Chaînes de Markov au lycée

Louis-Marie Bonneval(*)

L'expression « chaîne de Markov » ne figure dans aucun libellé de programme de lycée. Mais on peut lire dans le programme de la spécialité mathématiques de Terminale S(1), sous le titre « Matrices et suites » :
Il s'agit d'étudier des exemples de processus, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices.

Exemple de problèmes	*Contenus*
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. *Marche aléatoire sur un tétraèdre ou un graphe à N sommets (…).*	*Étude asymptotique d'une marche aléatoire*

et dans le programme de la spécialité mathématiques de Terminale ES(2) :
Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples, et de faire le lien avec les suites.

Exemple de problèmes	*Contenus*
	Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste

(libellé qui reprend à peu près celui du programme 2002, en remplaçant « convergence » par « état stable »(3)).
C'est sans doute pour éviter des excès théoriques que l'expression « chaînes de Markov » n'est pas écrite, mais c'est bien de cela qu'il s'agit.
Les deux programmes précisent en introduction : *L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes*. C'est l'approche que j'ai proposée aux participants de l'atelier P1-32 aux Journées APMEP de Metz(4).

Problème 1 : Bonus et malus en assurance automobile

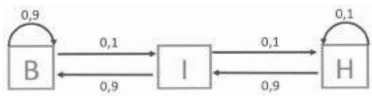
Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : bas, intermédiaire, haut.

(*) lm.bonneval@gmail.com
(1) http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=57529
(2) http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=57519
(3) L'expression « état stable » n'est pas très heureuse, le mot « état » désignant usuellement les sommets du graphe probabiliste.
(4) Je n'ai pas proposé de chaîne à deux états, car pour des collègues habitués aux matrices, l'ordre 3 montre mieux leur rôle dans la théorie. Mais pour des élèves de terminale, il est clair qu'il faut commencer par l'ordre 2. En effet, pour deux états, on peut se ramener à des suites arithmético-géométriques et étudier complètement la convergence. Le passage à trois états pourra se faire ensuite de façon naturelle.

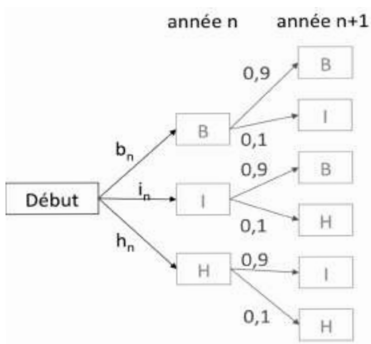
- La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire.
- S'il n'a été responsable d'aucun accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante (s’il est déjà au tarif bas, il y reste).
- S'il a été responsable d'au moins un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante (s’il est déjà au tarif haut, il y reste).

La compagnie d’assurance estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'au moins un accident au cours d'une année.

Quelle sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif ?



Le schéma ci-contre (*graphe probabiliste*) traduit l'évolution, d'une année à la suivante, du tarif payé par un assuré pris au hasard : les sommets sont les tarifs possibles, les flèches portent les probabilités de passer d'un tarif à un autre. On remarque que pour les flèches partant d'un même sommet, la somme des probabilités vaut 1.



Notons b_n (respectivement i_n, h_n) la probabilité qu'un assuré pris au hasard l'année n soit au tarif bas (respectivement intermédiaire, haut). On se donne pour l'année 0 les proportions d'assurés b_0, i_0, h_0, pour chaque tarif.

L'arbre ci-contre permet d'écrire :

$$\begin{cases} b_{n+1} = 0{,}9\,b_n + 0{,}9\,i_n \\ i_{n+1} = 0{,}1\,b_n + 0{,}9\,h_n \\ h_{n+1} = 0{,}1\,i_n + 0{,}1\,h_n \end{cases}$$

On vérifie que $b_n + i_n + h_n = 1$ pour tout n.

Au tableur ou à la calculatrice, on constate que les trois valeurs b_n, i_n, h_n semblent assez vite se stabiliser, vers des valeurs indépendantes de b_0, i_0, h_0.

Or les égalités ci-dessus s'écrivent matriciellement

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ i_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ i_n \\ h_n \end{pmatrix},$$

soit $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{TP}_n$.

La matrice $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} b_n \\ i_n \\ h_n \end{pmatrix}$ est la *répartition de probabilité après l'étape n*.

La matrice $\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ est appelée *matrice de transition*. Ses coefficients sont tous compris entre 0 et 1, et pour chaque colonne leur somme vaut 1.

Si la suite (P_n) converge, sa limite P vérifie $\mathrm{P}=\mathrm{TP}$, puisque $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{TP}_n$ pout tout n : P est une répartition de probabilité *stable* (ou *stationnaire*).

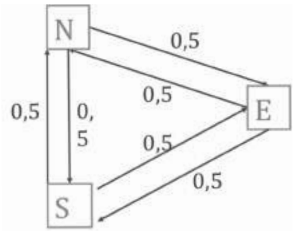
Cherchons une telle matrice $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} b \\ i \\ h \end{pmatrix}$.

Le système $\begin{cases} b=0{,}9b+0{,}9i \\ i=0{,}1b+0{,}9h \\ h=0{,}1i+0{,}1h \end{cases}$ joint à la condition $b+i+h=1$, fournit $b=\dfrac{81}{91}$, $i=\dfrac{9}{91}$, $h=\dfrac{1}{91}$.

En admettant la convergence de (P_n) vers P, cela fournit la répartition des assurés sur le long terme : environ 89 % au tarif bas, 10 % au tarif intermédiaire, 1 % au tarif haut.
Pour justifier la convergence, on pourrait chercher des formules explicites. Mais cela dépasse le programme de Terminale.

Problème 2 : Une ronde sur un triangle

Nous sommes au XIV^{e} siècle, dans le château de Poitiers. Il est triangulaire, flanqué d'une tour à chaque sommet : Est, Nord, Sud. Partant de la tour Est, la sentinelle fait sa ronde sur le rempart. À chaque sommet du triangle, pour tromper l'ennemi (et l'ennui), il jette une pièce : pile, il continue dans le même sens ; face, il repart en sens inverse.
Pourra-t-il assurer une surveillance comparable dans les trois directions ?



On peut comme plus haut représenter l'évolution par un graphe probabiliste (ci-contre), en supposant la pièce équilibrée.
Notons e_n (respectivement v_n, s_n) la probabilité qu'après n étapes la sentinelle soit à la tour Est (respectivement Nord, Sud).
Ainsi $e_0=1$, $v_0=0$, $s_0=0$.
La représentation par un arbre conduit aux formules de récurrence :

$$\begin{cases} e_{n+1} = 0,5\,v_n + 0,5\,s_n \\ v_{n+1} = 0,5\,e_n + 0,5\,s_n \\ s_{n+1} = 0,5\,e_n + 0,5\,v_n \end{cases}$$

Comme dans le problème 1, on peut les écrire sous forme matricielle : $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{TP}_n$.

Si la suite (P_n) converge, c'est vers une matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} e \\ v \\ s \end{pmatrix}$ telle que P = TP avec $e + v + s = 1$.

L a résolution de ce système fournit $e = v = s = \frac{1}{3}$.

Ici on peut trouver des formules explicites, car par symétrie (ou par récurrence) $v_n = s_n$:

$$e_{n+1} = 0,5(v_n + s_n) = 0,5(1 - e_n),$$

d'où $e_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ puis $v_n = s_n = \frac{1-e_n}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

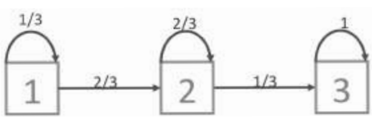
Cela démontre la convergence de (P_n).

On peut donc répondre positivement à la question : si la ronde est suffisamment longue, chacun des sommets a autant de chances d'être visité qu'un autre.

Problème 3 : La collection d'autocollants

Chaque semaine, Anna achète une tablette de chocolat Cébon. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile, soit un cœur, soit un trèfle à quatre feuilles. Anna les collectionne pour décorer son journal intime.
En supposant les trois motifs équirépartis entre les tablettes, ***combien de tablettes suffit-il d'acheter pour être sûr à plus de 95 % d'avoir les trois types de dessin ?***

Pour $n \geq 1$, notons u_n (respectivement d_n, t_n) la probabilité après n achats d'avoir un seul type de dessin (respectivement deux seulement, les trois). Ainsi $u_1 = 1$, $d_1 = 0$, $t_1 = 0$.
Du graphe ci-dessous (ou de l'arbre associé), on déduit les formules de récurrence :



$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \\ d_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}d_n \\ t_{n+1} = \frac{1}{3}d_n + t_n \end{cases}$$

On obtient comme répartition stable $u = 0$, $d = 0$, $t = 1$. C'est conforme à l'intuition : à la longue, on est pratiquement sûr d'avoir les trois types de dessin.

Pour répondre à la question posée, il faut s'intéresser à la suite (t_n). D'après la troisième relation, elle est croissante(5). Or le tableur ou la calculatrice indiquent que $t_{10} < 0{,}95 < t_{11}$.

Donc, à partir de 11 achats, on est sûr à plus de 95 % d'avoir les trois types de dessin.

Un peu de théorie

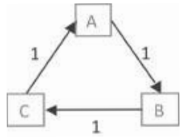
Une **chaîne de Markov**(6) est une suite d'épreuves aléatoires où les états possibles sont donnés et la répartition de probabilité évolue selon des probabilités de transition constantes.
On peut représenter ce processus comme une **marche (promenade) aléatoire sur un graphe** : les sommets sont les états possibles, les flèches portent les probabilités de transition.
Après avoir ordonné les états, on peut lui associer une **matrice de transition** T. Deux conventions sont possibles pour cela :
– soit l'indice de colonne désigne l'état de départ et l'indice de ligne l'état d'arrivée : cela conduit à utiliser des matrices-colonnes pour les répartitions de probabilité. T est alors la matrice du système de récurrence. C'est la convention que j'ai adoptée dans cet article.
– soit l'indice de ligne indique l'état de départ, et l'indice de colonne l'état d'arrivée : cela conduit à utiliser des matrices-lignes pour les répartitions de probabilité. T est alors la transposée de la matrice du système de récurrence. C'est la convention utilisée en ES depuis dix ans, et en général dans l'enseignement supérieur(7).

Si P_n est la matrice colonne(8) indiquant la répartition de probabilité à l'étape n, le théorème des probabilités totales permet d'écrire $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{TP}_n$. On en déduit $\mathrm{P}_n = \mathrm{T}^n\,\mathrm{P}_0$.

Théorème de Perron-Frobenius : Si la matrice de transition T admet une puissance sans aucun coefficient nul, alors il existe une unique répartition de probabilité P *stable*, ou *stationnaire*, c'est-à-dire telle que TP = P ; et quel que soit P_0 la suite (P_n) converge vers P.
L'hypothèse s'interprète de la façon suivante : dire que T^k a tous ses coefficients strictement positifs signifie qu'en k étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre. Cette condition est suffisante mais non nécessaire pour que (P_n) converge. Elle est remplie dans les problèmes 1 et 2, elle ne l'est pas dans le problème 3 où pourtant (P_n) converge.

(5) On pourrait démontrer assez simplement la convergence des trois suites, et même trouver des formules explicites (voir http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths7.htm). Mais ce n'est pas nécessaire pour le problème posé.
(6) Andréï Markov (1856-1922) a étudié l'alternance consonne/voyelle dans Eugène Onéguine de Pouchkine.
(7) Le programme de S semblait préconiser la première option, mais finalement n'a pas tranché, ce qui va poser quelques difficultés à l'examen. Voir
http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=61084
(8) Avec des matrices-lignes on écrirait $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n\mathrm{T}$.

Ce théorème[9] doit-il être connu des élèves ? Le programme ne le cite pas, mais il semble difficile de s'en passer, du moins en S, si on veut faire une *étude asymptotique d'une marche aléatoire*. Certes, pour deux états, on peut toujours trouver une formule explicite pour P_n. Mais au-delà de deux états, il est exceptionnel qu'on puisse le faire avec les seuls outils de terminale[10].



Notons que dans le cas général il existe toujours au moins une répartition stable, mais il peut y en avoir plusieurs[11], et même s'il n'y en a qu'une la suite $\left(P_n\right)$ peut être divergente (exemple ci-contre[12]).

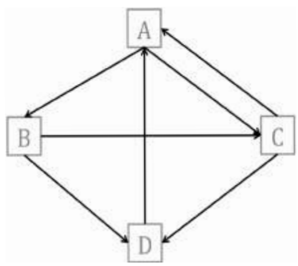
Problème 4 : Pertinence d'une page web[13]

Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabiliste), dont les N sommets sont les *pages*, et les flèches les *liens* qui pointent d'une page à une autre.
Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence.
Comment mesurer la pertinence d'une page ?

L'algorithme PageRank utilisé par Google utilise une méthode probabiliste.

Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard : quand il est sur une page,

- soit, avec une probabilité p, il choisit une page au hasard dans l'ensemble du réseau ;
- soit, avec une probabilité $1 - p$, il clique au hasard sur l'un des liens disponibles depuis la page où il se trouve.



Considérons par exemple un mini-web à 4 pages (ci-contre), et prenons $p = 0{,}16$.

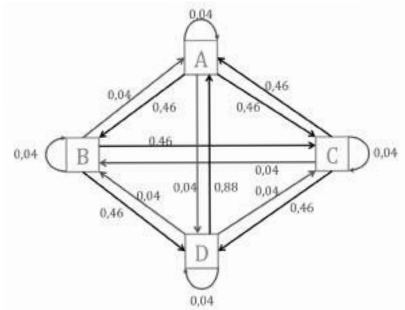
Si l'internaute est sur la page A, il peut aller sur la page B de deux façons : soit en la choisissant parmi les quatre pages disponibles (probabilité $0{,}16 \times 1/4$), soit en cliquant sur le lien qui y mène (probabilité $0{,}84 \times 1/2$). La probabilité d'aller de A en B est donc 0,46.

(9) Sa démonstration, qui fait appel aux valeurs propres de T ou au théorème du point fixe, est bien entendu à admettre.
(10) C'est le cas pour le problème 2 parce que les sommets N et S jouent des rôles symétriques
(11) Un schéma de Bernoulli est un exemple trivial de chaîne de Markov : la matrice de transition est la matrice unité, toutes les répartitions de probabilité sont stables, la suite $\left(P_n\right)$ est constante.

(12) $\left(P_n\right)$ diverge sauf si P_0 est la répartition stable $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

(13) Voir dans le Bulletin n° 489 l'article "Une promenade sur la toile" de Michael Eisermann.

En raisonnant ainsi pour tous les couples de pages, on transforme le graphe initial en graphe probabiliste (ci-contre).



La matrice de transition T n'ayant aucun coefficient nul (ils sont tous supérieurs ou égaux à $\frac{p}{N}$), le théorème de Perron-Frobenius s'applique(14).

Le calcul au tableur montre que $P_{20} \approx \begin{pmatrix} 0,337 \\ 0,181 \\ 0,258 \\ 0,224 \end{pmatrix} \approx P$.

Donc on peut classer les pages par pertinence décroissante dans l'ordre A, C, D, B. Pour une matrice comportant plusieurs milliards de lignes et de colonnes, quelques itérations valent mieux qu'une inversion ! D'autant que la matrice T peut s'écrire $T = (1-p)M + pK$, où M est la matrice issue du graphe initial (avec des liens sortants équiprobables), et K la matrice carrée ayant tous ses coefficients égaux à 1/N. En remarquant que $KP_n = V$, matrice colonne ayant tous ses coefficients égaux à 1/N, on peut écrire la relation $P_{n+1} = TP_n$ sous la forme $P_{n+1} = (1-p)MP_n + pV$. La récurrence est plus facile à mettre en œuvre sous cette forme, car la matrice M comporte beaucoup de 0.

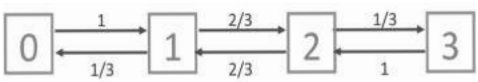
Problème 5 : Les urnes d'Ehrenfest(15)

On dispose de deux urnes A et B, et de N boules numérotées de 1 à N. Au début, toutes les boules sont dans l'urne A. De temps à autre, on tire au hasard un numéro entre 1 et N, et *on change d'urne* la boule correspondante.

Au bout de combien d'étapes peut-on espérer que toutes les boules soient à nouveau dans l'urne A ?

Étudions le cas où N = 3 :

Pour décrire la répartition des boules entre les deux urnes, il suffit d'étudier le contenu de l'urne A :



Notons z_n, (respectivement u_n, d_n, t_n) la probabilité qu'à l'issue du n-ème déplacement l'urne A contienne 0 boule (respectivement 1 boule, 2 boules, 3 boules). Ainsi $z_0 = 0$, $u_0 = 0$, $d_0 = 0$, $t_0 = 1$.

(14) L'introduction de p est un artifice destiné précisément à assurer la convergence. Il semble que la valeur de p, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, n'influe pas sur l'ordre final des pages.
(15)Voir dans le Bulletin n° 501 l'article de Kylie Ravera.

On trouve comme répartition stable[16] : $z=\frac{1}{8}$, $u=\frac{3}{8}$, $d=\frac{3}{8}$, $t=\frac{1}{8}$. On reconnaît la loi binomiale $B\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

L'égalité $t=\frac{1}{8}$ signifie que sur le long terme l'état « 3 boules dans l'urne A » est obtenu en moyenne une fois sur 8. Il y a donc en moyenne 8 étapes entre deux passages dans cet état. Le temps de retour à l'état initial a donc pour espérance 8.
On démontre que dans le cas général de N boules, ce temps moyen de retour vaut 2^N.
Ce résultat a été utilisé par les physiciens Paul et Tatiana Ehrenfest il y a un siècle pour clore une polémique entre partisans et adversaires de la théorie cinétique des gaz. Les boules modélisent les molécules de gaz, et les urnes deux enceintes que l'on fait communiquer. L'expérience montre que la diffusion du gaz entre les deux enceintes est irréversible, c'est-à-dire qu'on n'observe jamais de retour à l'état initial (tout le gaz dans l'enceinte A). Certains physiciens reprochaient à la théorie cinétique des gaz de permettre la réversibilité. Or N étant de l'ordre du nombre d'Avogadro, 2^N est gigantesque : si le retour à l'état initial est théoriquement possible, c'est au bout d'un temps si long qu'il n'est en pratique jamais observé.

Quelques domaines d'application

- Linguistique (cf. l'étude de Markov lui-même, vers 1910) ;
- Physique statistique : mouvement brownien, cinétique des gaz (problème 5), mécanique quantique ;
- Génétique : évolution génétique, décryptage du génome ;
- Assurance (problème 1) ;
- Intelligence artificielle : reconnaissance de formes, de sons.

Bibliographie succincte :

Processus aléatoires pour les débutants, par Arthur Engel, éditions Cassini 2011 (réédition de *L'enseignement de probabilités et des statistiques*, tome 2, CEDIC-Nathan 1978), recensé dans le Bulletin 498.

Promenades aléatoires, par Pierre Grihon, Bulletin APMEP n° 501

Document ressource Spécialité de terminale S, Matrices
http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/89/3/maths-S-specialite_207893.pdf

(16) Ici la suite (P_n) ne converge pas, néanmoins la répartition stationnaire peut s'interpréter comme indiqué ci-après.