Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 508–1

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui envoie tout segment de $\mathbb{R}$ sur un segment de même longueur. Trouver f.

Problème 508–2 (Isao Sauzzede, élève en MP à Clermont-Ferrand)

Soit $\mathrm{E} = C([0;1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications réelles continues sur $[0,1]$. On définit une application $\tau : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ de la façon suivante : pour $f \in \mathrm{E}$,

$$\tau(f) = \left| f - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note τ^n la fonction $\tau \circ \tau \circ \cdots \circ \tau$ itérée n fois. Pour $f \in \mathrm{E}$, étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions $(\tau^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 508–3 (Ayoub Bourich, École Centrale de Lyon)

Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe une matrice A de taille 2×2, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, telle que

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^p = p\mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \neq \mathrm{I}_2.$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 498-1 (Michel Lafond, Dijon)

Un entier naturel est dit « quarrable » s'il est la somme des chiffres d'un carré parfait (en base 10). Par exemple, l'entier 22 est quarrable puisque

$$22 = 5 + 4 + 7 + 6 \quad \text{et} \quad 5476 = 74^2.$$

Caractériser la suite (0, 1, 4, 7, 9, 10, 13, …) des entiers quarrables.

Solutions de Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Michel Lafond (Dijon),

Pierre Renfer (Saint Georges D'Orques)

On trouve facilement une condition nécessaire pour qu'un nombre soit quarrable. En effet, un tel entier est la somme des chiffres d'un carré et cette somme est congrue à ce carré modulo 9. Or dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, les seuls carrés sont les classes de 0, 1, 4 et 7. Un entier quarrable est donc nécessairement congru à 0, 1, 4 ou 7, modulo 9.

On va voir maintenant que cette condition est suffisante, en traitant séparément tous les cas.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, considérons le carré $(10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 0 et pour un entier $\alpha \geq 1$,

$$(10^\alpha - 1)^2 = 10^{2\alpha} - 2 \times 10^\alpha + 1 = (10^\alpha - 2)\cdot 10^\alpha + 1 = (999\ldots98)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre est donc égale à 9α. Ainsi, tout entier naturel congru à 0 modulo 9 est quarrable.

• On considère ensuite le carré $(2\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 1. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(2\cdot 10^\alpha - 1)^2 = 4\cdot 10^{2\alpha} - 4 \times 10^\alpha + 1 = (4\cdot 10^\alpha - 4)\cdot 10^\alpha + 1 = (399\ldots96)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre est donc égale à $1 + 9\alpha$. Ainsi, tout entier naturel congru à 1 modulo 9 est quarrable.

• On considère maintenant le carré $(3\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 0. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(3\cdot 10^\alpha - 1)^2 = 9\cdot 10^{2\alpha} - 6 \times 10^\alpha + 1 = (9\cdot 10^\alpha - 6)\cdot 10^\alpha + 1 = (899\ldots94)\cdot 10^\alpha + 1,$$

le chiffre 9 figurant encore $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre vaut $4 + 9\alpha$, donc tout entier naturel congru à 4 modulo 9 est quarrable.

• On considère enfin le carré $(5\cdot 10^\alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, ce carré vaut 16 dont la somme des chiffres vaut 7. Et pour $\alpha \geq 1$,

$$(5\cdot 10^\alpha - 1)^2 = (25\cdot 10^{\alpha-1} - 1)\cdot 10^{\alpha+1} + 1 = (2499\ldots9)\cdot 10^{\alpha+1} + 1,$$

le chiffre 9 figurant $\alpha - 1$ fois dans le développement décimal. La somme des chiffres de ce nombre vaut $7{+}9\alpha$ donc tout entier naturel congru à 4 modulo 9 est quarrable.

Finalement, la condition nécessaire est également suffisante. Un nombre est donc quarrable si et seulement si son reste dans la division euclidienne par 9 vaut 0, 1, 4 ou 7.

Problème 498-3

Tout polynôme a-t-il un multiple polynôme en $X^{1000000}$?

Solution de Benoît Joly (élève de l'ENS Lyon), Raymond Heitz (Lavergne), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

La réponse est oui.

Voici une solution très élégante, proposée par **Benoît Joly**. Soit P un polynôme non nul. On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ A(X) \mapsto A\left(X^{1000000}\right) \bmod P(X) \end{cases}$$

Cette application est linéaire, à valeurs dans l'ensemble des polynômes de degré au plus deg(P) − 1. Elle ne peut donc être injective puisque l'espace de départ est de dimension infinie tandis que l'espace d'arrivée est de dimension finie. Soit A un polynôme non nul, dans le noyau de φ. Alors $A(X^{1000000})$ est un multiple de P(X) qui répond à la question.

Une autre solution est proposée par **Raymond Heitz** et **Pierre Renfer**, qui commencent par montrer que la propriété est multiplicative, c'est-a-dire que si deux polynômes ont chacun un multiple qui est un polynôme en $X^{1000000}$, alors leur produit a aussi un multiple qui est un polynôme en $X^{1000000}$. En effet, considérons deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels existent $Q_1, R_1, Q_2, R_2 \in \mathbb{R}[X]$ verifiant

$$P_1(X)Q_1(X) = R_1\left(X^{1000000}\right) \quad \text{et} \quad P_2(X)Q_2(X) = R_2\left(X^{1000000}\right).$$

Alors, en posant $Q = Q_1Q_2$ et $R = R_1R_2$, on obtient

$$\left(P_1(X)P_2(X)\right)Q(X) = R\left(X^{1000000}\right).$$

Comme tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est produit d'une constante et de polynômes unitaires du premier degré et de polynômes unitaires du second degré irréductibles, il suffit de montrer la propriété pour ces facteurs irréductibles. Le cas des polynômes constants est idiot. Pour un polynôme réel $P(X) = X - \alpha$ unitaire du premier degré, on pose

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{999999} \alpha^k X^{999999-k},$$

et ainsi

$$P(X)Q(X) = X^{1000000} - \alpha^{1000000} \in \mathbb{R}\left[X^{1000000}\right].$$

Pour un polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$, réel unitaire irréductible, on le factorise sous la forme

$$P(X) = (X - \alpha)\left(X - \overline{\alpha}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

On considère alors le polynôme

$$Q(X) = \left(\sum_{k=0}^{999999} \alpha^k X^{999999-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{999999} \overline{\alpha}^k X^{999999-k}\right).$$

C'est un polynôme réel (produit de deux polynômes complexes conjugués). Et

$$P(X)Q(X) = \left(X^{1000000} - \alpha^{1000000}\right)\left(X^{1000000} - \overline{\alpha^{1000000}}\right)$$

est, pour la même raison, un polynôme réel et c'est un polynôme en $X^{1000000}$: Ceci clôt la démonstration.

Problème 499-2 (Xavier Reliquet (Paris))

Tout sous-corps de $\mathbb{C}$ est-il stable par conjugaison ?

Solution de Xavier Reliquet (Paris), Georges Lion (Wallis) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orque)

La réponse est non. Voici deux exemples de sous-corps de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas stables par conjugaison.

Tout d'abord, voici une extension transcendante qui n'est pas stable par conjugaison. On considère le complexe $\alpha = \pi + \mathrm{i}$. L'élément α est transcendant (sinon, $\pi = \alpha - \mathrm{i}$ serait algébrique). Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ est, par définition, formé des complexes de la forme

$$\frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}(\alpha)} \quad \text{avec } \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}],\ \mathrm{Q} \neq 0.$$

Ce corps contient évidemment α, mais pas $\overline{\alpha}$. En effet, si $\overline{\alpha}$ appartenait à $\mathbb{Q}(\alpha)$, alors le complexe

$$\mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \overline{\alpha}\right)$$

serait également dans $\mathbb{Q}(\alpha)$. On pourrait alors écrire

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}(\alpha)} \quad \text{avec } \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}],$$

soit encore

$$\left(\mathrm{P}(\alpha)\right)^2 + \left(\mathrm{Q}(\alpha)\right)^2 = 0.$$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2$, non nul, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, serait un polynôme annulateur du nombre α, donc α serait algébrique, d'où la contradiction.

Voici maintenant un exemple d'extenstion algébrique. On pose $\beta = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}$, où j désigne le complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\beta)$ est une extention algébrique de $\mathbb{Q}$, de degré 3, puisque le polynôme minimal de β est $\mathrm{X}^3 - 2$. On suppose que $\overline{\beta} = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}^2$ appartient à $\mathbb{K}$. Alors $\mathrm{j} = \dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ appartient à $\mathbb{K}$. Ceci est absurde car j admet pour polynôme minimal $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, donc l'extension $\mathbb{Q}(\mathrm{j})$ (de degré 2) ne peut être contenue dans $\mathbb{K}$ puisque 2 ne divise pas 3.

Problème 500-1

Soit f : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe $x \in\ ]0,1[$ tel que $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Solution de Michel Bataille (Rouen), Georges Lion (Wallis), Moubinool Omarjee (Lycee Henri IV, Paris), Michel Quercia, Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orque), Raphael Sinte (Lycée Frederic Chopin, Nancy), Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon)

La propriété étant évidente pour $f = 0$, on suppose que f n'est pas identiquement nulle sur le segment $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, on définit

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) = 0$$

et l'application F n'est pas constante sur $[0,1]$. En changeant au besoin l'application f en $-f$, on peut affirmer l'existence d'un réel $t_0 \in\ ]0,1[$ tel que

$$\mathrm{F}(t_0) = \sup_{t\in[0,1]} \mathrm{F}(t) > 0.$$

Par intégration par parties, on a

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{F}(x) - \int_0^x \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(t)\right|\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\mathrm{G}(t_0) > 0:$$

Distinguons deux cas :

• Premier cas : on suppose $\mathrm{F}(t) > 0$ pour tout t 2 [0; 1]. Alors

$$\mathrm{G}(1) = -\int_0^1 \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t < 0,$$

car l'application F n'est pas identiquement nulle sur $[0,1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que l'application G s'annule en une valeur x de $[t_0,1[\ \subset\ ]0,1[$.

• Second cas : on suppose que F n'est pas toujours positive, d'où l'existence d'un réel $t_1 \in\ ]0, 1[$ tel que

$$\mathrm{F}(t_1) = \inf_{t\in[0,1]} \mathrm{F}(t) < 0.$$

Alors

$$\mathrm{G}(t_1) = \int_0^{t_1} \left|\mathrm{F}(t_1) - \mathrm{F}(t)\right|\mathrm{d}t < 0.$$

car $t \mapsto \mathrm{F}(t_1) - \mathrm{F}(t)$ n'est pas constamment nulle sur $[0,t_1]$. On conclut de même que dans ce cas l'application G s'annule en une valeur x de l'intervalle d'extrémités t_0 et t_1, intervalle contenu dans $]0,1[$.