Le statisticien et le radariste

Jean-Louis Piednoir

La situation décrite ci-dessous est extraite d'un problème réel étudié dans le cadre de la direction de la recherche du ministère de la défense et publié dans la revue du CETHEDEC. Il a l'avantage d'offrir une illustration concrète des concepts de la statistique inférentielle et en particulier de la théorie des tests. Il peut être utile dans les sections de techniciens supérieurs. La notion de test n'est pas au programme des classes de lycée, néanmoins il peut être utilisé pour relativiser le fameux seuil de 5% utilisé dans les applications de l'intervalle de fluctuation.

Un dialogue fécond

Le statisticien ne s'attendait pas à ce que des radaristes fassent appel à lui pour améliorer la performance de leurs systèmes de détection. Entré dans un groupe de travail pluridisciplinaire il a dû comprendre le fonctionnement de la machine, les amener à préciser leurs hypothèses et surtout à comprendre leur vocabulaire et découvrir que sous des mots différents on faisait appel aux mêmes concepts. En retour il a enrichi sa palette des applications de la statistique et trouvé une situation où on pouvait physiquement mettre en évidence divers aspects de la notion de risque, en particulier celle que l'on enseigne au lycée à partir de l'intervalle de fluctuation et dans les sections de techniciens supérieurs dans le chapitre des tests statistiques à propos du contrôle de fabrication.

Le radar est un instrument servant, entre autres, à détecter des objets dans les airs ou sur la surface de la mer. Pour des raisons de simplification, dans ce qui suit, on se contentera de traiter le deuxième exemple qui est à deux dimensions.

Le fonctionnement du radar

Le radar fonctionne sur le principe suivant. À l'extérieur une antenne tournante émet une onde électromagnétique et un détecteur recueille les échos de cette onde produits par l'environnement. Pour préciser les choses on passe en coordonnées polaires et chaque case de la surface surveillée sera repérée par son azimut θ, mesuré à partir d'une demi-droite choisie comme origine, $\theta \in [0, 2\pi]$, et par sa distance ρ du point d'observation, $\rho \in [0, R]$ où R est la portée limite de l'appareil. À l'intérieur du navire chargé de la surveillance est installé un oscilloscope avec un segment en surbrillance lié à la rotation de l'antenne et reproduisant la zone surveillée. Quand un objet est détecté un point lumineux apparait sur l'écran dans la case azimut distance correspondante. Un tour d'antenne dure quelques secondes et le nombre de cases est de l'ordre de 10^4 ou 10^5.

Le problème posé est de savoir à partir de quelle puissance du signal on fait apparaitre un point lumineux sur l'écran. En effet on reçoit toujours un écho ne

(*) amjl.piednoir@orange.fr

serait-ce que parce qu'il existe un bruit propre de l'appareil, appelé bruit thermique, ou parce que les vagues de la mer renvoient aussi un écho appelé clutter. Bref il faut distinguer le signal du bruit. Le bruit est une variable aléatoire qui se superpose toujours à un éventuel signal que l'on décrit comme une variable certaine mais d'intensité dépendant de l'objet intercepté. Si x est l'écho recueilli, b le bruit et s le signal on a : $x = b + s$. En fait ces variables sont des fonctions continues que l'on échantillonne. Dans chaque case azimut/ distance on recueille un échantillon de 20 à 30 observations de l'écho correspondant que l'on comparera à un échantillon de 40 à 60 observations faites dans les deux cases voisines et supposées être sans signal.

Le traitement du signal

C'est maintenant qu'intervient le statisticien. Dans les radars classiques on suppose que la loi du bruit est gaussienne et on peut choisir moyennes et écart-type comme indicateur. Appelons $\bar{x}$ la moyenne des observations de l'écho litigieux, $\bar{y}$ celle des observations de bruit et σ l'écart-type déduit de l'ensemble des observations, si N est le nombre total d'observations :

$$\mathrm{N}\sigma^2 = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \sum\left(y_j - \bar{y}\right)^2.$$

Considérons les quantités, appelées statistiques, suivantes :

$$\bar{x} - \bar{y} \text{ et } t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma}.$$

On suppose que toutes les observations sont indépendantes et de même loi (de Gauss) dans chaque échantillon. Alors deux cas se présentent.

- En l'absence de signal $\bar{x} - \bar{y}$ suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type σ.
- En présence de signal $\bar{x} - \bar{y}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

Le statisticien décidera qu'il y a signal si $\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma}$ ou t est supérieur à un seuil t_α qui dépend du risque α accepté de décider à tort qu'il y a un signal alors qu'il n'y avait que du bruit. Sa valeur est déterminée par la « table » de la loi normale centrée réduite si σ est connu ou celle de Student sinon.

Passons à l'observation physique du risque α. Comme la procédure est répétée N fois, avec N = 10^4 ou 10^5, on verra apparaitre sur l'écran, en l'absence d'objet à détecter, à chaque tour d'antenne un **nombre de points lumineux égale en moyenne à N × α**. C'est beaucoup trop pour un observateur si $\alpha = 0{,}05$ comme on semble en faire une norme dans beaucoup de programmes ! Impossible de traiter plusieurs centaines de faux échos comme disent les radaristes. Aussi, en général on choisit $\alpha = 10^{-3}$ ou $\alpha = 10^{-4}$. Il existe d'ailleurs sur l'appareil un bouton faisant varier α et on voit apparaitre de nombreux points lumineux sur l'écran quand on fait croitre α.

Mais il y a un hic. Si α est trop petit et donc t_α trop grand on ne détectera que de gros objets pour lesquels la valeur de μ est grande. Évidemment on n'a pas attendu le statisticien pour distinguer un pétrolier du bruit des vagues, mais quand il s'agit d'un périscope de sous-marin ce n'est pas la même histoire. Les radaristes appellent « probabilité de détection », notée P_d, la probabilité de faire apparaitre un point lumineux sur l'écran quand un objet est effectivement présent à la surface de la mer. P_d est une fonction croissante de μ qui mesure l'importance du signal, mais **la probabilité de détection décroit avec α**. Dans son langage le statisticien appelle P_d la puissance du test effectué.

Le dilemme du commandant

Dans une situation difficile, disons une situation de conflit, le commandant est confronté au dilemme suivant : peu de fausses alarmes mais le risque de ne pas détecter des objets menaçants, ou bien améliorer sa détection et être infecté par les faux échos. Ces derniers ne sont pas anodins. En effet quand une détection, réelle ou fausse, est faite on mobilise des moyens pour circonvenir le danger potentiel. Si trop d'entre eux ont été utilisés pour rien, il n'en restera plus si un vrai danger apparait ultérieurement.

La problématique des tests statistiques est illustrée pratiquement. Le commandant doit arbitrer entre deux risques : gaspiller pour rien des moyens précieux et être démuni en cas de véritable danger qui aura été détecté, ou bien les économiser au risque de ne pas détecter le danger. Pour l'arbitrage un seul indicateur le niveau α du test qui dans chaque case azimut distance permet de décider, si oui ou non on fait apparaitre un point sur l'écran du radar.

Problèmes ultérieurs

Évidemment les radaristes n'ont pas fait appel au statisticien pour un problème aussi simple que celui exposé ci-dessus. Ils ont remarqué que, par exemple, dans certaines conditions météorologiques, le nombre de faux échos devenait très important, que l'efficacité de la détection devenait faible. Quand la mer est agitée le clutter, bruit engendré par des échos sur les vagues, le niveau de ce bruit est certes plus important, mais plus profondément les hypothèses sur lesquelles sont fondées la procédure de décision, à savoir l'utilisation de la moyenne devient inappropriée. En effet les observations ne sont ni indépendantes, ni gaussiennes. Il a fallu trouver d'autres procédures adaptées au cas où les observations faites ne sont pas des réalisations de variables aléatoires suivant une loi normale et de surcroit indépendantes.

Après un travail en commun, les divers participants se sont mis d'accord sur le modèle probabiliste décrivant le phénomène, les statisticiens ont proposé d'autres statistiques dites non paramétriques pour combiner les données et chercher à déterminer le nombre d'observations : en faut-il beaucoup, mais très dépendantes les uns des autres, ou moins, mais telles que l'écart temporel entre deux consécutives soit suffisant pour garantir, sinon une indépendance entre-elles, du moins une faible corrélation comme disent les radaristes ? Vu la complexité des calculs à effectuer ces derniers ont été complétés par de nombreuses simulations, un informaticien faisait partie de l'équipe.