Du trapèze au puzzle de Dudeney

Serge Parpay(*) & Jean Fromentin(**)

Le Rallye mathématique A.P.M.E.P. de Poitou-Charentes s'adresse à des élèves des classes de la Sixième à la Seconde ; les élèves s'organisent en groupes, les exercices sont choisis évidemment par niveau. L'an dernier, un des professeurs de l'équipe avait fabriqué un puzzle un peu bizarre (un texte de géométrie d'un livre allemand de 1916, découpé en morceaux et à reconsituer). Il s'était bien amusé des réactions devant ce puzzle, pas embarrassant pour les morceaux mais déconcertant pour l'écriture … en gothique !). Le thème « puzzle » ayant été retenu pour le rallye, le puzzle de Dudeney était alors cité.

Quelques détails :

– puzzle [puzzl'], n.m. (mot anglais). [Jeu] Jeu de patience, composé d'une grande quantité de petites pièces semblables qu'il faut encastrer les unes dans les autres de façon à former une surface continue. (Dictionnaire encyclopédique Quillet. MCMXXXIV).
– to puzzle : embarrasser, déconcerter.

Il ne sera question ici que de puzzles constitués de pièces (triangles et quadrilatères) articulées en certains sommets, glissant sur un plan et donc non retournables.

Henry Dudeney (10 avril 1857 - 24 avril 1930), anglais, né à Mayfield dans le Sussex, créateur de nombreux jeux mathématiques. Il avait fait fabriquer une table transformable, sur le modèle de son célèbre puzzle ; son idée a été reprise plus tard (on espère que les fabricants ont cité son nom)(1).
L'un des auteurs de cet article avait lu peu de temps auparavant un document mentionnant le puzzle, avec une petite photo sans autre commentaire. Des pièces en carton rapidement fabriquées et approximatives ; oui … on passe bien, semble-t-il, d'un triangle équilatéral à un carré. Il faut trouver pourquoi cela fonctionne – mais pas question d'aller voir sur internet ; l'important est de chercher et … de trouver (si possible) !
Un hasard de la manipulation conduit à un trapèze et nous mène à l'idée qu'un trapèze peut donner des puzzles semblables à celui de Dudeney, permettant de passer d'un triangle à un rectangle. C'est ce qui est présenté ci-dessous. Le premier paragraphe est une approche du découpage d'un trapèze.

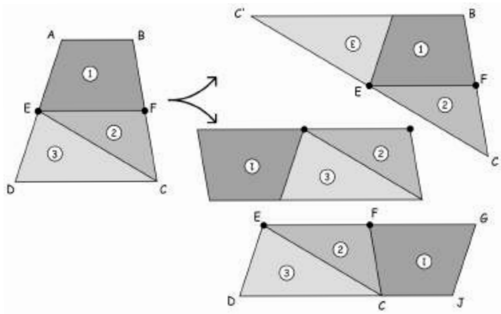
(*) serge.parpay@orange.fr
(**) fromentin.jean@numericable.fr
(1) The D*Table, by The D*Haus Company, is bound to solve any table and storage solutions you might have. First, it's 8 tables in 1. Yes, EIGHT. That means you change it up as you need it for most any situation. Second, it has handy features like a hole to sit a plant in, drawers to store stuff, and slots to rest your book in when you're not reading it.

Un découpage classique : puzzle de trois pièces transformant un triangle en parallélogramme (via la droite des milieux)

Un trapèze découpé en trois pièces permet d'obtenir d'une part un triangle par demi-tour de la pièce (3) autour du point E, milieu du côté [AD] et d'autre part deux parallélogrammes par demi-tours de la pièce (1) :

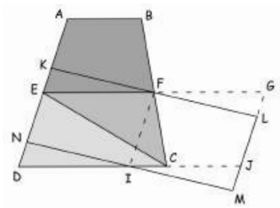
– un parallélogramme par demi-tour autour du point E,

– un autre parallélogramme DEGJ par demi-tour autour du point F milieu du côté [BC].

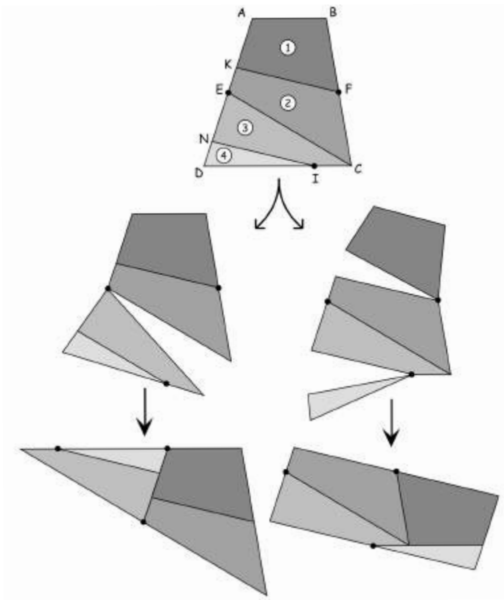


Pour plus de liberté à partir du même trapèze : puzzle de quatre pièces transformant un triangle en parallélogramme.

On peut obtenir des parallélogrammes autres que DEGJ avec de nouveaux découpages.
Soit un point K sur [EA] et son symétrique L par rapport à F. Le point L est sur le segment [GJ]. La parallèle à (AD) passant par F coupe [CD] en I. La parallèle à (KL) passant par I coupe (AD) en N et (GJ) en M. KLMN et KFIN sont des parallélogrammes.

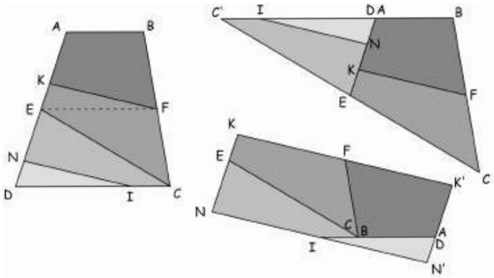


Ce nouveau découpage dont les quatre pièces pivotent autour des points E, F et I donne toujours le triangle précédent par demi-tour autour du point E des pièces (3) et (4) groupées mais aussi un nouveau parallélogramme par demi-tour des pièces (1) et (4) autour respectivement des points F et I.



Pour aller plus loin : puzzle transformant un triangle rectangle isocèle en rectangle

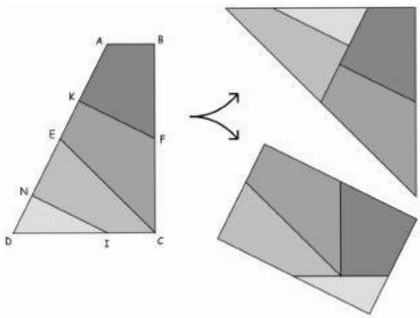
En choisissant convenablement un trapèze avec ce nouveau découpage, on peut obtenir des figures plus particulières, comme par exemple un triangle rectangle isocèle d'une part, et un rectangle d'autre part.



Sur la figure ci-contre, les noms des points du trapèze sont reportés sur le triangle et le parallélogramme.

Pour que BCC′ soit un triangle rectangle isocèle de base [CC′], il faut que BC = BC′, soit BC = AB + CD ou BC = 2EF, et que l'angle en B soit droit.

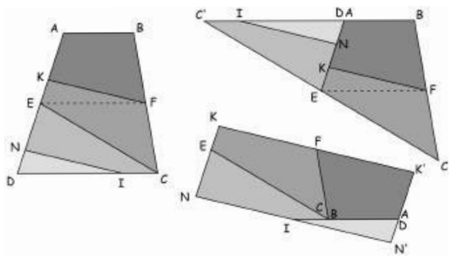
Pour que K′KNN′ soit un rectangle, il faut que l'angle en K soit droit. Dans le trapèze, le point K est donc le projeté orthogonal de F sur (AD). KFIN est alors un rectangle : le point I reste inchangé sur la parallèle à (AD) passant par F et le point N sur [DE] est tel que (IN) // (FK). L'angle en N est droit.



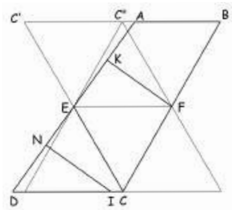
La longueur BC étant choisie au départ, on peut tracer alors le trapèze ABCD répondant aux conditions ci-dessus et donnant le découpage souhaité (figure ci-contre).

Vers le puzzle de Dudeney : puzzle transformant un triangle équilatéral en rectangle

Le puzzle de Dudeney permet de passer, par découpage, d'un triangle équilatéral à un carré et réciproquement.
On peut donc construire un trapèze particulier qui aboutira à ce découpage.
Dans un premier temps, réalisons un triangle équilatéral et un rectangle.

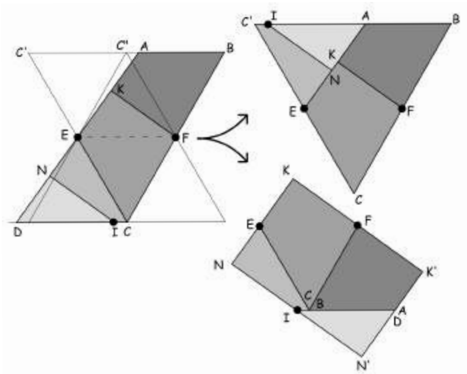


BCC′ doit être équilatéral. Les angles en B et C doivent être de mesure $\pi/3$. Le triangle CEF est alors équilatéral.



[BC] étant un côté du trapèze, la construction se fait à partir du réseau triangulaire {B, F, C, E, C′, C″}. Soit un point A de [BC″] et le point D symétrique de A par rapport à E. (DC) est parallèle à (AB) et I est tel que DI = EF. Les angles en E et A du triangle AEF étant aigus, K est bien constructible, de même N pour le triangle EIC.

Calculs pour le puzzle de Dudeney



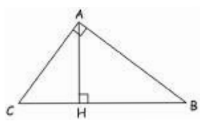
Il s'agit maintenant de déterminer la position du point A, sommet du trapèze ABCD, pour que KK′N′N soit un carré.

Soit a = EF la longueur du côté du triangle élémentaire du réseau. L'aire du trapèze est $a \times a\sqrt{3}$ [base moyenne EF multipliée par hauteur CC′]. C'est aussi l'aire du triangle équilatéral et du carré.

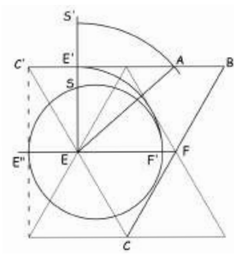
Soit c le côté du carré : $c^2 = a^2\sqrt{3}$.
On a alors dans le trapèze :
ND + AK = ND + NE = DE = EA = c,
et il en découle que FK = IN = $c/2$.

On doit donc construire le point A sur [BC″] tel que EA = c. Son existence est assurée par le fait que EC″ < EA < EB ($a^2 < c^2 < 3a^2$).

La construction repose sur une propriété classique du triangle rectangle : la hauteur issue de l'angle droit est la moyenne géométrique entre les projections des petits côtés sur l'hypoténuse.



Sur le réseau triangulaire utilisé, $\mathrm{EE}' = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{EE}'' = \dfrac{a}{2}$.



Soit le point F′ sur [EF] tel que EE′ = EF′. Le cercle de diamètre [E″F′] coupe [EE′] en S. Le triangle E″SF′ est rectangle en S et donc ES² = EE″ × EF′.

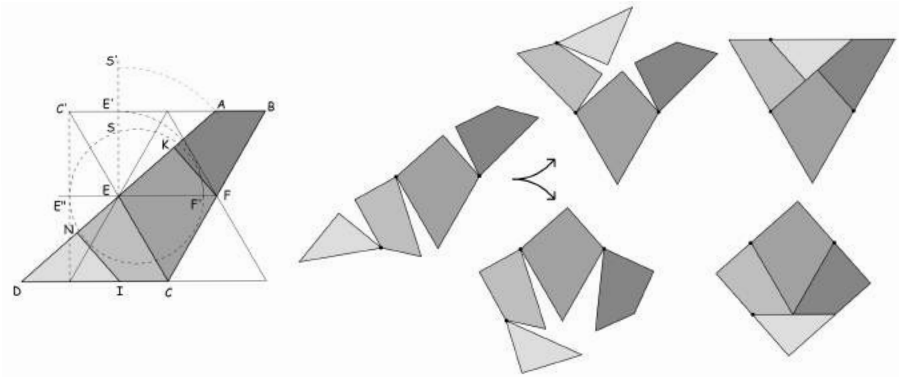
On a alors $\mathrm{ES}^2 = \dfrac{a}{2} \times a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, et donc $\mathrm{ES} = \dfrac{c}{2}$.

Soit S′ le symétrique de E par rapport à S, ES′ = c.
Le cercle de centre E et de rayon ES′ coupe [C′B] en A qui est le point cherché.

Il ne reste plus qu'à placer les points D symétrique de A par rapport à E, B symétrique de C par rapport à F, I tel que DI = EF, K et N projections orthogonales de F et I sur (AD) (dessin ci-dessous).

Puzzle de Dudeney

Les quatre pièces ainsi obtenues forment le puzzle de Dudeney !



Bibliographie

Nous remercions Daniel Reisz de nous avoir rappelé les deux articles de J.P. Fridelmeyer parus dans le Bulletin APMEP : « *Du triangle au carré en trois coups de ciseaux* » (n° 469) ; « *Puzzles et équidécomposabilité des polygones plans* » (n° 487).

De nombreux livres de mathématiques parlent du puzzle de Dudeney ainsi que de nombreux documents sur Internet.