projet l'année prochaine en collaboration avec ce lycée.

Pour clôturer le projet sur la lutherie, nous avons invité la classe de guitare et mandoline du Conservatoire de Marseille pour un concert au lycée, dirigé par Alexandre BOULANGER. Deux solistes étaient présents à la mandoline et au chant : Rémi et Vincent BEER-DEMANDER. La diversité du répertoire interprété par cet ensemble à plectre a permis aux élèves de découvrir des musiques bien différentes. Lors de ce concert, nos élèves ont présenté un diaporama qu'ils avaient préparé sur le projet. Ils ont été volontaires et enthousiastes !

C - Évaluation des élèves

Même si les notes des enseignements d'exploration n'ont pas d'incidence sur la décision du conseil de classe concernant l'orientation des élèves, il nous a paru important de faire apparaître sur le bulletin note et appréciation.

Les questionnaires et recherches à rendre à la suite des sorties, l'élaboration de protocoles expérimentaux, les comptes rendus de TP et autres travaux relevés, la réalisation d'un diaporama, l'investissement en classe, le soin apporté aux notes et à la tenue du classeur ont permis de noter et de donner une appréciation sur chaque élève lors des deuxième et troisième trimestres. Lors du premier trimestre en revanche, cela n'a pas été possible étant donné que les séances ont commencé début octobre et que chaque professeur ne voit les élèves que toutes les trois semaines.

D - BILAN

Les points faibles

L'alternance que nous avons choisie a créé des difficultés au niveau du suivi des élèves (certains, absents à une séance avant une période de vacances, n'ont pas vu le professeur de math pendant deux mois), c'est alors le thème qui a créé la continuité de l'enseignement.

Ce travail nécessite donc un travail de préparation et de concertation vraiment important, qui n'est pas prévu dans le dispositif mais se révèle vraiment nécessaire...

De par l'importance du projet sur la lutherie, la répartition des deux thèmes dans le temps et dans le contenu a été inégale. C'est un point que l'on souhaite corriger l'année prochaine afin de renouveler l'intérêt des élèves.

Les points forts

J'ai personnellement trouvé cet enseignement passionnant et extrêmement enrichissant pour plusieurs raisons :

Tout d'abord une grande liberté pédagogique en termes de contenus (seuls les thèmes sont proposés, pas les notions à mettre en place).

Les séances sont toutes pensées à partir d'un thème choisi et non plus à partir de compétences à acquérir. Les notions mises en œuvre prennent du sens dans l'esprit des élèves car elles interviennent en situation lorsqu'ils en ont besoin.

La transversalité de cet enseignement est fondamentale. Elle apporte beaucoup à l'élève, mais encore plus à l'enseignant pour qui c'est l'occasion de décroquer son enseignement, de mieux connaître les autres enseignements et leur fonctionnement, et aussi d'enrichir son enseignement de nouvelles applications pratiques.

E - CONCLUSION

Les élèves et les enseignants ont apprécié les actions de ce projet pédagogique atypique, enrichissant par sa diversité tout au long de l'année scolaire.

Les notions scientifiques mises en œuvre ont pris du sens dans l'esprit des élèves car ils en ont découvert des applications et en ont fait l'observation.

Les différentes interventions du luthier acousticien Joël LAPLANE ont été passionnantes pour les élèves. C'est un enseignement qui marquera à long terme les élèves et qui les a déjà sensibilisés au travail de précision qu'est la construction d'un instrument de musique, au choix minutieux des matériaux, aux sciences qui interviennent, à la beauté de l'instrument ainsi qu'à la beauté d'une forêt comme celle de la Sainte Baume...

E – BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE:

Tangente Hors Série n° 11 « Maths & musique - Des destinées parallèles ».

Brochure de l'APMEP 53 (1984) « Musique et Mathématique, suivi de Gammes Naturelles », par Bernard Parzysz et Yves Hellegouarch.

Amiot, Emmanuel : À propos des canons rythmiques. Gazette des Mathématiciens, 106 (2005).

Programme officiel de MPS : <http://eduscol.education.fr/cid52256/ressources-methodes-pratiques-scientifiques.html>

Site du luthier Joel Laplane :

<http://www.joel-laplane.com/>

http://www.joel-laplane.com/images/dossier%20du%20mois/nbre_d'or.pdf

Reportage à paraître sur Télé web Campus réalisé par Thomas Giovanetti :

<http://sites.univ-provence.fr/webtv/>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Gamme_pythagoricienne