Calculer comme les Égyptiens

Pierre Legrand(*)

Le thème mineur étudié ici a l'intérêt de fournir un lot d'exercices indépendants et deux exemples simples d'algorithmes. Il peut être abordé à différents niveaux, de la quatrième à la terminale S.
Les points les plus théoriques peuvent être sautés ; ils sont signalés par une étoile. Les paragraphes faisant appel au programme d'arithmétique de terminale S ont été rejetés en annexe.

1. Introduction

L'Égypte antique connaissait les fractions dès l'an 2000 avant notre ère, mais sous une forme limitée aux inverses d'entier. Les scribes ne manipulaient pas $\frac{3}{4}$, mais $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; de même ils ignoraient $\frac{2}{3}$ et travaillaient sur $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Ce qui était pour eux pain quotidien est devenu au fil des siècles un thème d'étude assez marginal, mais qui connaît encore des avancées … et des problèmes non résolus.

Nous nous limiterons aux rationnels de $]0,1]$. Écrire la fraction $\frac{p}{q}$ $(0 < p \leq q$; $p \in \mathbb{N}$; $q \in \mathbb{N})$ sous forme égyptienne, c'est la décomposer en somme de fractions « unitaires »(1) **distinctes**, de dénominateur au moins égal à 2, que par tradition l'on range dans l'ordre des dénominateurs croissants. Si cette somme comporte n termes, on parle de décomposition de longueur n.

2. Une infinité de décompositions

Une remarque élémentaire fait mesurer la complexité de la situation. En divisant par 6 (2 × 3) l'égalité 3 = 2 + 1, on obtient $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; de même en divisant 4 = 3 + 1 par 12 (3 × 4), on trouve $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$. On peut continuer : en divisant $q + 1$ par $q(q + 1)$ de deux façons, en bloc à gauche, en deux morceaux à droite, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}} \qquad (1)$$

Théorème. *Toute fraction unitaire admet, quel que soit n, au moins une décomposition égyptienne de longueur n.*
On vient de montrer que le résultat est vrai pour $n = 2$. Supposons-le vrai à l'ordre n. En appliquant la formule (1) à la dernière fraction de la décomposition, on obtient

(*) p.m.legrand@sfr.fr
(1) c'est-à-dire de numérateur 1.

une décomposition de longueur $n + 1$.

Ainsi, de $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ on tire $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$, puis $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{42\times 43}$ et ainsi de suite.

Commentaire. Si donc une fraction $\frac{p}{q}$ admet une décomposition égyptienne (on verra au § 4 que c'est toujours le cas), elle en admet une infinité. Les décompositions les plus intéressantes sont les plus courtes et, à longueur égale, celles dont le dernier dénominateur est le plus petit.

3. Recherche de décompositions de longueur 2

3.1. Exercice : cas des rationnels de $\left[\frac{1}{2},1\right[$

Les seuls rationnels de $\left[\frac{1}{2},1\right[$ *ayant une décomposition de longueur* 2 *sont* $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$ *et les nombres de la forme* $\frac{n+2}{2n}$ *où* $n \geq 3$.

Dans une telle décomposition figure obligatoirement $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ (sinon le nombre serait au plus égal à $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, donc inférieur à $\frac{1}{2}$). Reste donc à examiner les écritures $\frac{1}{2}+\frac{1}{k}$ $(k \geq 3)$ et $\frac{1}{3}+\frac{1}{k}$ $(k \geq 4)$…

3.2. Un algorithme de recherche empirique

Le paragraphe précédent ne doit pas faire illusion. Une fraction $\frac{p}{q}$ étant donnée, il n'est en général pas si simple de savoir si elle a des décompositions de longueur 2 et de les trouver. Nous donnons ci-après une méthode grossière, mais efficace … tant que $\frac{p}{q}$ n'est pas trop élevé. Présentons-la d'abord sur un exemple.

Exercice : chercher toutes les décompositions de longueur 2 de $\mathbf{\frac{2}{15}}$

On cherche deux entiers x et y tels que $\frac{2}{15}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ et $0 < x < y$. Pour toute solution, on aura forcément $\frac{1}{x}<\frac{2}{15}$ et donc $x \geq 8$; en outre, de $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ on tire $\frac{1}{x}>\frac{1}{15}$, d'où $x < 15$. Reste à essayer les valeurs de 8 à 14, ce qui donne quatre solutions, comme on le voit ci-après.

$\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{120}$, $\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{3}{15\times 9}=\dfrac{1}{45}$, $\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{5}{150}=\dfrac{1}{30}$ conviennent. Mais $\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{11}=\dfrac{7}{165}$ ne convient pas, puisque 7 ne divise pas 165. On vérifie aisément que la seule autre solution est $\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{9}{180}=\dfrac{1}{20}$.

Systématisons la procédure

Obtenir la décomposition de $\dfrac{p}{q}$ sous la forme $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ avec $x>0$, $y>0$, $x\neq y$, c'est trouver un entier x tel que $\dfrac{p}{q}-\dfrac{1}{x}$ soit positif et puisse se simplifier en une fraction de numérateur 1, autrement dit tel que $px-q$ soit positif et divise qx. Pour éviter de trouver deux fois chaque solution, on impose $x<y$. On a alors pour toute solution $\dfrac{p}{2q}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{p}{q}$, c'est-à-dire $\dfrac{q}{p}<x<\dfrac{2q}{p}$; les valeurs x à essayer sont donc, en notant $[a]$ la partie entière de a, celles vérifiant $\left[\dfrac{q}{p}\right]+1\leq x\leq\left[\dfrac{2q}{p}\right]$, ce qui en donne grosso modo $\dfrac{q}{p}$. On aboutit au tableau de calcul suivant (aisément transformable en programme) :

i	$x_i=\left[\frac{q}{p}\right]+i$	px_i-q	qx_i	$\frac{qx_i}{px_i-1}$	si $\frac{qx_i}{px_i-1}$ entier, $y_i=\frac{qx_i}{px_i-1}$
1					
2					
...					
$\left[\frac{2q}{p}\right]-\left[\frac{q}{p}\right]$	$\left[\frac{2q}{p}\right]$				

Essayons maintenant d'obtenir quelques résultats théoriques.

3.3. Lemme

Si la fraction $\dfrac{p}{q}$ a une décomposition de longueur 2, il en est de même pour toute fraction du type $\dfrac{p}{qr}$.

Le résultat est immédiat. De $\dfrac{p}{q}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ on tire pour tout r : $\dfrac{p}{qr}=\dfrac{1}{xr}+\dfrac{1}{yr}$.

3.4. Théorème

Si une fraction unitaire a pour dénominateur un nombre composé, elle a au moins *deux décompositions de longueur* 2.

Partons de la fraction $\dfrac{1}{pq}$. La formule (1) donne $\dfrac{1}{pq}=\dfrac{1}{pq+1}+\dfrac{1}{pq(pq+1)}$. Mais, si nous l'appliquons à $\dfrac{1}{p}$, nous obtenons $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{p(p+1)}$, d'où en divisant par q, $\dfrac{1}{pq}=\dfrac{1}{(p+1)q}+\dfrac{1}{pq(p+1)}$. De même, en appliquant (1) à $\dfrac{1}{q}$ et en divisant par p, il vient $\dfrac{1}{pq}=\dfrac{1}{p(q+1)}+\dfrac{1}{pq(q+1)}$.

Dans ces trois décompositions, les plus petits dénominateurs sont $pq + 1$, $pq + q$, $pq + p$. Même si $p = q$, il y en a au moins deux distincts.

3.5. Théorème

Toute fraction de la forme $\dfrac{p}{pk-1}$ *admet la décomposition*

$$\boxed{\frac{p}{pk-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k(pk-1)}} \qquad (2).$$

Plutôt que de vérifier brutalement la formule, observons que, $pk - 1$ étant légèrement inférieur à pk, $\dfrac{p}{pk-1}$ admet une bonne approximation par défaut qui est $\dfrac{p}{pk}$, autrement dit $\dfrac{1}{k}$. Il est donc naturel de calculer la différence, ce qui donne immédiatement le résultat.

Corollaire 1. *Toute fraction irréductible de numérateur* 2 *admet au moins une décomposition de longueur* 2.

Le dénominateur est impair ; nous avons donc une fraction de la forme $\dfrac{2}{2k-1}$. Le théorème ci-dessus donne aussitôt :

$$\boxed{\frac{2}{2k-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k(2k-1)}} \qquad (3).$$

Corollaire 2. *Si une fraction de numérateur* 2 *a un dénominateur impair et non premier, elle a au moins deux décompositions de longueur* 2.

Soit une fraction du type $\dfrac{2}{pq}$ où p et q sont impairs. Il suffit d'appliquer la formule (3) successivement à $\dfrac{2}{pq}$, à $\dfrac{2}{p}$ en divisant ensuite par q, à $\dfrac{2}{q}$ en divisant ensuite par p. Reste à vérifier, ce qui est immédiat, qu'on obtient trois solutions distinctes (deux si $p = q$).

***Corollaire 3**. Toute fraction de la forme* $\dfrac{p}{r(pk-1)}$ *admet une décomposition de longueur* 2.

Il suffit de diviser la formule (2) par r pour obtenir

$$\frac{p}{r(pk-1)} = \frac{1}{rk} + \frac{1}{rk(pk-1)} \qquad \text{(2bis).}$$

3.6. Fractions irréductibles de numérateur 3

Nous avons vu que toute fraction irréductible de numérateur 1 ou 2 admet au moins une décomposition de longueur 2. La situation pour les fractions irréductibles du type $\dfrac{3}{q}$ est moins simple.

• **Si q est pair** ($q = 2k$), on a aussitôt $\dfrac{3}{2k} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k}$, ce qui règle la question.

• **Si q est impair**, le reste de sa division par 6 est impair et non multiple de 3 ; c'est donc 1 ou 5, ce qui signifie que q est de la forme $6k + 1$ ou $6k - 1$.

• **Si q est de la forme $6k - 1$**, de $\dfrac{3}{6k-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{6k-1}$, on tire par la formule (2 bis) $\dfrac{3}{6k-1} = \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k(6k-1)}$.

• **Si q est de la forme $6k + 1$**, il peut ou non exister une décomposition de longueur 2, comme le montre l'exercice ci-après.

***Exercice** : Montrer que* $\dfrac{3}{25}$ *a une décomposition de longueur* 2 *et que* $\dfrac{3}{7}$ *n'en a aucune.*

En divisant par 5 la décomposition $\dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}$, il vient $\dfrac{3}{25} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{50}$, de longueur 2.

Supposons maintenant que l'on ait $\dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ avec $x < y$. De $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ on tire $\dfrac{2}{x} > \dfrac{3}{7}$, donc $x < \dfrac{14}{3}$, d'où $x \leq 4$. De $\dfrac{1}{x} < \dfrac{3}{7}$ on tire $x > \dfrac{7}{3}$, donc $x \geq 3$. Il n'y a donc que deux valeurs à essayer, 3 et 4 ; on vérifie qu'aucune ne convient.

***Retour sur le cas où q est de la forme* 6*k* + 1**

Supposons que le dénominateur q soit de la forme $6k + 1$ et non premier, $q = rs$, l'un au moins des deux facteurs, par exemple r, n'étant pas de la forme $6k + 1$.

Le nombre r ne peut être ni 2 ni 3, puisque q n'est divisible ni par 2 ni par 3, donc on a $r > 3$. Alors, d'après la discussion précédente, $\dfrac{3}{r}$ a au moins une décomposition de longueur 2 : $\frac{3}{r}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Il en résulte $\frac{3}{rs}=\frac{1}{xs}+\frac{1}{ys}$. D'où le résultat ci-après.

Théorème. *Toute fraction irréductible de numérateur* 3 *a au moins une décomposition de longueur* 2*, sauf peut-être*(2) *si les facteurs premiers du dénominateur sont tous de la forme* $6k+1$.

3.7. Fractions irréductibles de numérateur 4

Étant donné une fraction irréductible $\frac{4}{q}$, son dénominateur q est de la forme $4k-1$ ou $4k+1$. Dans le premier cas, il suffit d'appliquer la formule (2) :

$$\frac{4}{4k-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k(4k-1)}.$$

Dans le second cas, si q a un diviseur de la forme $4k-1$ ($k \geq 1$), le lemme du § 3.3. permet de se ramener au cas précédent. Ainsi

$$\frac{4}{247}=\frac{1}{13}\times\frac{4}{19}=\frac{1}{13}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{95}\right)=\frac{1}{65}+\frac{1}{1235}.$$

La seule situation restante est celle où q et tous ses diviseurs sont de la forme $4k+1$; on démontre qu'il n'existe alors aucune décomposition de longueur 2 (Cf. annexe).

3.8. Et les décompositions de longueur 3 ?

Rappelons d'abord que, si une fraction a une décomposition de longueur 2 (ce qui est le cas des fractions de numérateur 1 ou 2), elle a aussi des décompositions de longueur 3.
Nous avons vu que toute fraction irréductible de numérateur 3 a au moins une décomposition de longueur 2, sauf dans certains cas où le dénominateur est de la forme $6k+1$.
Si le dénominateur est de cette forme, il est impair. On écrit

$$\frac{3}{2m-1}=\frac{1}{2m-1}+\frac{2}{2m-1}$$

et on applique la formule (3), qui donne

$$\frac{3}{2m-1}=\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(2m-1)}.$$

Donc *toute fraction irréductible de numérateur* 3 *a au moins une décomposition de longueur* 3.

Une conjecture d'Erdös avance que toute fraction irréductible $\frac{4}{q}$ a une décomposition de longueur 3 ; elle a été vérifiée pour q allant jusqu'à 10^{14} mais n'a pas été démontrée. Et une conjecture de Sierpinski, qui elle aussi reste en suspens, énonce que toute fraction irréductible $\frac{5}{q}$ a une décomposition de longueur 3.

(2) Le « peut-être » est de trop. Voir dans l'annexe le corollaire 3 du théorème 2.

4. Algorithme de Fibonacci

4.1. L'idée

Le *Liber abaci* de Fibonacci, qui date de 1202, décrit un processus permettant de décomposer tout rationnel de]0,1[en somme de fractions unitaires distinctes. L'auteur, qui fut sans doute le plus grand mathématicien du Moyen Âge, ne donne évidemment pas de justification en forme.
La méthode consiste à retrancher au nombre donné la plus grande fraction unitaire qui lui soit inférieure, puis à la différence obtenue la plus grande fraction unitaire qui lui soit inférieure et ainsi de suite, en espérant qu'arrivera un moment où la dernière différence calculée sera elle-même une fraction unitaire.

4.2. Exemple introductif

Cherchons une décomposition de $\dfrac{8}{11}$. Nous commençons par retrancher de $\dfrac{8}{11}$ la plus grande fraction unitaire qui lui soit inférieure, soit $\dfrac{1}{2}$, ce qui donne $\dfrac{8}{11}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{22}$, qui n'est pas une fraction unitaire, mais est « plus unitaire » que la fraction initiale, en ce sens que le numérateur est plus proche de 1.
On recommence à partir de $\dfrac{5}{22}$; la plus grande fraction unitaire que l'on puisse retrancher est $\dfrac{1}{5}$, ce qui donne $\dfrac{5}{22}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{110}$; le numérateur a encore diminué.
Recommençons. Cherchons la plus grande fraction unitaire $\dfrac{1}{x}$ inférieure à $\dfrac{3}{110}$; il nous faut $3x > 110$, soit $x > \dfrac{110}{3}$ avec x entier aussi petit que possible, ce qui donne

$x=\left[\dfrac{110}{3}\right]+1$, soit $x = 37$.

Nous avons $\dfrac{3}{110}-\dfrac{1}{37}=\dfrac{3\times 37-110}{110\times 37}=\dfrac{1}{4070}$ et là, le numérateur étant 1, nous arrivons au bout de nos peines : $\dfrac{8}{11}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{37}+\dfrac{1}{4070}$.

4.3. Mise en forme d'une étape du processus

Partons d'une fraction $\dfrac{p_0}{q_0}$ telle que $0 < p_0 < q_0$ et supposons que le processus de Fibonacci nous ait amené à $\dfrac{p_i}{q_i}$ non forcément irréductible, avec $0 < p_i < q_i$.

• Si p_i divise q_i, $\frac{p_i}{q_i}$ est simplifiable en une fraction unitaire et le processus est terminé.

• Sinon on cherche la plus grande fraction unitaire inférieure à $\frac{p_i}{q_i}$, c'est-à-dire le plus petit entier x_i supérieur à $\frac{q_i}{p_i}$, ce qui revient à prendre $x_i = \left[\frac{q_i}{p_i}\right] + 1$. On a alors $x_i - 1 < \frac{q_i}{p_i} < x_i$, soit encore $0 < p_i x_i - q_i < p_i$. On pose $p_{i+1} = p_i x_i - q_i$ et $q_{i+1} = q_i x_i$, d'où résulte $\frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{x_i} + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, avec $0 < p_{i+1} < p_i$.

4.4. Finitude du processus

• On arrive ainsi à

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{i-1}} + \frac{p_i}{q_i} \tag{4}$$

avec

$$p_0 > p_1 > \ldots > p_i > 0 \tag{5}$$

• Les p_i étant des entiers naturels allant en décroissant strictement, le processus ne peut être illimité (principe de *descente infinie* de Fermat). Il existe donc un i tel que p_i divise q_i et la formule (4) donne alors une décomposition de $\frac{p_0}{q_0}$ en somme de fractions unitaires.

• Reste à prouver qu'elles sont toutes distinctes, ce qui est un peu plus délicat et que nous ferons au § 4.6. Mais auparavant montrons comment fonctionne l'algorithme, ce qui est très simple … et peut réserver des surprises.

4.5. Pratique de l'algorithme

Le tableau de calcul utilisé ci-après suit pas à pas le processus dont nous venons de décrire une étape. Le lecteur pourra aisément le traduire en programme dans le langage de son choix.

***Décomposition de Fibonacci pour* 4/17**

i	p_i	q_i	$x_i = \left[\frac{q_i}{p_i}\right] + 1$	$Fract.unit.n°i$	$p_{i+1} = p_i x_i - q_i$	$q_{i+1} = q_i x_i$
0	4	17	5	1/5	3	85
1	3	85	29	1/29	2	85×29 = 2465
2	2	2465	1233	1/1233	1	2465×1233 = 3039345
3	1	3039345	terminé	1/3039345		

Une surprise désagréable

Nous avons ainsi : $\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{29}+\dfrac{1}{1\,233}+\dfrac{1}{3\,039\,345}$. Mais si on écrit $\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{17}+\dfrac{3}{17}$, la formule $\dfrac{3}{6k-1}=\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k(6k-1)}$ établie au § 3.6. nous donne $\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{102}$.

L'algorithme ne fournit donc pas forcément la plus courte décomposition, ni celle qui a les plus faibles dénominateurs. Cette difficulté n'avait d'ailleurs pas échappé à Fibonacci.

4.6. Théorème*

Tout rationnel de $]0,1[$ *est décomposable en somme de fractions unitaires distinctes*.

Reprenons les notations des § 4.3. et 4.4. Nous avons obtenu pour $\dfrac{p_0}{q_0}$ une décomposition

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{i-1}}+\frac{p_i}{q_i} \qquad (4)$$

avec

$$p_0>p_1>\ldots>p_i>0 \qquad (5)$$

Il nous suffit de montrer que les x_j sont tous distincts.

Puisque $\dfrac{1}{x_j}$ est la plus grande fraction unitaire inférieure à $\dfrac{p_j}{q_j}$, on a $\dfrac{1}{x_j-1}>\dfrac{p_j}{q_j}>\dfrac{1}{x_j}$.

Et comme $\dfrac{p_{j+1}}{q_{j+1}}=\dfrac{p_j}{q_j}-\dfrac{1}{x_j}$, on a $\dfrac{p_{j+1}}{q_{j+1}}<\dfrac{1}{x_j-1}-\dfrac{1}{x_j}$, c'est-à-dire $\dfrac{p_{j+1}}{q_{j+1}}<\dfrac{1}{x_j\left(x_j-1\right)}$.

Mais par construction $\dfrac{1}{x_{j+1}}\leq\dfrac{p_{j+1}}{q_{j+1}}$ (l'égalité n'ayant lieu que si l'on est à la fin du processus). Il en résulte :

$$\boxed{x_{j+1}>x_j\left(x_j-1\right)} \qquad (6)$$

Les nombres x_j étant tous au moins égaux à 2, il en résulte $x_{j+1} > x_j$. La suite des fractions obtenues est strictement décroissante : on a bien obtenu une décomposition égyptienne.

4.7. Les limites de la méthode*

Essayons de voir, dans le processus de Fibonacci, à quelle vitesse croissent les dénominateurs. On a forcément $x_0 \geq 2$, $x_1 \geq 3$. L'inégalité (6) établie plus haut, $x_{j+1} > (x_j - 1)x_j$, donne ensuite $x_2 > 6$, puis $x_3 > 30$, $x_4 > 870$, $x_5 > 756\,030$, $x_6 > 571\,580\,604\,870 > 5{,}7 \times 10^{11}$, $x_7 > 3{,}2 \times 10^{23}$, $x_8 > 10^{47}$, etc.

• On voit ainsi que, malgré la simplicité de son principe et de sa formulation, *la méthode de Fibonacci n'est praticable que pour les décompositions courtes*. Ce n'est hélas pas un phénomène rare que de voir un algorithme irréprochable sur le plan théorique aboutir rapidement à des calculs monstrueux.

• Si le lecteur a eu le courage de mettre en œuvre le petit algorithme dont le tableau de calcul du § 4.5. donne le principe, il a sans doute pu constater qu'on se heurte assez souvent à un dépassement de capacité : les ordinateurs usuels, sauf programme bâti spécialement, calent devant les très grands nombres. Les trois exercices suivants donnent une idée des problèmes rencontrés.

• ***Exercice 1*** : Chercher « à la main » une décomposition de $\frac{30}{31}$ (il en existe une dizaine dont le plus grand dénominateur n'ait que trois chiffres, par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{930}$) ; puis chercher la décomposition de Fibonacci de $\frac{30}{31}$ (c'est $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{107}+\frac{1}{15\,922}+\frac{1}{633\,759\,288}$).

• ***Exercice 2*** : Chercher avec votre programme la décomposition de Fibonacci de $\frac{131}{263}$; c'est

$$\frac{131}{263}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{46}+\frac{1}{5\,909}+\frac{1}{51\,766\,508}+\frac{1}{7\,771\,336\,864\,724\,278}+\frac{1}{150\,984\,191\,662\,556\,420\,075\,895\,541\,828\,932}$$

• ***Exercice 3*** : Calculer les deux premiers termes de la décomposition de Fibonacci de $\frac{31}{311}$ puis, sachant que cette décomposition est de longueur 10, donner une minoration du dernier dénominateur.

• On trouvera sur le site de l'APMEP, sous le titre *Algorithme de Fibonacci*, une boîte noire, due à Jacques Ribon, qui fournit pour toute fraction de taille acceptable la décomposition de Fibonacci (essayer avec $\frac{31}{311}$).

Bibliographie

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html
Excellent site, donnant notamment, pour toute fraction de taille raisonnable, ses décompositions de longueur donnée et ses plus courtes décompositions … ce qui fournit d'innombrables sujets d'exercices.

Annexe : Compléments sur les décompositions de longueur 2

Théorème 1

Soit une fraction $\frac{p}{q}$, *avec* q *premier et* $p < q$. *Si* p *divise* $q + 1$, *elle a une seule décomposition* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ *de longueur 2, donnée par* $x=\frac{q+1}{p}$, $y=\frac{q(q+1)}{p}$ *; si* p *ne divise pas* $q + 1$, *elle n'en a aucune.*

Supposons qu'il existe une décomposition $\frac{p}{q}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x \neq y)$. On a $q(x+y)=pxy$. Le nombre q est premier avec tout nombre plus petit, donc avec p. Il divise donc xy, donc x ou y.

Supposons qu'il divise les deux : $x=qu$, $y=qt$. On aurait alors $p=\frac{1}{u}+\frac{1}{t}$; u et t étant différents, on en tire $p \leq 1+\frac{1}{2}$, donc $p = 1$. Mais alors ni u ni t ne peut valoir 1 et, comme ils sont différents, on a $\frac{1}{u}+\frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, ce qui contredit $p=\frac{1}{u}+\frac{1}{t}$.

Ainsi q divise un seul des deux nombres x et y, mettons y ; il est donc premier avec x. Posons $y = qt$. De $q(x + y) = pxy$ on tire $x + qt = pxt$; sous la forme $x = (px - qt)t$, cette égalité prouve que t divise x ; sous la forme $qt = (pt - 1)x$, elle prouve que x divise qt, donc aussi t, puisque x est premier avec q. Ainsi x et t se divisent l'un l'autre : ils sont égaux et $y = qx$.

La décomposition est donc $\frac{p}{q}=\frac{1}{x}+\frac{1}{qx}$, ce qui donne $x=\frac{q+1}{p}$, puis $y=\frac{q(q+1)}{p}$.

Si p ne divise pas $q + 1$, il n'y a donc pas de solution. Si p divise $q + 1$, on vérifie que les valeurs ci-dessus conviennent ; en fait, on a retrouvé aux notations près la formule (2).

Corollaire 1

Si on prend $p = 1$, il en résulte :

Une fraction unitaire de dénominateur premier a une décomposition de longueur 2 et une seule.

Corollaire 2

Si on prend $p = 2$, il en résulte, puisque $q + 1$ est pair :

Si q *est premier impair,* $\frac{2}{q}$ *a une décomposition de longueur 2 et une seule.*

Corollaire 3

Si q *est premier de la forme* $6k + 1$, $\frac{3}{q}$ *n'a pas de décomposition de longueur 2.*

Il suffit de vérifier que 3 ne divise pas $6k + 2$, ce qui est trivial, et d'appliquer le théorème.

Théorème 2

Si les facteurs premiers de q sont tous de la forme $6k + 1$, la fraction $\frac{3}{q}$ n'a pas de décomposition égyptienne de longueur 2.

Le dénominateur peut s'écrire $q = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$ où les q_i sont premiers et congrus à 1 modulo 6.

Raisonnons par récurrence sur la somme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ des exposants. Pour la valeur 1 de cette somme, le résultat découle du corollaire 3 ci-dessus. Supposons-le établi jusqu'à la valeur $n - 1$ et supposons que la somme des exposants soit n. S'il existe une décomposition $\frac{3}{q} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ $(x \neq y)$, on a $q(x + y) = 3xy$. Le nombre q_i est premier avec tout nombre plus petit, donc avec 3. Il divise donc xy, donc x ou y. Supposons qu'il divise les deux : $x = q_i\mathrm{X}$, $y = q_i\mathrm{Y}$. Posons $q = q_i\mathrm{Q}$. On aurait $\frac{3}{\mathrm{Q}} = \frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{1}{\mathrm{Y}}$, ce qui par hypothèse de récurrence est impossible.

Tout diviseur premier q_i de q divise donc un seul des nombres x ou y et il est premier avec l'autre. Supposons par exemple qu'il divise x et est premier avec y ; alors $q_i^{\alpha_i}$ est aussi premier avec y (et avec 3) ; comme il divise $3xy$ il divise x.

Chacun des $q_i^{\alpha_i}$ divise donc un des deux nombres x ou y et est premier avec l'autre. On peut alors écrire q sous la forme $q = rs$, où r divise x et est premier avec y, s divise y et est premier avec x. Posons $x = ru$, $y = sv$; la relation $q(x + y) = 3xy$ devient, après simplification, $ru + sv = 3uv$.

Sous la forme $(3v - r) = sv$, cette relation prouve que u divise sv ; comme s est premier avec u (car s est premier avec x), u divise v. Sous la forme $(3u - s) = ru$, elle prouve que v divise ru ; comme r est premier avec v (car r est premier avec y) , v divise u. Les deux nombres u et v se divisant l'un l'autre, ils sont égaux. De $ru + sv = 3uv$ on tire donc $r + s = 3u$.

Mais, les facteurs premiers de q étant tous congrus à 1 modulo 6, il en est de même de r et s. L'égalité $r + s = 3u$ est impossible, car le premier membre, congru à 2 modulo 6, n'est pas divisible par 3.

Remarque finale

Le lecteur pourra de la même façon étudier les fractions irréductibles du type $\frac{4}{q}$: une telle fraction admet toujours au moins une décomposition de longueur 2, sauf lorsque tous les facteurs premiers de q sont du type $4k + 1$, auquel cas elle n'en admet aucune.

Pour les fractions de numérateur 5, la situation est plus complexe (ni 5/7 ni 5/11 n'ont de décomposition de longueur 2).