Agrandissement-Réduction d’une figure

Un Parcours d'Étude et de Recherche à partir de la quatrième

Groupe didactique de l'Irem de Bordeaux

Nous publions ici une version courte de cet article du groupe didactique de Bordeaux. La version complète est à lire sur le site de l'APMEP parmi les compléments en ligne de ce bulletin.

Cet article fait suite à la présentation de ce PER (Parcours d'Étude et de Recherche) lors d'un atelier des journées mathématiques de l'IFÉ (Institut Français de l'Éducation) au mois de juin 2013. Il s'inscrit dans un parcours plus large sur la proportionnalité en géométrie au collège qui fera l'objet de la publication d'une brochure rédigée par le Groupe didactique de l'Irem de Bordeaux.

Que signifie agrandir, réduire une figure ?

La notion d'agrandissement-réduction n’est pas véritablement une notion mathématique. Elle a été créée pour éviter de parler d'homothétie ou de similitude.

Cette notion n’est pas toujours définie de façon très rigoureuse dans les manuels de collège. Certaines rédactions qui y sont utilisées peuvent laisser penser qu’il suffit de multiplier les côtés d’une figure par un même nombre pour en obtenir un agrandissement.

Mais il faut faire attention : en effet, pour agrandir un carré ou un rectangle, il suffit de multiplier la mesure des deux côtés par une constante, tout en conservant la nature des figures, alors que pour un losange par exemple, cela ne suffit pas. Pour un triangle, soit on multiplie la longueur d’un seul côté et on conserve deux angles, soit on multiplie la longueur de deux côtés et on conserve l’angle compris entre les deux, soit on multiplie la longueur des trois côtés par le même facteur.

De façon générale, pour agrandir ou réduire une figure, il faut choisir les éléments qui suffisent pour reproduire la figure à une isométrie près (longueurs ou angles), puis multiplier les longueurs ainsi sélectionnées par un facteur constant et conserver les angles choisis.

Intuitivement, pour les élèves, quand on agrandit, on ajoute quelque chose (quand on agrandit sa maison, on ajoute une pièce !), quand on réduit, on enlève quelque chose. C'est donc un point important qu'il ne faut pas passer sous silence.

Le parcours proposé

Nous proposons un enchaînement de situations pour traiter le thème agrandissement-réduction au collège, que nous appelons « parcours » en référence aux PER (Parcours d'Étude et de Recherche) théorisés par Yves Chevallard. Ce travail de l'IREM d'Aquitaine s'inscrit dans le cadre de la recherche PERMES (Parcours d'Étude et de Recherche en Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire) en collaboration entre l'ADIREM et l'IFÉ (institut Français de l'Éducation, ex INRP).

Une raison d'être de ce parcours : le programme de quatrième réduit le théorème de Thalès au triangle et le relie au concept d'agrandissement-réduction de triangles.

Le parcours que nous proposons en classe de quatrième permet d'abord de faire émerger la proportionnalité et la conservation des angles, de considérer les agrandissements-réductions de figures en général pour aboutir au cas particulier des triangles et à la propriété de Thalès, « version quatrième ». Dans un deuxième temps, il permet d'initier la forme « classique » du théorème avec l'égalité des rapports puis la caractérisation graphique de la proportionnalité.

Les activités d'étude et de recherche (AER) qui constituent ce parcours utilisent un matériel concret simple, présent dans la classe, que les élèves peuvent manipuler (photos, triangles et rectangles à découper, …). La modélisation, nécessaire pour faire apparaître et comprendre le rôle des mathématiques, est très simple.

Les élèves utiliseront ici les outils habituels de la proportionnalité : schéma fléché, tableau, …, avec utilisation des coefficients de proportionnalité, de la propriété de linéarité. La progression proposée amène les élèves à découvrir et mettre en place d'autres outils : égalité de rapports, graphique, formule. La proportionnalité redevient donc objet d'étude avec sa caractérisation graphique, étude qui se terminera pour le collège par la fonction linéaire.

Ce parcours s'inscrit donc parfaitement en quatrième, dans le travail à mener sur la proportionnalité, et permet aussi de donner du sens à l'introduction de la notion de cosinus par exemple. Nous n'avons pas inclus l'AER sur le cosinus dans cet article mais elle s'articule parfaitement avec ce qui est proposé ici(1).

Après avoir brièvement rappelé les attendus du programme officiel, nous exposerons, dans une première partie, un enchaînement de trois situations sur le thème de l'agrandissement d'une photo, dans une deuxième partie, trois situations amenant la propriété de Thalès, dans sa « version quatrième ». Dans une troisième et dernière partie, et en guise de conclusion, nous proposerons la progression constituant le parcours annoncé, montrant l'imbrication de ces différentes situations entre elles ainsi que quelques activités complémentaires mais essentielles pour la cohérence du parcours.

Ce que disent les programmes

Classe de quatrième

1.1 Utilisation de la proportionnalité
Déterminer une quatrième proportionnelle.
Aux diverses procédures déjà étudiées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié.

(1) Vous pouvez trouver la situation sur l'introduction du cosinus en quatrième dans Petit x n° 65 (2004).

1.2 Proportionnalité
–* Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité

3.1 Figures planes
Triangle : milieux et parallèles.
– Connaître et utiliser les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle.
Dans le cadre du socle commun, seules les propriétés directes de la droite des milieux sont exigibles.
–* *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux demi-droites de même origine*.
Le théorème de Thalès dans toute sa généralité et sa réciproque seront étudiés en classe de troisième.

3.3 Agrandissement-réduction
–* Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir.
Des activités de construction (avec éventuellement l'utilisation de logiciels de construction géométrique) permettent aux élèves de mettre en évidence et d'utiliser quelques propriétés : conservation des angles (et donc de la perpendicularité) et du parallélisme, multiplication des longueurs par le facteur k d'agrandissement ou de réduction, …
Certains procédés de construction peuvent être analysés en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle.

<u>Classe de troisième</u>
Configuration de Thalès.
– *Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes*.
– *Connaître et utiliser un énoncé réciproque*.
Il s'agit de prolonger l'étude commencée en classe de quatrième qui, seule, est exigible dans le cadre du socle commun.

Première partie : agrandissement d'une photo

Les objectifs visés ici, par cet enchaînement de trois situations, sont :

- d'une part, de reprendre l'apprentissage de la proportionnalité autrement qu'en termes de révision, en partant du cadre géométrique et en allant vers le cadre graphique (donc différemment des problèmes arithmétiques qui servent en général à exercer les élèves sur la proportionnalité depuis le cours moyen) ;
- d'autre part, de faire un premier pas vers la fonction linéaire et sa représentation graphique, en expliquant l'alignement des points et même la notion de pente d'une droite !

Agrandissement d'une photo, situation 1 : « partie intuitive »

<u>La consigne</u>

Trois séries de photos sont proposées en vidéo-projection aux élèves.

Il leur est simplement demandé d'observer ces photos pour pouvoir ensuite faire des commentaires et des remarques oralement.

Première série :

Deuxième série :

Troisième série :

Dans la discussion en classe entière les élèves utilisent les mots « aplati, étiré, trop mince, plus large, déformé, agrandi pareil en longueur et en largeur, … ». Ceci permet de se mettre d'accord sur le fait que si une photo est correctement agrandie, tous les éléments de l'image sont agrandis « de la même façon », comme dans une maquette ou, à l'inverse, tous les éléments de l'objet sont réduits « de la même façon ».

Toutes les dimensions de la photo doivent être agrandies de la même façon, afin que les images ne soient pas déformées. Dans un premier temps, le professeur peut se contenter de cette formulation pour caractériser cette transformation : il s'agit d'une similitude, mais ce mot n'est pas introduit. Le programme parle d'agrandissement et de réduction. Le mot « agrandissement » est ambigu : si j’agrandis ma maison, je rajoute une pièce, je ne fais pas une homothétie ni une similitude… Le recours à la photo permet au professeur de se faire bien comprendre sur ce qu’il entend par « agrandissement-réduction ». Si le mot proportionnalité est prononcé dans la classe, le professeur peut le reprendre, sinon il ne le prononce pas.

Le seul objectif de cette première situation est donc de « fixer » intuitivement avec la classe, la notion d'agrandissement-réduction : la conservation de la « forme ». Il n'est pas question ici d'envisager la conservation des angles, cela viendra plus tard.

Agrandissement d'une photo, situation 2 : la proportionnalité

La consigne

« On considère une photo qui est un rectangle de 4 cm sur 2 cm : je veux l’agrandir de sorte que la longueur qui est 4 cm devienne 7 cm.

Quelle est la largeur de la nouvelle photo ?

Indiquer les calculs faits et dessiner le rectangle représentant la photo agrandie. »

(La dimension 2 cm peut prêter à confusion avec le coefficient de proportionnalité 2 entre largeur et longueur du rectangle initial. On pourra éventuellement prendre un rectangle de 8 cm par 4 cm et demander que la largeur 4 cm devienne 7 cm.)

Voici différentes réponses ou procédures d'élèves qui ont travaillé sur une photo de 4 cm sur 2 cm.

a) « J’ajoute 3 cm pour obtenir 7 cm donc j’ajoute 3 cm à 2 cm pour obtenir la nouvelle largeur et j’obtiens 5 cm. »

b) Certains proposent : « $8 - 1 = 7$ donc $4 - 1 = 3$ ».

c) « 2 étant la moitié de 4, donc si la nouvelle longueur est 7 cm, on doit trouver, pour la nouvelle largeur, la moitié de 7 cm, soit 3,5 cm. »

d)

4	2
7	?

$? = \dfrac{7}{4} \times 2 = 3{,}5$, le coefficient de proportionnalité est $\dfrac{7}{4}$.

Ou $? = \dfrac{7 \times 2}{4}$ avec l'utilisation de l'égalité des produits en croix.

e)

4	7
2	?

$4 \times 0{,}5 = 2$ donc $7 \times 0{,}5 = 3{,}5$.

Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité est 0,5.

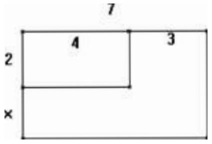
f) Certains élèves ont besoin de passer par l’unité. Ils parlent parfois de règle de trois.

g) D’autres élèves proposent un schéma fléché.

$$4 \rightarrow 7$$
$$2 \rightarrow ?$$

h) Un élève a résolu l’équation suivante : $4 \times ? = 7$. Donc $? = 7 \div 4 = 1{,}75$ d’où $2 \times 1{,}75 = 3{,}5$.

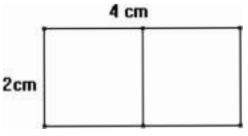
i) Certains élèves font le dessin ci-dessous mais ne parviennent pas à poursuivre.



Les élèves travaillent individuellement pendant une dizaine de minutes et le professeur n'intervient absolument pas pendant cette phase pour permettre à un maximum de procédures, justes ou fausses, d’émerger.

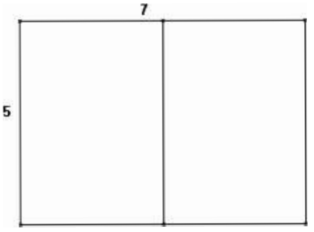
Sa première intervention sera de proposer aux élèves de « valider » ou non leur travail. En particulier, il s'agit de convaincre les élèves qui ont ajouté 3 cm à 2 cm ou ceux qui ont enlevé 1 cm à 4 cm que leur agrandissement ne convient pas, et les amener à remettre en cause leur procédure.

Pour cela, le professeur demande de tracer le rectangle initial et de constater qu'il est composé de deux carrés.

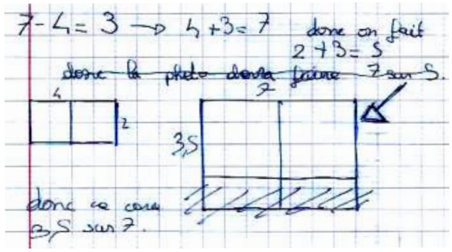


Les élèves peuvent maintenant vérifier si « dans » leur rectangle, ces deux carrés ont été agrandis correctement : c'est la conservation de la « forme » de la situation précédente.

Ces deux carrés le sont évidemment pour ceux qui ont utilisé la proportionnalité mais ce n'est pas le cas pour les autres. Par exemple, les élèves qui ont ajouté 3 cm à 2 cm obtiennent la figure suivante.

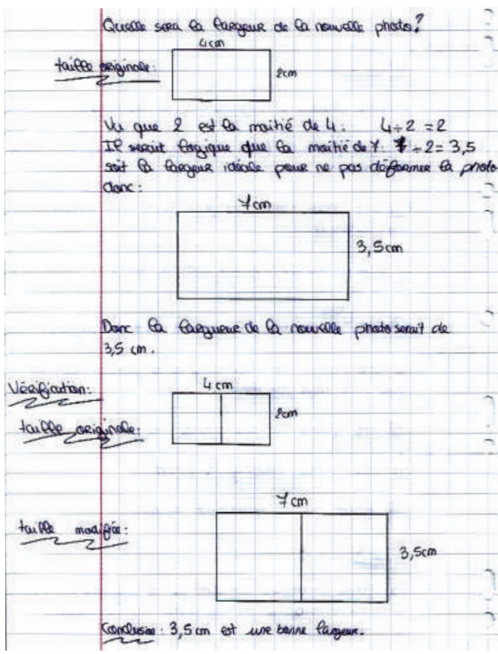


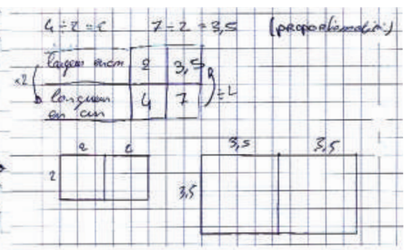
Ce moment de validation apparaît comme essentiel pour contrer le modèle additif comme le suggère le travail d'une élève ci-dessous.

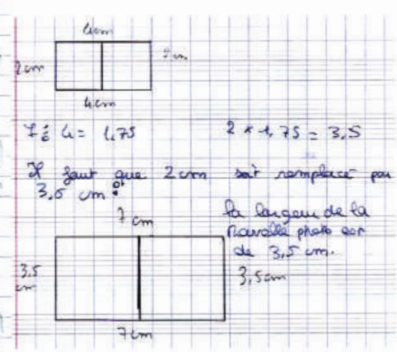


La conservation des deux carrés lui permet de réaliser que son modèle n'est pas le bon et de « se corriger » pour obtenir la bonne réponse même si le modèle multiplicatif n'est certainement pas encore installé.

Voici quelques autres productions d'élèves illustrant différentes stratégies et leurs validations.







Une mise en commun a lieu ensuite pour trier les différentes procédures.

La proportionnalité ainsi mise en évidence, le professeur insiste sur les deux coefficients possibles, en reprenant par exemple les deux types de tableaux.

Longueur des photos	4	7
Largeur des photos	2	3,5

× 0,5

Ce premier tableau (voir procédure e dans la liste précédente) exprime la proportionnalité entre la largeur et la longueur des différentes photos : le coefficient est 0,5. La largeur mesure la moitié de la longueur quel que soit l'agrandissement choisi.

Dimensions de la 1ère photo	4	2
Dimensions de la photo agrandie	7	3,5

× 1,75

Ce deuxième tableau (voir procédure d dans la liste précédente) exprime que les dimensions de la photo agrandie sont proportionnelles aux dimensions de la photo de départ (coefficient de proportionnalité 1,75) quand on fait un seul agrandissement.

Le bilan de cette situation 2 pour les élèves est : pour agrandir une photo, toutes les longueurs doivent être multipliées par un même nombre et la « forme » doit être conservée (le rectangle « reste » un rectangle, le carré « reste » un carré).

La conservation des angles est ici implicite. Les élèves ne se posent pas la question car la forme rectangulaire est conservée.

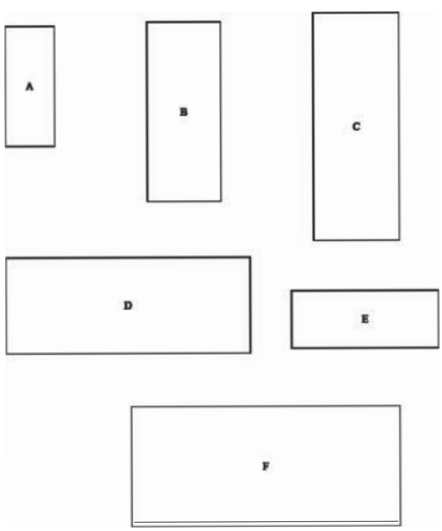
Cette problématique sera soulevée dans les activités d'agrandissements et réductions de losanges, trapèzes, …, s'intégrant dans le parcours et décrites dans la troisième partie.

Agrandissement d'une photo, situation 3 : aspect graphique

La consigne

« Découper soigneusement les 6 rectangles (ou photos) de la feuille distribuée par le professeur. **Les dimensions des rectangles ne sont pas marquées.**

Comment sans aucun calcul ni aucune mesure, trouver quels sont les rectangles qui sont des agrandissements du plus petit ? »



Le but de la situation 3 est d’arriver à la représentation graphique de la largeur de la photo en fonction de sa longueur sans formaliser davantage la fonction.

Les élèves doivent trouver un critère permettant de discriminer les agrandissements : il est attendu qu'ils empilent les rectangles, le critère cherché étant l'alignement des sommets. Il est à noter que, à ce stade, les élèves auront déjà une expérience de « découpages et empilements » avec la première situation de la deuxième partie (la propriété de Thalès).

Cela revient donc à se convaincre que :

- si les points sont alignés, alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles (contraposée de la réciproque de la première implication).

Autrement dit de l'équivalence entre l'alignement et la proportionnalité des dimensions.

Il y a « deux proportionnalités » : la proportionnalité entre les dimensions de la photo initiale et celles de la photo agrandie qui a été étudiée dans les deux premières situations et la proportionnalité entre les longueurs et largeurs des photos bien agrandies qui est plus particulièrement mise en évidence par l'empilement des rectangles dans cette situation 3.

Les dimensions des rectangles (non données aux élèves !) sont : (A), 5 cm par 2 cm ; (B), 7,5 par 3 ; (C), 10 par 4 ; (D), 11 par 5 ; (E), 6 par 2,4 et (F), 9,5 par 3,5.

Il y a trois agrandissements du rectangle (A) qui sont (B), (C) et (E), de sorte que les élèves puissent voir au moins quatre points alignés avec l'origine en plaçant astucieusement les rectangles.

Les rectangles (D) et (F) n'ont pas des dimensions proportionnelles à celle de (A) mais les écarts ne sont pas trop grands de façon à ce qu'on ne puisse pas s'en apercevoir sans placer les rectangles de cette façon. Cependant l'écart est suffisant pour être visible quand les rectangles sont bien placés, malgré de petites erreurs dues au découpage.

Voici des propositions des élèves.

a) Beaucoup d'élèves voient que le rectangle (C) a des dimensions doubles de celles de (A) et qu'on peut donc rentrer 4 fois le rectangle (A) dans (C). Ils sont convaincus que (C) est un bon agrandissement.

b) Ils essaient de procéder de même avec le rectangle (B) en coupant (A) en deux dans le sens de la longueur et de la largeur. Le rectangle obtenu rentre 9 fois dans le rectangle (B).

c) D'autres essaient de faire le même type de raisonnement pour le rectangle (D) : le rectangle (A) rentre 5 fois et demi dans le rectangle (D), en coupant (A) dans le sens de la largeur uniquement. Ils sont trompés par ce qui se passe avec (C) et pensent que, pour trouver un agrandissement, il suffit de trouver un lien entre l'aire de chaque rectangle et l'aire de (A).
D'autres élèves ne sont pas d'accord avec eux, ce qui entraîne un débat dans la classe.
Le professeur peut expliquer qu'il s'agit d'une fausse piste en montrant des rectangles dont l'aire est la même, ou le double ou le triple de celle du rectangle de départ et qui n'en sont visiblement pas des agrandissements.

d) Pensant au fait qu'avec certains logiciels, il faut tirer sur le coin de la photo pour ne pas la déformer, certains élèves tracent une diagonale des rectangles et superposent les rectangles à partir d'un des sommets d'où part cette diagonale.

e) Quelques-uns tentent d'empiler les rectangles par leur centre (en utilisant la pointe de leur compas pour « piquer » les rectangles au centre !).

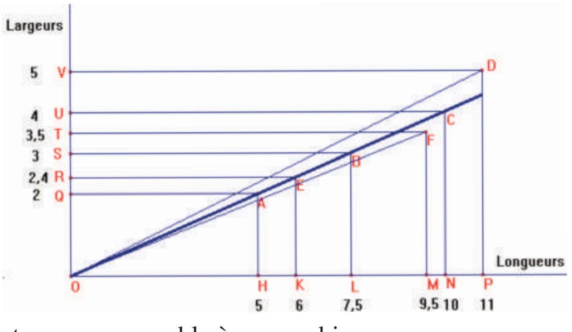
Dans cette situation 3, les élèves ont six rectangles, quatre ont des dimensions proportionnelles : ce qu'ils remarquent quand ils les empilent, ce sont les sommets qui ne sont pas alignés avec les autres. Ils envisagent facilement la proportionnalité dans le cas d'un alignement ou la non proportionnalité dans le cas contraire.

Le début de cette situation 3 est consacrée à l'action, les élèves ont trouvé une méthode pour décider des « bons et mauvais » agrandissements : superposer les rectangles.

Il s'agit maintenant de formuler des conjectures puis de se convaincre de leur validité :
- si les points sont alignés alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles.

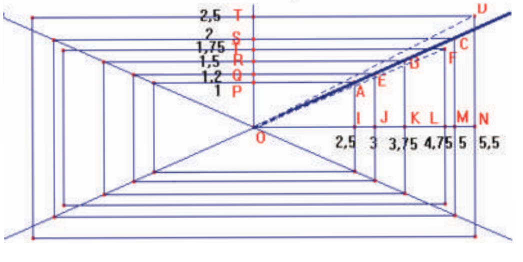
Le professeur donne maintenant les dimensions des rectangles et demande aux élèves de dessiner les rectangles superposés.

On obtient un dessin comme celui-ci.



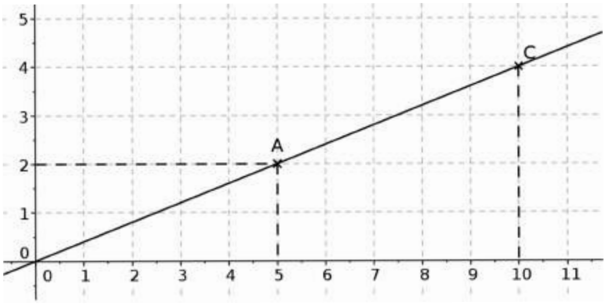
Des élèves disent que ça ressemble à un graphique.

Ci-dessous, ce que l'on obtient en empilant par le centre.



La propriété de Thalès étant disponible au moment où cette situation 3 est traitée, le professeur propose des éléments de preuve des conjectures.

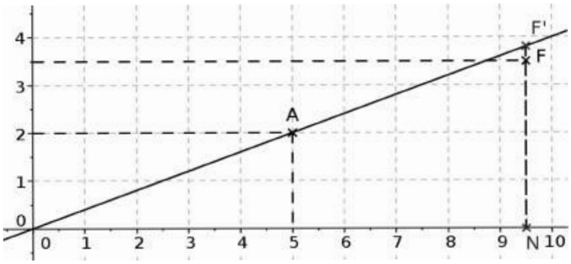
Tout d'abord, « si les points sont alignés alors les dimensions sont proportionnelles » : dans un repère où est placé le point A de coordonnées (5 ; 2), les élèves doivent placer le point d'abscisse 10 aligné avec O et A. Ils calculent son ordonnée en utilisant la propriété de Thalès et donc vérifient qu'il y a bien proportionnalité.



Pour la deuxième conjecture (« si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles »), les élèves rajoutent sur le graphique le point F de coordonnées (9,5 ; 3,5) qui n'est pas aligné avec O et A.

Le professeur leur fait alors considérer le point F' d'abscisse 9,5, aligné avec O et A et leur demande de calculer F'N.

$\dfrac{2}{FN'} = \dfrac{5}{9{,}5}$ donc F'N = 3,8 cm et donc $\dfrac{5}{9{,}5} \neq \dfrac{2}{3{,}5}$, il n'y a pas proportionnalité.



Pour terminer, les élèves doivent vérifier les résultats obtenus avec les rectangles empilés.

Le professeur leur demande de placer les dimensions des « bons » rectangles dans un tableau.

Ils cherchent alors à savoir si c'est un tableau de proportionnalité : le but est maintenant de mettre l'accent sur la proportionnalité « largeur-longueur » de tous les « bons » rectangles avec des coefficients (2,5 ou 0,4) qui ne dépendent cette fois que du rectangle (A).

Le professeur fait remarquer que le rapport de proportionnalité de ce tableau n'est pas le même que celui qui a été utilisé pour le théorème de Thalès. Les notions de coefficient directeur, de pente peuvent être évoquées !

Au final, dans cette situation, deux résultats essentiels sont dégagés, qui seront présentés aux élèves à l'aide d'exemples et que nous formulons ci-dessous pour le professeur.

x et y étant les dimensions du rectangle initial, x' et y' celles du rectangle agrandi :

1) si les points sont alignés alors $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ et si les points ne sont pas alignés alors $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$;

2) $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ équivaut à $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Ce dernier résultat, qui peut être démontré, sera aussi très utile pour la leçon sur le cosinus !
Tout est également en place pour caractériser graphiquement la proportionnalité en général.

Le lecteur pourra lire la suite de cet article avec **la deuxième partie, la propriété de Thalès**, et la **troisième partie, le parcours**, dans l'article intégral en ligne sur le site de l'APMEP.

Dans **la deuxième partie, la propriété de Thalès**, nous présentons un enchaînement de trois situations dont les objectifs sont de faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès, pour la première (sur une idée de l'Irem de Marseille), d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction pour la deuxième, et enfin, d'initier la forme classique de la propriété avec l'égalité des rapports, pour la troisième.
Des travaux d'élèves montrent la véritable activité mathématique induite par ces trois situations qui donnent du sens à la configuration ainsi qu'à la propriété dans son ensemble.

La troisième partie aborde, en guise de conclusion, **le parcours** tel que nous le proposons. L'imbrication des situations présentées dans les deux premières parties ainsi qu'avec d'autres moments d'études indispensables y est expliquée et justifiée, leur complémentarité mise en évidence.
Voici ce parcours sous forme synthétique.

Premier trimestre	Procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle
	Théorèmes relatifs aux milieux des côtés d'un triangle
Deuxième trimestre	Agrandissement d'une photo, situations 1 et 2
	Agrandissements et réductions de figures en général
	La propriété de Thalès, situations 1 et 2
	La propriété de Thalès, situation 3
Troisième trimestre	Agrandissement d'une photo, situation 3

Nous invitons donc le lecteur intéressé à se reporter à l'article intégral pour bien appréhender le parcours dans son ensemble et en mesurer ainsi pleinement l'intérêt.