Remarques sur les suites de Goodstein

Roger Cuppens

> Je crois que deux et deux sont quatre, Sganarelle, et que quatre et quatre sont huit.
> Molière. *Don Juan*, Acte III, Scène 1.

Dans la conférence [1] que j'ai donnée pour mon jubilé, j'ai montré que, contrairement aux idées diffusées par l'enseignement actuel, la construction des nombres réels sur la base de la théorie des ensembles de Cantor n'a pas été admise sans réticences par de nombreux mathématiciens. Sans aller jusqu'à la position extrême de Brouwer qui ne manque pourtant pas de pertinence, une position moyenne est celle de Henri Poincaré dont les idées ont eu un développement intéressant dans l'analyse constructive où la notion d'algorithme remplace celle de démonstration : cette théorie semble particulièrement bien adaptée pour étudier les mathématiques réalisables sur un ordinateur. La vignette [2] sur les suites de Goodstein sur lesquelles j'aimerais revenir plus en détail me semble une bonne occasion pour étudier de même l'arithmétique.

1. Les suites faibles de Goodstein en arithmétique intuitive

1.1. L'arithmétique intuitive

Actuellement, tous les mathématiciens semblent d'accord sur une idée commune de nombre entier naturel et même sur le fait que ces entiers forment un ensemble infini $\mathbb{N}$. Pourtant cette dernière idée allait à l'encontre du tabou de l'infini actuel remontant aux Grecs et n'est apparue qu'au 19e siècle. Des mathématiciens éminents comme Fermat ou Gauss ont pu obtenir leurs résultats sans cette conception. Ceci, bien entendu, suppose par exemple de remplacer un énoncé tel que « l'ensemble des nombres premiers est infini » par « pour tout entier n, il existe un nombre premier plus grand que n ». La principale spécificité de ce domaine des mathématiques réside dans le principe de démonstration par récurrence. C'est ce que j'appelle l'arithmétique « intuitive ».

1.2. Les suites faibles de Goodstein

En arithmétique intuitive, la notion de « suite » n'a de sens que s'il existe un procédé de calcul (oserais-je dire un algorithme ?) permettant d'en calculer le n-ième terme.

Pour définir les suites faibles de Goodstein, nous considérons une fonction φ définie de la manière suivante :

Soient x et b deux entiers naturels avec $b \geq 2$.

• Si $x = 0$, alors $\varphi(0,b) = 0$.

• Si $x \neq 0$ et si

$$c_p b^p + \ldots + c_1 b^1 + c_0 \tag{1}$$

est la décomposition de x dans la base b, alors

$$\varphi(x,b) = c_p(b+1)^p + \ldots + c_1(b+1)^1 + c_0 - 1 \tag{2}$$

On constate qu'il y a deux possibilités :

• Si $c_0 \neq 0$, alors (2) est la décomposition de $\varphi(x,b)$ dans la base $(b + 1)$.
En particulier, si $x < b$, alors

$$\varphi(x,b) = x - 1 \tag{3}$$

et par conséquent

$$\varphi(1,b) = 0 \tag{4}$$

• Si $c_0 = 0$ et si r est le plus petit entier dans (1) tel que $c_r \neq 0$, alors

$$\varphi(x,b) = c_p(b+1)^p + \ldots + (c_r - 1)(b+1)^r + b(b+1)^{r-1} + \ldots + b(b+1)^1 + b \tag{5}$$

est la décomposition de $\varphi(x,b)$ dans la base $(b + 1)$.

Définition. Soient a et b ($b \geq 2$) deux nombres naturels. On appelle *suite faible de Goodstein* de paramètres a et b la suite de récurrence (u_k) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{k+1} = \varphi(u_k, b+k) \end{cases} \tag{6}$$

Remarque. Dans [2], seul le cas $b = 2$ est considéré.

Pour ces suites, on a le résultat suivant :

Théorème. Si (u_k) est une suite faible de Goodstein de paramètres a et b, on peut calculer un entier $n(a,b)$ tel que $u_{n(a,b)} = 0$.

Une (idée de) démonstration. Si m_k est la suite des coefficients du développement de u_k dans la base $b + k$, alors la suite (m_k) est une suite de $\mathbb{N}^{p+1}$ strictement décroissante pour l'ordre lexicographique dans $\mathbb{N}^{p+1}$. On peut penser que cette suite est donc finie, ce qui démontrerait le résultat.

On fournira en annexe une démonstration détaillée et des formules permettant un calcul effectif du nombre $n(a,b)$ à partir duquel $u_{n(a,b)} = 0$. Dans l'immédiat, un calcul des premiers termes de chaque suite fournit le tableau suivant :

a	$n(a,2)$	$n(a,3)$	$n(a,4)$	$n(a,5)$	$n(a,6)$	$n(a,7)$
1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	2	2	2	2
3	5	4	3	3	3	3
4	21	6	5	4	4	4
5	61	8	7	6	5	5
6	381	12	9	8	7	6
7	2045	16	11	10	9	8

Par exemple, $n(5,2)$ s'obtient de la manière suivante :

k	u_k
0	$2^2 + 1$
1	3^2
2	$4^2 - 1 = 3 \times 4^1 + 3$
5	3×7^1
6	$3 \times 8^1 - 1 = 2 \times 8^1 + 7$
13	2×15^1
14	$2 \times 16^1 - 1 = 1 \times 16^1 + 15$
29	1×31^1
30	$1 \times 32^1 - 1 = 31$
61	0

Par contre le même calcul pour $n(8,2)$ donne

$$u_{45} = 1 \times 47^2 + 23 \times 47$$

La formule (7) donnée en annexe donne

$$u_{45+n(23\times 47,47)} = 1 \times (47 + n(23 \times 47,47))^2.$$

et la formule (11) de cette même annexe montre que $n(23 \times 47,47)$ est un très grand nombre et il reste encore à éliminer le terme 1×47^2 ! Le nombre $n(8,2)$ est donc très grand, mais fini…

II. L'arithmétique de Peano

Avant de faire quelques remarques supplémentaires sur [2], rappelons quelques faits que j'ai déjà signalés dans [1].

On sait que, à partir de 1874, Cantor fut le premier à oser transgresser le tabou de l'infini actuel hérité des Grecs et en particulier à considérer l'ensemble des entiers comme le plus petit ensemble infini auquel on pouvait comparer les autres, définissant ainsi la notion de cardinal. Simultanément, la relation d'ordre sur les entiers l'amena à la définition des ordinaux de la manière naïve exposée dans [2]. Évidemment tout ceci amena de sérieuses difficultés, mais à la fin du siècle, ces idées étaient largement répandues au point que Hilbert pouvait parler du « paradis de Cantor ».

À la suite de Cantor, Hilbert introduisit la conception formaliste des mathématiques : une théorie mathématique est constituée d'un ensemble muni d'un certain nombre d'axiomes et de méthodes de démonstration, un théorème étant déduit des axiomes (ou d'autres théorèmes) en respectant les méthodes de démonstration. Évidemment, il fallait introduire une restriction de taille, celle de cohérence, à savoir que l'on ne peut pas dans une théorie démontrer une propriété et sa négation – sinon n'importe quelle propriété (et sa négation) y est démontrable.

C'est en 1889 que Peano propose un système d'axiomes pour l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : c'est ce que l'on appelle maintenant l'arithmétique de Peano. En 1900, dans une célèbre conférence lors du congrès des mathématiciens de Paris, Hilbert propose une série de problèmes dont le deuxième est la cohérence de l'arithmétique de Peano.

Malheureusement pour le formalisme, en 1931, Gödel démontre deux résultats qui semblent mettre à mal le formalisme de Hilbert :
1. Dans l'arithmétique de Peano, il existe des propositions indécidables (c'est-à-dire des proposition pour lesquelles on ne pourra jamais ni fournir une démontration, ni fournir une démonstration de la proposition contraire).
2. On ne peut pas démontrer la cohérence de l'arithmétique de Peano avec les outils de cette arithmétique

Par contre, en 1936, Gentzen prouve la cohérence de l'arithmétique de Peano à partir de l'ensemble des ordinaux de Cantor en utilisant une récurrence transfinie. Mais on a changé de théorie et ceci suppose que cette dernière soit cohérente, ce qui n'est de nouveau pas démontrable à l'intérieur de cette théorie…

C'est dans ce cadre qu'il faut considérer le théorème sur les suites de Goodstein présenté dans [2] et il est sûrement intéressant d'avoir un exemple simple de proposition indécidable dans l'arithmétique de Peano. Mais que peut-on réellement en penser ?

Rappelons(1) que, sans aller jusqu'aux positions extrêmes de Brouwer et des intuitionnistes, de nombreux mathématiciens éminents tels que Borel, Lebesgue, Poincaré ont émis de sérieuses réserves sur le formalisme. Pour eux la démonstration du théorème sur les suites faibles de Goodstein proposée dans [2] qui utilise les ordinaux transfinis n'aurait eu aucune valeur car elle n'est pas constructive : elle ne fournit pas une méthode pour calculer le nombre dont on prétend établir l'existence.

Mais il faut aller plus loin ! Même si on admet la validité de la démonstration par

(1) On trouvera un exposé succint dans [1].

récurrence transfinie du théorème de Goodstein :

« Si (u_k) est une suite de Goodstein, il existe un entier k tel que $u_k = 0$. »

on doit remarquer que dans cet énoncé, le mot « existe » n'a plus le même sens que dans le théorème sur les suites faibles démontré ci-dessus. En effet, dans le cas des suites faibles, on peut préciser « existe et on peut le calculer » tandis que dans le cas général le « existe » est aussi vague que dans l'énoncé de l'axiome du choix. Un intuitionniste dirait (et peut-être à juste titre) : il existe un k, oui mais lequel ?

III. Les algorithmes en arithmétique

Une autre manière de voir la différence est d'utiliser la notion d'algorithme (programme qui fournit toujours le résultat voulu). Pour les suites faibles, le programme

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \text{si } u_k = 0 \\ \quad \text{alors écrire } k \text{ fin,} \\ \quad \text{sinon} \quad \text{si } c_p b^p + c_{p-1} b^{p-1} + \ldots + c_1 b + c_0 \text{ est la décomposition de } u_k \text{ dans la base } b = k+2, \\ \qquad\qquad \text{alors } u_{k+1} = c_p (3+k)^p + c_{p-1}(3+k)^{p-1} + \ldots + c_1(3+k) + c_0 - 1 \end{cases}$$

fournira pour n'importe quelle valeur de a le rang à partir duquel tous les termes de la suite sont nuls. Il est évident que cet algorithme est d'une extrême complexité, c'est-à-dire que dans un ordinateur on n'aura dans un temps raisonnable la valeur de ce rang que pour des petites valeurs de a. On peut évidemment essayer de l'améliorer en travaillant directement sur le développement binaire de a ou en calculant directement la fonction n du paragraphe 1 comme nous allons essayer de le faire dans l'annexe. Par contre il n'existera jamais d'algorithme analogue pour les suites de Goodstein générales.

IV. Conclusion

On voit que la méthode de démonstration et les résultats présentés dans [2] font largement sortir du cadre de l'arithmétique traditionnelle. Les admettre sans discussion relève plus d'une conception de ce que sont réellement les mathématiques. Un mathématicien « pur » ne verra pas d'objection fondamentale à de tels raisonnements. Par contre un mathématicien « appliqué » qui considère que l'un des buts principaux est de fournir des modèles pour expliquer des phénomènes observables sera beaucoup plus réticent. Ici les résultats présentés sont loin de l'idée intuitive des nombres entiers ; on comprend alors mieux les réticences des philosophes grecs (et à leur suite de tous les mathématiciens jusqu'aux travaux de Cantor) à admettre l'existence des ensembles infinis achevés puisque ne considérer que des ensembles infinis potentiels permet d'éviter de tels phénomènes. Aborder ces problèmes avant l'université me semble impossible pour la quasi-totalité des élèves…

Références

[1] Roger Cuppens. Y a-t-il une vérité en mathématiques ? in *50 ans de carrière d'un enseignant-chercheur*, p. 5-39. Brochure APMEP, n° 197, (juin 2012).

[2] Michèle Artigue & Ferdinando Arzarello. Les suites de Goodstein ou la puissance du détour par l'infini. Bulletin de l'APMEP n° 498, p. 196-202.

Annexe

1. Quelques formules concernant la fonction *n*

Commençons par quelques formules fondamentales de la fonction n (dont l'existence sera établie plus loin).

1. Si (u_k) est une suite faible de Goodstein de paramètres a et b et si m est un entier naturel, la suite (v_k) définie par

$$v_k = u_{k+m}$$

est une suite faible de Goodstein de paramètres u_m et $(b + m)$. On en déduit mmédiatement la formule

$$n(a,b) = n(u_m, b+m) + m \tag{7}$$

2. Si (u_k) est une suite faible de Goodstein de paramètres a et b et si $a < b$, de (3) et (4), on déduit que

$$n(a,b) = a. \tag{8}$$

3. Si (u_k) est une suite faible de Goodstein de paramètres a et b et si $a = b^r$, alors

$$u_1 = (b+1)^r - 1 = b\times(b+1)^{r-1} + \ldots + b$$

et par conséquent

$$n(b^r, b) = n\left(b\times(b+1)^{r-1} + \ldots + b, b+1\right) + 1 \tag{9}$$

Plus généralement, si (u_k) est une suite faible de Goodstein de paramètres a et b et s'il existe un entier c $(2 \leq c < b)$ tel que $a = c\,b^r$, de $a = (c-1)\,b^r + b^r$, on déduit que

$$u_m = (c-1)\,(b+m)^r$$

lorsque $m = n(b^r, b)$ et de (7) on obtient

$$n(cb^r, b) = n\left((c-1)(b+m)^r, b+m\right) + m$$

soit

$$n(cb^r, b) = n\left((c-1)\left(b+n(b^r,b)\right)^r, b+n(b^r,b)\right) + n(b^r,b). \tag{10}$$

En particulier, puisque $n(b,b) = b + 1$, on a

$$n(cb,b)=n\big((c-1)(2b+1),2b+1\big)+2b+1,$$

avec laquelle on peut obtenir $n(23{,}47) = 205\,520\,895$.

2. Démonstration du théorème sur les suites faibles de Goodstein

Nous proposons maintenant une démonstration de l'existence de $n(a,b)$ par récurrence sur le nombre r tel que $b^r \leq a < b^{r+1}$

La formule (8) fournit immédiatement le cas $r = 0$.

Nous faisons maintenant l'hypothèse que le résultat est vrai pour tous les entiers a et b vérifiant $a < b^r$.

Soit maintenant un nombre a vérifiant $b^r \leq a < b^{r+1}$. Alors il existe deux nombres entiers c et d vérifiant

$$\begin{cases} a = cb^r + d \\ 0 < c < b \\ 0 \leq d < b^r \end{cases}.$$

Si $d = 0$, puisque

$$b\times(b+1)^{r-1}+\ldots+b<(b+1)^r,$$

de l'hypothèse de récurrence et de (9), on déduit l'existence de $n(b^r,b)$. Puis de (10), on déduit par récurrence sur c l'existence de $n(cb^r,b)$.

Si maintenant $d \neq 0$, d'après l'hypothèse de récurrence, $n(d,b) = m$ existe. On a alors

$$u_m = c\ (b + m)^r$$

et de (7) on déduit l'existence de $n(a,b)$, ce qui prouve le théorème.

3. Calcul de $n(a,b)$

Pour calculer $n(a,b)$, on écrit le développement de a dans la base b :

$$u_0 = a = c_p\, b^p + c_{p-1}\, b^{p-1} + \ldots + c_1\, b^1 + c_0$$

et on considère la suite (m_k) définie par

$$\begin{cases} m_0 = n(c_0,b) = c_0 \\ m_{k+1} = n\Big(c_{k+1}(b+m_k)^{k+1},b+m_k\Big)+m_k \end{cases}$$

Par définition de la fonction n, on obtient

$$u_{m_k} = c_p(b+m_k)^p+\ldots+c_{p-k}(b+m_k)^{p-k}$$

et finalement

$$u_{m_p} = 0.$$

Donc $n(a,b) = m_p$.