Jeu de paliers(*)

Élèves de 4ème : Antoine Ghobrial, Victor Henrio, Houssam Lakhlache, Mathieu Poignant & Rémy Raoul
Élèves de 5ème : Rose Guignard, Claire Zhao, Louise Royer & Marie Elmouats
Enseignantes : Claudie Asselain-Missenard, Cécile Damongeot & Florence Ferry(**)
Chercheurs : Nina Aguillon & Olivier Couleau(***)

Le sujet :

On dispose de trois colonnes verticales en haut desquelles se trouvent trois billes numérotées de 1 à 3 et en bas desquelles se trouvent trois trous, eux aussi numérotés de 1 à 3. On peut ajouter des paliers horizontaux entre les colonnes. Lorsqu'on lâche les billes (toutes en même temps), elles tombent verticalement, sauf si elles rencontrent un palier, auquel cas elles l'empruntent et changent de colonne.

Peut-on placer les paliers de sorte que chaque bille atterrisse dans le trou qui lui correspond ?

Que se passe-t-il lorsqu'on augmente le nombre de colonnes ?

1. Schéma de la situation

(1)

Lorsque les billes prennent un palier elles peuvent croiser une autre bille qui emprunte le même ; on suppose dans ce cas qu'elles rebondissent l'une contre l'autre et repartent en sens inverse, ce qui revient au même que si elles se croisaient. (2)

Nous avons commencé par prendre des exemples avec 3, 4, 5, … colonnes, mais nous avons vite vu qu'il y avait énormément de cas de figure. Des cas étaient identiques et certains pouvaient donc être éliminés.

2. Étude du nombre de cas à étudier

On fixe les numéros des boules en haut et on fait varier les numéros du bas. On obtient ainsi tous les cas différents. (3)

Le nombre de cas différents pour n colonnes est en fait donné par le calcul suivant:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

En effet, pour la colonne 1, il y a n choix possibles ; mais une fois la colonne 1 fixée, il y a $n - 1$ choix pour la colonne 2 et ainsi de suite.

Exemple pour 6 colonnes :

Pour chacune des 6 possibilités de la première colonne, on a 5 possibilités pour la deuxième colonne. Pour chacune des 30 soit (6 × 5) possibilités établies précédemment, on a quatre possibilités pour la troisième colonne. Pour chacune des 120 possibilités (6 × 5 × 4), on a trois possibilités pour la quatrième colonne. Pour chacune des 360 possibi-

(*) Les notes (indiquées dans le texte en vert) que l'on trouvera en fin d'article sont celles du comité d'édition de l'éqipe MATh en JEANS.

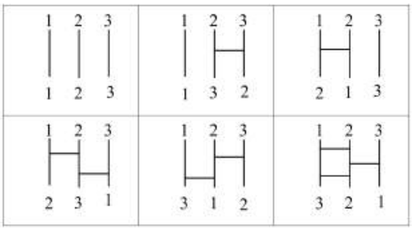
(**) Établissements : Collège Alain Fournier, 14 rue Alain Fournier, 91402 Orsay Cedex & Collège Charles Péguy, 31 à 37 avenue du Général Leclerc, 91120 Palaiseau.

(***) Doctorants, Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud.

lités (6 × 5 × 4 × 3), on a deux possibilités pour la cinquième colonne. Enfin, pour chacune des 720 possibilités restantes, on a une possibilité pour la sixième colonne. Ce qui nous donne

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Voici tous les cas pour trois colonnes :

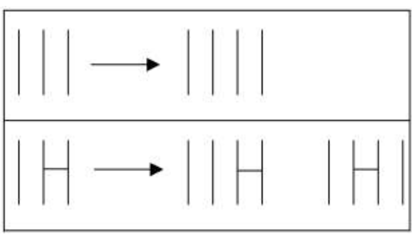


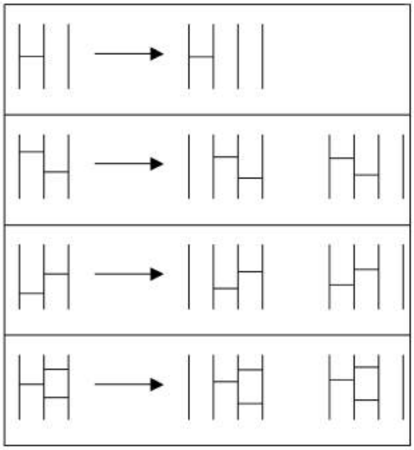
Il y a une solution pour chaque cas de figure. Parmi tous les cas à étudier, il y en a qui sont symétriques (identiques par retournement) ; ici, il n'y a en fait que trois cas différents. Nous n'avons pas réussi à faire le lien entre le nombre de colonnes et le nombre de cas symétriques, ce qui nous aurait permis de réduire le nombre de cas à étudier.

3. Comment passer de trois à quatre colonnes

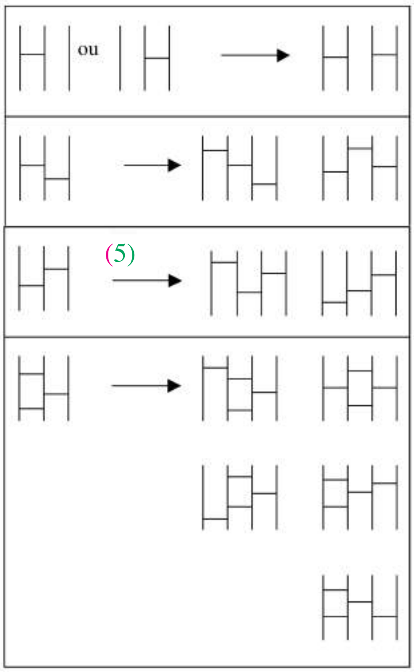
À partir des six cas à trois colonnes, on peut trouver toutes les possibilités à quatre colonnes, en ajoutant, par exemple une colonne à gauche ou à droite du dessin initial, ou encore une colonne et un, deux ou trois paliers que l'on peut placer différemment selon les cas. On retrouve ainsi tous les cas avec quatre colonnes.(4)

– <u>En ajoutant une colonne :</u>

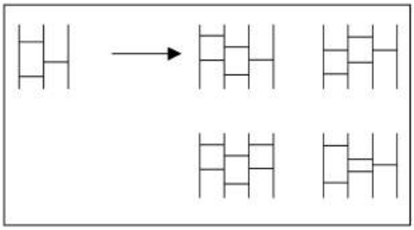




– <u>En ajoutant une colonne et un palier :</u>



– <u>En ajoutant une colonne et deux ou trois paliers :</u>



4. Comment passer de quatre à cinq colonnes

Si l’on considère un jeu avec quatre colonnes fixes, on peut obtenir un jeu à cinq colonnes en insérant une cinquième colonne fixe.(6)
L’objectif est donc d’étudier comment insérer cette cinquième colonne fixe.
Il ne restera donc ensuite qu’à étudier les cas où aucune des cinq colonnes n’est fixe.

– Pour obtenir cinq colonnes en insérant la première ou cinquième colonne fixe :

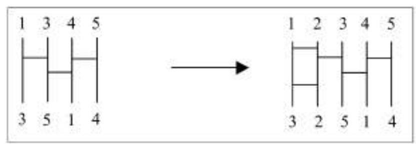
Nous avons un jeu de quatre colonnes avec les boules 2, 3, 4 et 5 (on n’a pas de boule 1 car c’est celle-ci que l’on cherche à insérer). Il nous suffit donc d’ajouter une colonne fixe à gauche. Ainsi, les trajectoires des boules 2, 3, 4, et 5 ne seront pas changées, et la boule 1 tombera droit dans son trou.

La procédure est la même pour insérer la colonne 5, mais à droite.

– Pour obtenir cinq colonnes en insérant la deuxième colonne fixe :

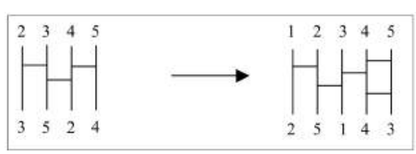
Nous avons un jeu de quatre colonnes avec les boules 1, 3, 4 et 5, et nous cherchons à insérer la deuxième colonne fixe.
On insère la colonne 2 entre les colonnes 1 et 3.

Pour que la boule 2 ne gène pas la descente normale des autres boules, on la sort à l’extérieur (sur la colonne 1) en veillant à la faire rentrer dans sa colonne à la fin, grâce à un double palier que l’on insère entre les colonnes 1 et 2. Il ne nous reste qu’à recopier le motif avec quatre colonnes sur les colonnes 2 à 5 du jeu de 5 colonnes, afin que les autres boules (1, 3, 4 et 5) atteignent leur trou en suivant ce même motif.



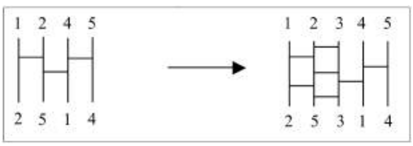
– Pour obtenir cinq colonnes en insérant la quatrième colonne fixe :

Cette fois-ci, nous voulons insérer la colonne 4 fixe, dans un jeu de quatre colonnes, 1, 2, 3, 5.
On utilise la même méthode que pour la colonne 2, mais de façon symétrique: on insère la colonne 4 entre les colonnes 3 et 5. De la même façon, afin que la boule 4 ne gène pas la descente normale des autres boules, on la sort à l’extérieur (cette fois-ci par la droite, sur la colonne 5) en n’oubliant pas de la faire rentrer dans sa colonne à la fin, grâce à un double palier que l’on insère entre les colonnes 4 et 5. On recopie alors le motif avec quatre colonnes sur les colonnes 1 à 4 du jeu de 5 colonnes.



– Pour obtenir cinq colonnes en insérant la troisième colonne fixe :

Nous avons toujours un jeu de quatre colonnes avec les boules 1, 2, 4 et 5 auquel on veut insérer une colonne 3 fixe. Le fonctionnement ressemble à celui de la colonne 2 ou 4. On insère la colonne 3 entre les colonnes 2 et 4. On sort encore la boule 3 à l'extérieur (peu importe le côté, ici nous prenons la gauche) en insérant 2 doubles paliers: le premier entre les colonnes 2 et 3, le deuxième entre les colonnes 1 et 2, de façon à ce qu'il soit entre les deux paliers qui forment le premier double palier à insérer. On recopie enfin le motif avec quatre colonnes sur les colonnes 2 à 5 du jeu de 5 colonnes, en faisant attention à mettre les paliers entre les colonnes 2 et 3, entre les deux paliers qui forment le double palier que l'on a inséré au début. Ce qui nous donne ceci :



– <u>Autre exemple en insérant la colonne 3 fixe :</u>

<u>Conséquences :</u>

Grâce à cette méthode, nous avons pu déterminer tous les cas avec 5 colonnes et au moins une colonne fixe.

Il ne restera plus qu'à déterminer les cas où toutes les colonnes permutent (aucune des colonnes n'est fixe).

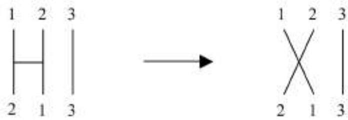
Sur 120 possibilités de cas avec un jeu de 5 paliers, nous avons compté 48 cas dont les cinq colonnes permutent. Elles doivent donc « vraiment » être résolues. Cela équivaut à 2/5, ce qui signifie que 3/5 des cas n'ont pas besoin d'être résolus (7)

5. La méthode automatique

Au cours de nos recherches nous nous sommes rendu compte que nous pouvions présenter de deux façons différentes les cas à étudier:

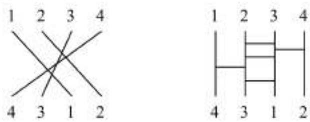
– soit en plaçant des paliers.

– soit en représentant les croisements.



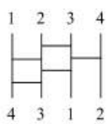
En rapprochant ces deux représentations, nous avons remarqué qu'à chaque fois qu'il y avait un croisement, il y avait un palier situé de façon similaire.

La méthode automatique consiste donc à transformer sur le schéma une croix par un palier. Voici un cas plus difficile :



Les 5 croisements correspondent aux 5 paliers qui sont disposés de la même façon que les croisements.

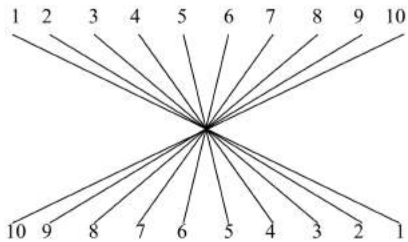
Ce n'est pas la seule configuration possible pour mettre les paliers ; en voici une autre :



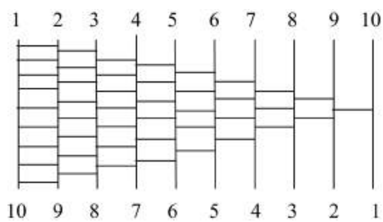
Avec cette méthode nous allions beaucoup plus vite pour placer nos paliers. Un cas cependant était à part : lorsque plusieurs croisements se font au même point. Que se passe-t-il dans ce cas ? Où placer les paliers et combien en mettre ?

6. Les cas particuliers

a. La pyramide



Lorsque tous les croisements ont lieu au même endroit on ne sait pas placer les paliers. Après plusieurs recherches nous avons abouti à cette pyramide :



Explication :
La bille n° 1 descend l'escalier jusqu'à son trou (tout à droite) et les autres billes se dirigent à gauche jusqu'à la colonne n° 1 puis redescendent vers la droite jusqu'à leurs trous respectifs.

b. Calcul du nombre de paliers dans le cas de la pyramide
Soit n le nombre de colonnes. Le nombre de paliers est donné par la formule suivante :

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration :
Notons x la somme :

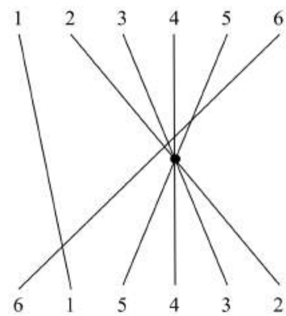
$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)\ ;$$

on a :
$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = x$
$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = x$
On ajoute membre à membre :
$(n-1+1) + (n-2+2) + \ldots + (2+n-2) + (1+n-1) = 2x.$

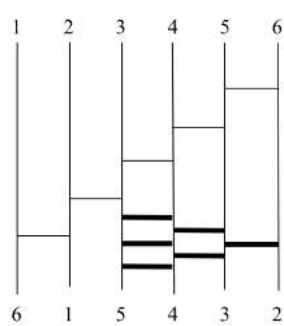
D'où : $n + n + \ldots + n = 2x$.
D'où :
$n(n-1) = 2[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1)]$.
Donc :

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c. Croisements multiples



Sur ce schéma on peut observer plusieurs croisements dont un croisement multiple entre les billes 2, 3, 4 et 5 représenté ci-dessus par un point noir. Si on place les paliers, il y aura une petite pyramide qui représentera ce croisement multiple (représentée avec des paliers plus épais) et les autres paliers qui correspondront aux croisements simples, ce qui nous donnera 11 croisements au total représentés par 11 paliers.



Conclusion

Notre problème est résolu : nous pouvons placer des paliers de sorte que chaque bille atterrisse dans le trou qui lui correspond, et ce, quelque soit le nombre de colonnes.

Les paliers se placent ainsi :

– soit on utilise la méthode automatique pour des croisements simples : chaque croisement correspond à un palier.

– soit on fait une pyramide là où il y a des croisements multiples.

Nous pensons qu'avec cette méthode on obtient le minimum de paliers nécessaires pour résoudre le problème.

Notes de l'édition

(1) Cet exemple illustre le problème général, où le nombre de colonnes est quelconque.

(2) Malgré ce qui est affirmé dans le texte, les deux hypothèses ne reviennent pas au même, car elles influent différemment sur l'ordre final des billes. De fait, dans la suite de l'article, il est supposé que des billes qui se rencontrent dans un palier se croisent toujours. Il reviendrait au même de supposer que les billes sont lâchées successivement et qu'elles ne se rencontrent jamais.

(3) Il est ici admis (hypothèse qu'il faudrait prouver) que des boules placées au départ sur des colonnes différentes aboutissent toujours au bas de colonnes différentes, et ceci quelle que soit la disposition des paliers. Chacun des cas différents examinés par les auteurs correspond donc à une manière de placer en bas n boules différentes (ou n numéros) dans un certain ordre, ce qu'en mathématiques on appelle couramment une *permutation* (des nombres 1, 2, 3, …, n). En fait la suite de l'article n'utilisera pas l'hypothèse admise que chaque jeu de paliers produit une permutation puisqu'elle adoptera une démarche inverse : elle s'attachera à recenser les permutations possibles, et à donner pour chacune une recette de fabrication…

(4) Les 24 cas obtenus correspondent respectivement aux ordres finaux suivant : (i) 1234 ; 1243, 1324 ; 2134 ; 1342, 2314 ; 1423, 3124 ; 1432, 3214 (ii) 2143 ; 2341, 3142 ; 2413, 4123 ; 2431, 3412, 4132, 4213, 3241 (iii) 3421, 4312, 4321, 4231.

(5) La figure originale a été ici corrigée par nos soins ; les ordres finaux obtenus sont 3142 et 2341.

(6) Une colonne fixe correspond à une colonne ayant le même numéro en haut et en bas, c'est-à-dire à une bille qui finit par tomber dans son propre trou. Les auteurs envisagent en premier lieu les cas où il y a de telles colonnes fixes, autrement dit (voir note n °7) les « *permutations avec point fixe* ».

(7) Les cas où « toutes les colonnes permutent » sont connus sous le nom de *permutations sans point fixe* ou *dérangements*. Le nombre de dérangements de 4 objets est 9, celui de 5 objets est 44 (et non 48). On peut vérifier que 44 est la partie entière de 5!/e (où e = 2,71828… est la base du *logarithme naturel* ou *népérien*) et qu'il est donné par la formule

$$5!/0! - 5!/1! + 5!/2! - 5!/3! + 5!/4! - 5!/5!\ .$$

Ces formules se généralisent à tout n.