La récurrence à toutes les sauces

Démonstrations par récurrence pour la classe de TS

Louis-Marie Bonneval, Catherine Combelles et Julien Moreau

Il est toujours intéressant d'avoir dans ses réserves une petite collection de démonstrations par récurrence. En voici une, écrite à plusieurs mains, pour accompagner l'article de Pierre Legrand « La récurrence au fil des siècles » du Bulletin nº 506. Certains de ces exercices sont très classiques, d'autres sont moins connus. Nous avons tenté d'être utiles en choisissant des exemples variés et adaptés au programme de TS. Bien entendu, chacun adaptera ces énoncés à ses élèves, en détaillant plus ou moins les questions.

Sommes

Les calculs de somme fournissent de beaux exemples de raisonnement par récurrence. On pourra d'abord faire vérifier aux élèves à la main ou à la machine (calculatrice ou tableur) que ces formules sont vraisemblables.

La formule donnant la somme des n premiers entiers naturels est bien sûr un premier exemple, mais elle est en principe déjà connue des élèves, et souvent prouvée par des moyens plus rustiques qui permettent de l'établir très tôt : d'expérience, c'est un gros succès en classe de sixième !

Exercice 1 : *Démontrer que pour tout entier naturel n :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Cette formule est à marquer d'une pierre blanche : elle sert dans la suite du programme de TS à encadrer l'aire sous la parabole par la méthode des rectangles. Elle semble donc incontournable.

Exercice 2 : *Démontrer que pour tout entier naturel n :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

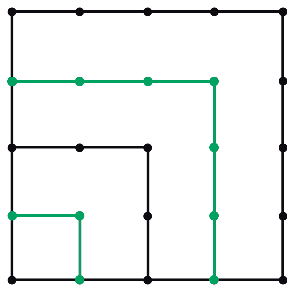
La somme des n premiers cubes apparaît ainsi comme le carré de la somme des n premiers entiers :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$

C'est toujours un sujet de stupéfaction pour les élèves qui cherchent en vain l'identité remarquable qu'ils auraient laissé passer ! On peut au préalable faire vérifier sur tableur ce résultat étonnant pour leur donner envie de le prouver.

Exercice 3 : *Conjecturer la formule donnant la somme des n premiers nombres impairs puis la justifier par récurrence.*

Cette propriété se lit sur le schéma suivant où les nombres impairs de 1 à 9 sont le nombre de points sur les lignes brisées colorées successives.



Mieux vaut montrer ce schéma après la résolution de l'exercice, car cette preuve sans mots pourrait en démotiver plus d'un !
Bien sûr, la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique, si elle est connue, détruit quelque peu l'intérêt de l'exercice.

La démonstration par récurrence s'impose davantage dans l'exemple suivant :

Exercice 4 : *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :*

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

Cette formule hérissée de factorielles paraît impressionnante. En fait, le calcul se fait en deux lignes ! Il est bienvenu pour montrer au débutant l'efficacité du raisonnement par récurrence. L'exercice nécessite, bien sûr, de connaître la notation factorielle.

Exercice 5 : Somme « télescopique »

Voici un exemple de ces sommes qui se réduisent à la somme de leurs termes extrêmes, intéressantes à faire rencontrer à nos élèves.

La suite u est définie par $u_1 = 1$ *et, pour tout naturel n,* $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) *En remarquant que* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, *trouver une formule explicite.*

2) *Démontrer par récurrence cette formule.*

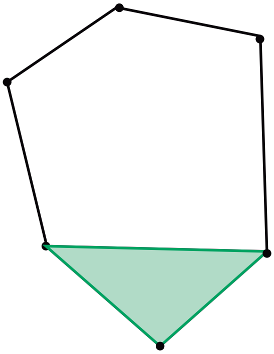
La deuxième question peut sembler superflue. Elle a pour but de montrer qu'un raisonnement où figurent des points de suspension cache en fait un raisonnement par récurrence, que l'on peut formaliser. Il y a là deux modes de pensée différents : le premier étant une vision globale statique et le second une démarche dynamique étape par étape. Cet exercice est une occasion de faire réfléchir les élèves sur ces deux aspects, sans forcément privilégier l'un des deux.

Géométrie

Le raisonnement par récurrence permet d'obtenir quelques jolis résultats simples sur les polygones. Faire de la géométrie est devenu si rare ! Il faut saisir cette occasion !

Exercice 6 : *Montrer que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est* $(n-2)\ 180°$.

Pas de calcul, ici mais un petit croquis, pour ajouter un sommet à un polygone.



Cette situation peut aussi être utilisée lors de l'étude des suites arithmétiques en Première S : on obtient en effet une suite arithmétique de raison 180°, dont le terme d'indice 3 vaut 180°.

Exercice 7 : *Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés est* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Le raisonnement par récurrence demande un peu d'attention, sur le même croquis que dans l'exercice précédent : un côté du polygone précédent devient une diagonale, ainsi que les segments joignant le nouveau sommet aux $n-2$ sommets qui ne lui sont pas contigus.

Un dénombrement sans récurrence permet aussi de trouver directement cette formule : certes, les élèves ne connaissent plus les $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ comme nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments, ce qui fournirait une preuve simple, mais un décompte direct donne aussi immédiatement le résultat : à chacun des n sommets arrivent $n-3$ diagonales. Chaque diagonale est ainsi comptée deux fois, une par extrémité. Le nombre de diagonales est donc bien $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 8 : *On partage le plan par n droites. Montrer qu'avec deux couleurs seulement on peut colorier cette « carte » de sorte que deux régions ayant un segment de frontière en commun soient toujours de couleurs différentes.*

Voici un bien joli théorème, qui donnera l'occasion de raconter l'histoire du théorème des quatre couleurs… et les élèves adorent les histoires ! Après quelques essais graphiques, ils vont vite comprendre qu'il suffit, lorsqu'on ajoute une droite, de changer les couleurs de toutes les régions d'un seul côté de cette droite pour obtenir un coloriage convenable. Aucun calcul, mais une argumentation soignée, pour examiner les différentes régions, nouvellement créées ou non, d'un côté ou de l'autre de la nouvelle droite.

Suites

Les suites définies par récurrence sont bien sûr une terre d'élection du raisonnement par récurrence. Le choix des exercices est important, car on sait bien que les raisonnements font ici souvent figure de modèle pour des situations classiques.

Exercice 9 : *Soit* (u_n) *la suite définie, pour tout entier naturel n, par*

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < 6$ *puis que :*

$$u_n = 6 - \frac{8}{2^n}.$$

Le programme annonçant « Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. », il est impératif de traiter ce type d'exercice. Bien sûr, il ne faut pas s'en contenter, et il restera à montrer aux élèves comment on obtient l'expression de u_n. Mais dans l'idée d'un travail « en spirale », on peut commencer le travail par là pour travailler le raisonnement par récurrence.

Exercice 10 : *Soit* (u_n) *la suite définie, pour tout entier naturel n, par*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ici encore, il s'agit de démontrer une formule donnant l'expression de u_n à partir d'une définition par récurrence. Certes, il faut manier quotient et racine carrée, redoutables pour certains, mais le calcul reste simple.

La simplicité du résultat incite à demander d'abord aux élèves de conjecturer cette formule, mais un calcul sur tableur fournirait des valeurs décimales approchées peu lisibles et il leur faudra pour cela disposer d'un logiciel de calcul formel ou faire le calcul à la main.

Exercice 11 : *Soit* (u_n) *la suite définie, pour tout entier naturel n, par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 2^n - 3^n$..

La récurrence porte ici sur deux termes. Il semble important de faire connaître aux élèves ce type de situation. Ici, c'est le maniement des exposants qui va sans doute poser des problèmes à plus d'un : on court toujours plusieurs lièvres à la fois, et le travail sur le calcul algébrique reste utile en Terminale S.

Exercice 12 : *La suite de Fibonacci* F *est définie par :*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Prouver par récurrence les relations suivantes :

a. $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

b. $F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_{n-1}{}^2 = F_n \times F_{n-1}$.

c. $F_n{}^2 - F_{n-1} \times F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

La suite de Fibonacci est une bonne occasion de travailler la récurrence sur deux termes, et on apprécie toujours son parfum historique !

Exercice 13 : *Soit* (u_n) *la suite définie, pour tout entier naturel n, par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2} \end{cases}.$$

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$..

b) Prouver par récurrence que la suite u est positive et décroissante.

On peut bien sûr étudier algébriquement le signe de $u_{n+1} - u_n$, mais la première question a été mise là à dessein pour orienter vers l'utilisation du sens de variation de la fonction *f*.

Il est utile de généraliser ce point de vue, qui fournit des démonstrations rapides et élégantes pour le traitement de bien des suites définies par récurrence. D'où l'exercice suivant.

Exercice 14 : *Soit* (u_n) *la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

où f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. *Prouver que la suite u est monotone.*

Ce théorème sur les suites récurrentes n'apparaît ni dans le programme, ni dans les manuels. Il est pourtant simple et efficace ! On sait bien que le « théorème-élève », sous ces hypothèses est plutôt : « si *f* est croissante, alors *u* est croissante » et il faut leur faire expérimenter plusieurs exemples pour détruire cette fausse évidence, en insistant sur la définition de « *f* croissante » sous la forme « *f* conserve l'ordre ». Tout dépend donc de l'ordre des premiers termes … qu'il suffit de calculer dans la plupart des problèmes.

Les élèves ne vont donc pas pouvoir utiliser ce théorème, mais ils auront ainsi un modèle de démonstration bien utile dans leur boîte à outils.

On a bien sûr passé ici sous silence la question de l'intervalle de définition en choisissant une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. À chaque jour suffit sa peine, et le but de l'exercice est d'attirer l'attention dans ce type de situation sur l'utilisation des variations de *f*.

Mais, diront les élèves, que faire si *f* est décroissante ? Une astuce classique consiste alors à examiner les suites de rang pair et de rang impair. On y passe d'un terme au suivant par la fonction $f \circ f$ … qui a le bon goût d'être croissante. Eh oui, la composée de deux fonctions qui n'est pas censée être au programme, est parfois bien utile…

Exercice 15 : Suites et trigonométrie

Faire des liens entre les divers chapitres du cours donne toujours de l'intérêt aux exercices, et c'est ici le cas.

1) Démontrer que pour tout réel x, $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$.

2) La suite u est définie par $u_0 = -1$ *: et, pour tout naturel n,* $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Démontrer que pour tout naturel n, $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

La suite étant définie par récurrence, le raisonnement ne peut se faire que par récurrence, il n'y a donc pas lieu de l'indiquer dans l'énoncé. On pourrait cependant le signaler à titre d'aide, selon le niveau d'expertise des élèves.

On peut généraliser, avec $u_0 = \cos(\alpha)$, où $\alpha \in [0,\pi]$: alors $u_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

Voici un exercice quelque peu atypique, qui ferait un bon devoir à la maison car il utilise des raisonnements par récurrence variés au service d'une même situation.

Exercice 16 : *On se propose de construire une suite telle que* $u_1 = 1$ *et, pour tout* $n \geq 1$, $u_{2n} = u_{2n+1} = 2u_n$.

a) Montrer par récurrence que ces formules permettent de calculer u_n *pour tout* n.

b) Montrer par récurrence que pour tout n, u_n *est une puissance de* 2.

c) Montrer par récurrence que (u_n) *est une suite croissante.*

d) Montrer par récurrence que $u_{2^n} = 2^n$.

e) Montrer par récurrence que, pour $2^n \leq m < 2^{n+1}$, $u_m = 2^n$.

f) Établir que la suite ainsi fabriquée répond bien à la question.

Fonctions

Le raisonnement par récurrence, outil privilégié dans l'étude des suites, peut intervenir aussi lors de l'étude des fonctions. En voici trois exemples.

Exercice 17 : Dérivée *n*-ième

Le calcul de dérivée n'est pas toujours motivant, mais on peut le pimenter par la recherche d'une dérivée n-ième. En voici un exemple. (Merci à Véronique Cerclé).

Calculer les dérivées successives de la fonction f définie par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. *Conjecturer puis démontrer une formule donnant la dérivée n-ième de cette fonction.*

On obtiendra : $f^{(n)}(x) = (x + n)\,\mathrm{e}^x$, formule que l'on peut fournir aux élèves si l'on manque de temps.

Exercice 18 : Autour de la fonction exponentielle

On pose pour tout $x \geq 0$ *:*

$$\mathrm{P}_0(x) = 1,\ \mathrm{P}_1(x) = 1 + x,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

1) Calculer $\mathrm{P}_n'(x)$.

2) Établir par récurrence que $f_n : x \to \mathrm{e}^x - \mathrm{P}_n(x)$ *est une fonction positive croissante sur* $[0, +\infty[$.

3) Établir par récurrence que $g_n : x \to \mathrm{e}^x - \mathrm{P}_n(x) - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ *est une fonction négative décroissante sur* $[0, +\infty[$. *Établir la double inégalité :*

$$\mathrm{P}_n(x) < \mathrm{e}^x < \mathrm{P}_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^x.$$

4) Quelle est la limite de la suite u définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 19 : Avec des intégrales

L'objectif est d'étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

On pose pour tout naturel n et pour tout réel x : $f_n(x) = (1 - x)^n \mathrm{e}^x$.

1) Vérifier que $f'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - (n+1) f_n(x)$.

2) En déduire que $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx - (n+1)\int_0^1 f_n(x)dx = -1$.

3) A l'aide de ce qui précède, démontrer que, pour tout naturel n,

$$u_n = \mathrm{e} - \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

4) Démontrer que, pour tout naturel n et tout réel x de [0,1], $0 \le f_n(x) \le \mathrm{e}^x$, et en déduire un encadrement de $\int_0^1 f_n(x)dx$.

5) Quelle est la limite de la suite u ? Justifier.

Comme pour l'exercice précédent, il s'agit d'établir que $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Dans sa forme classique, l'exercice partait de la suite d'intégrales $n \mapsto \int_0^1 f_n(x)dx$ et demandait d'établir une relation de récurrence à l'aide d'une intégration par parties. Cette dernière n'étant plus au programme, la rédaction ci-dessus permet de la contourner.

La suite étant définie par récurrence, le raisonnement de la question 3 sera nécessairement par récurrence, donc il n'y a pas lieu de l'indiquer dans l'énoncé. On pourrait cependant le signaler à titre d'aide.

Probabilités

La répétition d'évènements aléatoires fait classiquement intervenir des suites définies par récurrence ; le raisonnement par récurrence apparaît donc fréquemment dans des calculs de probabilité. En voici un exemple.

Exercice 20 : *Nous sommes au XIVe siècle, dans le château de Poitiers. Il est triangulaire, flanqué d'une tour à chaque angle : Est, Nord, Sud. Partant de la tour Est, le soldat de garde fait sa ronde sur le rempart. À chaque sommet, pour tromper l'ennemi (et l'ennui), il jette une pièce : pile, il continue dans le même sens ; face il repart en sens inverse.*

On suppose sa pièce équilibrée, et on note p_n la probabilité que le n-ième sommet où il passe soit la tour Est.

1) Démontrer que, pour tout naturel n, $p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$.

2) Démontrer (par récurrence) que, pour tout naturel n, $p_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$..

La suite (p_n) est arithmético-géométrique, avec $p_0 = 1$. La méthode générale d'étude d'une telle suite permettrait de découvrir la formule explicite, et peut dispenser du raisonnement par récurrence.

Matrices

Le nouveau programme de spécialité conduit à l'utilisation de puissances n-ièmes de matrices. Voici encore un domaine d'application du raisonnement par récurrence.

Exercice 21 : *1) On pose* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Conjecturer l'expression générale de* A^n, *puis la démontrer par récurrence.*

2) Mêmes questions pour $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Cet exercice ne concerne bien sûr que les élèves de la spécialité mathématiques de TS.

Où est l'erreur ?

Le raisonnement par récurrence, parce qu'il se focalise sur un raisonnement partiel, peut conduire à de belles erreurs ! En voici un exemple pour agiter les neurones de vos élèves.

Exercice 22 : *Trouver l'erreur :*
« Tous les entiers du type $10^n + 1$ *sont des multiples de* 9. *»*

Preuve : Supposons que $10^n + 1$ *est un multiple de* 9. *Alors, il existe un entier k tel que :* $10^n + 1 = 9k$.
Alors : $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (9k - 1) + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1)$.
$10^{n+1} + 1$ *est donc aussi un multiple de 9. Tous les entiers du type* $10^n + 1$ *sont donc des multiples de* 9.

On trouvera sur le site de l'APMEP quelques énoncés supplémentaires.