Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 507–1 (Michel Lafond (Dijon))

On dispose de n quilles ($n \geq 2$) alignées tous les 15 cm. Un joueur adroit a une boule de 20 cm de diamètre. Il lance sa boule au hasard, tant que c'est possible, entre deux quilles consécutives encore debout et les renverse. Il renversera donc au plus $\frac{n}{2}$ paires de quilles. Soit X_n le nombre de paires de quilles renversées et $E_n = E(X_n)$ son espérance mathematique. Démontrer que lorsque n tend vers l'infini, la quantité $\frac{E_n}{n}$ admet une limite finie

$$L = 0{,}4323323583816936540530002525 13\ldots\ ?$$

Est-ce un hasard si

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{27}}}}}}} = 0{,}432332358381693654053000252513\ldots\ ?$$

Problème 507–2 (Franck Gautier (Pérignat les Sarlièves))

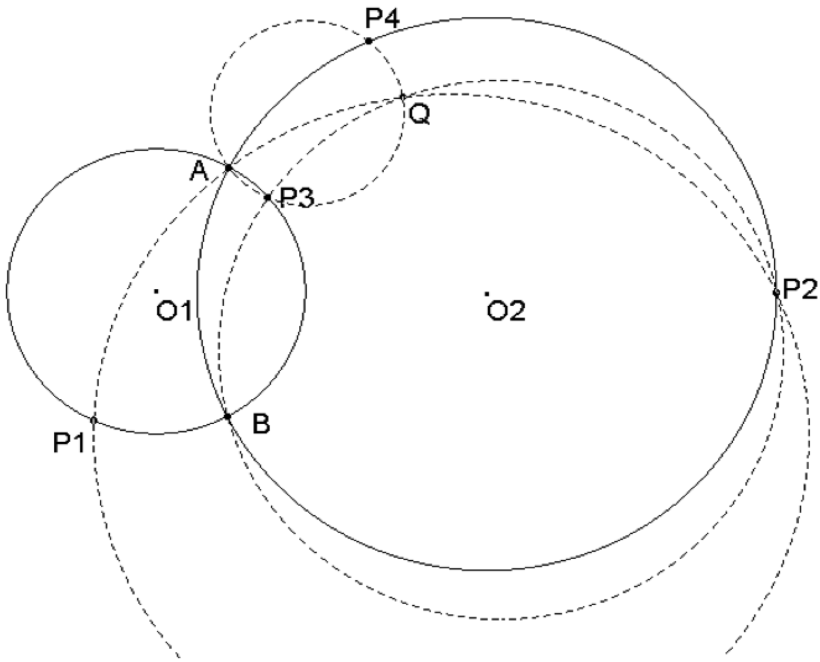
Soit P un polynôme a coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ la derivée k-ième de P. On suppose que pour tout $i \in [[1; n-1]]$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$P^{(i)}(a_i) = P(a_i).$$

Trouver le polynôme P.

Problème 507 - 3 (Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg))

Soit, dans un plan, deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 et O_2. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en A et B. Soit Q un point du plan, non situé sur l'un des deux cercles. À un point P_1 du cercle $\mathcal{C}_1$, on associe le point P_2 du cercle $\mathcal{C}_2$, intersection autre que A avec le cercle passant par les points P_1, A et Q (si ce cercle est tangent en A, on prendra $P_2 = A$). Au point P_2, on associe le point P_3 du cercle $\mathcal{C}_1$ intersection autre que B avec le cercle passant par P_2, B et Q (si le cercle est tangent en B, on prendra $P_3 = B$). Puis l'on recommence avec P_3 auquel on associe le point P_4 de $\mathcal{C}_2$, intersection autre que A avec le cercle passant par A, P_3 et Q, etc. (figure 1).



1. Démontrer que si les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux, la suite des points $P_1P_2P_3\ldots$ se referme au plus tard en P_5 (c'est-à-dire que $P_5 = P_1$).
2. Dans le cas général, démontrer que la suite de points $P_1P_2P_3\ldots$ se referme sur P_1, (c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n = P_1$) si et seulement si l'angle $\widehat{O_1AO_2}$ est commensurable à π.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 496-4

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \dots, x_n$, simplifier la somme ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \min\left(x_{i_1},\dots,x_{i_k}\right).$$

Réponses de Bernard Collignon (Coursan), Michel Lafond (Dijon), Francois Couloignier (Tarbes), Paul Pechoux (Valdoie), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Voici par exemple la solution de **Francois Couloignier**. Sans perdre de généralité, on peut supposer que les x_i sont rangés dans l'ordre croissant. Notons $\mathrm{S}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la somme considérée :

$$\mathrm{S}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \min\left(x_{i_1},\dots,x_{i_k}\right).$$

Pour $n = 2$,

$$\mathrm{S}\left(x_1,x_2\right)=x_1+x_2-\min\left(x_1,x_2\right)=x_1+x_2-x_1=x_2=\max\left(x_1,x_2\right).$$

Pour $n = 3$,

$$\mathrm{S}\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1+x_2+x_3-x_1-x_1-x_2+x_1=x_3=\max\left(x_1,x_2,x_3\right).$$

Cela amorce une récurrence, vérifions l'hérédité. Si la somme avec n réels se réduit à leur maximum, alors avec un réel de plus, on découpe la somme en deux, selon que $i_1 = 1$ ou non :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\right)=&\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{\boxed{1<i_1}<i_2<\cdots<i_k\le n+1} \min\left(x_{i_1},\dots,x_{i_k}\right)\\ &+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{\boxed{1=i_1}<i_2<\cdots<i_k\le n+1} \min\left(x_{i_1},\dots,x_{i_k}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{S}\left(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\right)=\mathrm{S}\left(x_2,x_3,\dots,x_{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{1<i_2<\cdots<i_k\le n+1} x_1.$$

Par hypothèse de récurrence, la premiere somme vaut x_{n+1} et l'on peut factoriser la seconde par x_1 :

$$\mathrm{S}\left(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\right)=x_{n+1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}1^{n-j}=x_{n+1}+x_1\left(1-1\right)^{n}=x_{n+1},$$

ce qui conclut.

Probleme 498–2 (Georges Kocher (Ravières)

Pour trois réels strictement positifs a, b, c dont la somme vaut 1, prouver l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64.$$

Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Michel Bataille (Rouen), Georges Kocher (Ravières), Benoît Fourlegnie, Michel Lafond (Dijon), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

L'inégalité proposée se généralise évidemment, essentiellement par des arguments de convexité. Avant d'aborder cela, voyons une démonstration « à la main », par exemple celle proposée par **Michel Bataille** :

En développant l'inégalité à démontrer, il s'agit de prouver que

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 \geq 64abc;$$

soit encore, puisque la somme $a + b + c$ vaut 1

$$2 + ab + ac + bc > 63abc. \tag{1}$$

Pour établir l'inégalité (1), posons $r=\sqrt[3]{abc}\geq 0$. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$(abc)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}(a+b+c),$$

soit

$$3r \leq 1. \tag{2}$$

Toujours par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$r^2=\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}\leq\frac{1}{3}(ab+bc+ca).$$

Donc

$$2 + ab + ac + bc \geq 2 + 3r^2.$$

Si on prouve que $2 + 3r^2 \geq 63r^3$, on aura prouvé (1). Or on a la factorisation suivante :

$$2+3r^2-63r^3=(1-3r)\left(21r^2+6r+2\right),$$

et cette expression est bien positive d'après l'inégalité (2).

Pour la généralisation, voici par exemple ce que propose **Georges Lion** : pour $x > 0$, on pose

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln(x).$$

L'application f est deux fois dérivable et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

puis

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

Ainsi, la fonction f est convexe.
Par l'inégalité de Jensen, pour $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

On suppose que la somme des x_k vaut 1. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

La croissance de l'exponentielle donne

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \geq (n+1)^n.$$

En utilisant la stricte convexité, on peut même en déduire qu'il y a égalité si et seulement si tous les x_k valent $\frac{1}{n}$.

En prenant $n = 3$ et $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$, un triplet formé de réels strictement positifs de somme 1, on retrouve

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq (3+1)^3 = 64,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Les autres méthodes proposées tournent essentiellement autour de la notion de convexité. **Benoît Fourlegnie** propose, puisque $c = 1 - a - b$, d'étudier l'application de deux variables

$$f : \begin{cases}]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{1-a-b}\right) \end{cases}$$

Cette application est de classe C^∞ et l'étude de sa maximisation se fait classiquement par la recherche de points critiques. Les calculs sont un peu fastidieux mais aboutissent bien au minimum pour $(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, comme souhaité.

Problème 498–4

Soit a, b deux réels, avec $a < b$. On considere une application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ dérivable sur le segment $[a, b]$. On note $\mathcal{D}$ l'image du segment $[a, b]$ par l'application derivée f', et $\mathcal{C}$ désigne l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}$. Montrer que le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ appartient à l'adhérence de $\mathcal{C}$.

Réponse de Georges Lion (Wallis).

On introduit le complexe

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

et l'ensemble

$$\mathcal{D}_f = \left\{ f'(t) \middle|\, t \in]a,b[\right\}.$$

On note $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$ l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{D}_f$. Il s'agit de démontrer que m appartient à $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$.

Soit, pour $t \in [a, b]$, $g(t) = f(t) - f(a) - m(t - a)$. On a ainsi

$$g(a) = g(b) = 0$$

et

$$\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f - m\ ;$$

autrement dit, l'ensemble $\mathcal{D}_g$ est l'image de $\mathcal{D}_f$ par la translation du vecteur d'affixe $(-m)$. On a donc l'équivalence suivante :

$$m \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)} \Leftrightarrow 0 \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}.$$

Il est classique que $\overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}$ est l'intersection des demi-plans fermés contenant l'ensemble $\mathcal{D}_g$. Soit $\mathcal{P}$ un tel demi-plan. Il existe un complexe λ de module 1 tel que $\lambda\mathcal{P}$ soit limité par une droite parallèle à l'axe imaginaire. On introduit les applications $x = \Re(\lambda g)$ et $y = \Im(\lambda g)$, parties réelle et imaginaire de λg.

Ces applications sont continues sur $[a, \mathrm{b}]$ et dérivables sur $]a, b[$. Par ailleurs, $x(a) = x(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\tau \in]a, b[$ tel que $x'(\tau) = 0$, d'où $\mathrm{i}y'(\tau) \in \mathcal{D}_{\lambda g} \subset \lambda\mathcal{P}$.

Par définition de $\lambda\mathcal{P}$, on en déduit que $0 \in \lambda\mathcal{P}$. Et par rotation de centre O, on a donc $0 \in \mathcal{P}$. Cette relation, vraie pour tout demi-plan fermé contenant $\mathcal{D}_g$, reste vraie pour leur intersection. Ainsi, $0 \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_g\right)}$. On a vu ci-dessus que cette relation est équivalente à $m \in \overline{\mathrm{co}\left(\mathcal{D}_f\right)}$.