Les olympiades internationales

Dans ce texte, nous donnerons d'abord un aperçu de la nature et du déroulement des Olympiades Internationales de Mathématiques, puis nous détaillerons le mode de préparation et de sélection de l'équipe de France.

1. Bref historique et déroulement de la compétition

Divers pays, notamment en Europe de l'Est, organisent depuis longtemps des compétitions de mathématiques. Ainsi, la compétition Eotvos en Hongrie fut créée en 1894. En 1959, la Roumanie invita la Hongrie, la Bulgarie, la Pologne, la Tchécoslovaquie, la RDA et l'URSS à participer aux premières Olympiades Internationales. Lorsque la France concourut pour la première fois en 1967, seuls 13 pays prenaient part à la compétition. Depuis, le nombre de pays participants ne cessa d'augmenter pour atteindre une centaine depuis quelques années.

La compétition se déroule de la manière suivante : chaque pays envoie une délégation d'au plus six élèves de moins de 20 ans n'ayant pas commencé leurs études supérieures. Les épreuves consistent en deux séances de 4 heures et demie comportant chacune trois problèmes notés sur 7 points. Voici trois exemples d'énoncés :

OIM 2013, problème 4. *Soit* ABC *un triangle d'orthocentre* H *dont tous les angle sont aigus ; soit* W *un point du côté* BC, *compris strictement entre* B *et* C. *Les points* M *et* N *sont, respectivement, les pieds des hauteurs issues de* B *et de* C. *On note* ω_1 *le cercle circonscrit au triangle* BWN *et* X *le point de* ω_1 *tel que* [WX] *soit un diamètre. De la même façon, on note* ω_2 *le cercle circonscrit au triangle* CWM *et* Y *le point de* ω_2 *tel que* [WY] *en soit un diamètre. Montrer que les points* X, Y *et* H *sont alignés.*

OIM 2012, problème 2. *Soit* $n \geq 3$ *un entier et soit* $a_2, a_3, \ldots, a_n$ *des nombres réels strictement positifs tels que* $a_2\, a_3 \ldots a_n = 1$*.Montrer que*

$$\left(1+a_2\right)^2\left(1+a_3\right)^3\ldots\left(1+a_n\right)^n > n^n.$$

OIM 1988, problème 6. *Soient* a *et* b *des entiers naturels tels que* $ab + 1$ *divise* $a^2 + b^2$. *Montrer que* $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ *est le carré d'un entier.*

À titre indicatif, le premier problème est considéré comme l'un des plus « faciles » de ces dix dernières années, le deuxième est de difficulté intermédiaire[(1)] et le troisième est particulièrement difficile[(2)]. Ils ont été résolus respectivement par

(1) Une démarche possible consiste à établir d'abord que sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \to (1 + x)^n/x$ n'atteint son minimum $n^n/(n-1)^{n-1}$ qu'en $x = 1/(n-1)$.

(2). Indication : posons $n = \dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$, trouver un entier naturel $c < a$ tel $n = \dfrac{b^2+c^2}{bc+1}$.

environ 73%, 30% et 4% des candidats.

À l'issue de la compétition, 1/12 des participants reçoivent une médaille d'or, 2/12 une médaille d'argent et 3/12 une médaille de bronze.

Sur les 31 médaillés de l'équipe de France entre 1995 et 2004, un peu plus de la moitié sont devenus des mathématiciens professionnels ou souhaitent le devenir, quelques-uns poursuivent une carrière de recherche dans un autre domaine (physique, informatique, ...), d'autres travaillent dans le privé dans des domaines tels que l'informatique, l'ingénierie ou la finance…

Parallèlement au classement individuel, il est établi un classement officieux par équipes. Les pays régulièrement classés parmi les cinq premiers sont : la Chine, la Russie, les États-Unis et la Corée du Sud. Parmi les autres pays performants on peut citer plusieurs pays d'Asie tels que la Corée du Nord, Singapour, la Thaïlande, le Japon, le Vietnam, Taïwan, la Turquie et l'Iran. Longtemps sur le devant de la scène internationale, les pays d'Europe de l'Est comme la Bulgarie (dans les cinq premiers entre 1998 et 2004, et au-delà de la 19e place depuis 2009) accusent une régression depuis une ou deux décennies, mis à part la Roumanie qui se maintient régulièrement dans les dix premiers.

Parmi les pays d'Europe de l'Ouest, indiquons le classement médian de quelques pays depuis les cinq dernières années : Allemagne (16), Royaume-Uni (20), Italie (20), France (34), Espagne (48).

Il est évident que le classement d'un pays ne reflète pas le niveau moyen des élèves scolarisés dans l'enseignement secondaire, mais plutôt

- le niveau des élèves les plus performants ;
- l'efficacité des méthodes de repérage des élèves ayant le plus de potentiel ;
- l'efficacité de la formation donnée à ces derniers, et notamment de la préparation à la compétition.

Nous détaillerons plus bas la manière dont la France et quelques autres pays procèdent en ce qui concerne ces deux derniers points.

Mentionnons également qu'il existe de nombreuses autres compétitions du même type. La France participe à deux d'entres elles cette année, à savoir les Olympiades Européennes pour Filles (EGMO) et les Olympiades Balkaniques Juniors (réservées aux élèves de moins de 15,5 ans).

2. Le repérage et la préparation olympique dans quelques pays performants

2.1. Aux États-Unis.

Environ 1000 00 élèves scolarisés au plus en classe de « 12th grade » (l'équivalent de la Terminale) à la compétition AMC 12 (il y a aussi des compétitions AMC 10 et AMC 8). L'épreuve consiste en un QCM de 25 questions à résoudre en 75 minutes, dont les premières questions sont simples, mais les dernières sont assez difficiles.

Les élèves qui sont dans le top 5% de l'AMC 12 ou le top 2.5 % de l'AMC 10 participent au test AIME. Environ 20 000 élèves y prennent part chaque année. Ce test se déroule en 3 heures, et comporte 15 questions ayant toutes comme réponse un entier compris entre 0 et 999 ; aucune démonstration n'est demandée.

Ensuite, environ 270 élèves sont sélectionnés pour participer à l'USAMO, qui est une compétition analogue à l'OIM. Le choix des élèves autorisés à s'y inscrire est basé sur une moyenne pondérée entre le score à l'AMC 12 et l'AIME.

Enfin, les lauréats de l'USAMO sont préparés intensivement lors du « Mathematical Olympiad Summer Program » (stage d'été accueillant quelques dizaines d'élèves répartis en plusieurs niveaux) et certains d'entre eux représentent les États¬Unis à l'OIM.

2.2. Au Royaume-Uni.

Plus proches de nous, le Royaume-Uni affiche de bons résultats en appliquant des principes analogues :

– Sélection pyramidale en plusieurs étapes, commençant par des épreuves à forte participation ;
– Le repérage des élèves commence de l'ordre de trois ans avant la fin des études secondaires ;
– Quelques dizaines d'élèves parmi les plus brillants reçoivent une préparation intensive.

L'UKMT (United Kingdom Mathematics Trust) est la fondation qui organise l'ensemble du processus de sélection et de préparation. Elle dispose d'importants moyens financiers principalement grâce aux compétitions payantes attirant un grand nombre de participants, et d'importants moyens humains grâce à un fort investissement de nombreux volontaires (professeurs du secondaire, étudiants).

2.3. Des explications pour les résultats décevants de la France ?

La préparation de l'équipe de France aux Olympiades Internationales, du moins lors des étapes finales, ne diffère pas substantiellement de celle des autres pays, cependant nous souffrons d'un certain nombre de handicaps :

– Absence de sélection pyramidale analogue à celles des États-Unis ou du Royaume-Uni. Le concours des Olympiades académiques, attirant 20 000 candidats en fin de Première, pourrait constituer une première étape de sélection mais vient un peu tard ; il manquerait une compétition de grande ampleur destinée aux élèves de Seconde qui serait suivie d'une deuxième puis d'une troisième étape.
– Manque de structures destinées aux meilleurs élèves en mathématiques (lycées d'excellence ou clubs de mathématiques comme dans les pays d'Europe de l'Est).
– La géométrie synthétique a petit à petit disparu de l'enseignement au lycée : transformations géométriques (homothéties, similitudes), barycentres, géométrie du triangle, …
– Sans oublier les différences importantes de nature entre un problème olympique et un problème standard pour lycéens français.

3. Public concerné et objectifs visés par la préparation olympique en France

Même si au final seuls six élèves par an sont sélectionnés pour les Olympiades Internationales, un public plus large est susceptible de s'intéresser aux problèmes de type olympique.

En effet, les programmes de l'enseignement secondaire sont conçus pour convenir à la majorité de la population, mais sont insuffisants pour satisfaire les très bons élèves de fin de collège ou de lycée qui sont alors amenés à rechercher des activités mathématiques ou scientifiques périscolaires.

Les activités olympiques concernent plus particulièrement les élèves qui s'intéressent aux compétitions possédant les caractéristiques suivantes :

- énoncés de problèmes non standard, très différents de ce dont les élèves ont l'habitude ;
- nécessité de présenter une solution écrite et rédigée.

De par leur nature, les exercices olympiques ne sont accessibles qu'à une petite élite, représentant au plus quelques élèves de chaque établissement. Soulignons cependant que des élèves exceptionnels proviennent régulièrement de tous les horizons, tant du point de vue géographique que social, et pas seulement des grands lycées.

4. Activités de l'OFM (Olympiade française de mathématiques)

L'OFM, entité composée d'un petit groupe de personnes, a été intégrée à l'association Animath en fin 2013. L'un de ses buts est de sélectionner et former des équipes représentant la France dans des compétitions internationales, actuellement :

- OIM Olympiades Internationales de Mathématiques,
- EGMO European Girls' Mathematical Olympiad,
- JBMO Junior Balkan Mathematical Olympiad.

Les activités de l'OFM comprennent :

- un test d'entrée en début octobre, sélectionnant une centaine d'élèves entre la Quatrième environ et la Terminale ; les critères de sélection varient suivant la classe de l'élève et son sexe.
- six envois mensuels de problèmes à chercher, qui sont corrigés et renvoyés aux élèves par la poste ; un stage de 5 jours pendant les vacances d'hiver, concernant au plus une quarantaine d'élèves sélectionnés ;
- des tests permettant de déterminer la composition des équipes qui représenteront la France dans les diverses compétitions ;

– éventuellement un court stage pour les six élèves de l'équipe de France la semaine précédant le départ à l'OIM.

Ces activités reposent essentiellement sur le bénévolat d'une équipe d'encadrants qui préparent les sujets, corrigent les copies, animent les stages et accompagnent les élèves lors des compétitions.

Le programme officiel des compétitions internationales est relativement réduit. Par exemple, les problèmes doivent pouvoir être résolus sans nécessiter aucune connaissance en analyse, en probabilités, en géométrie analytique, ou sur les nombres complexes. La qualité qui est mesurée lors des compétitions est surtout celle du « problem solving » : capacité à trouver en une ou quelques heures une solution à un problème d'énoncé court et original, voire déroutant, et nécessitant de l'astuce et de l'imagination.

En revanche, les thèmes des problèmes olympiques sont pour la plupart très peu présents dans l'enseignement secondaire français : géométrie synthétique du triangle, combinatoire, inégalités, … L'arithmétique figure tout de même au programme de spécialité de Terminale S, mais apparaît trop tard dans le cursus et de manière trop succincte pour permettre aux élèves d'être performants dans ce domaine.

Ceci explique que même les tout meilleurs élèves restent souvent totalement démunis la première fois qu'ils sont confrontés à un problème d'Olympiades. C'est pourquoi la préparation olympique nécessite une formation d'une ou plusieurs années, en parallèle du cursus scolaire, afin

- d'acquérir les notions de base pour commencer à chercher et résoudre quelques problèmes ;
- d'apprendre à rédiger des solutions relativement complexes ;
- d'approfondir ensuite ses connaissances autour des thèmes olympiques afin d'acquérir de l'aisance et du recul sur ces notions.

Ainsi, la préparation olympique permet aux élèves, non seulement d'être performants dans les compétitions, mais aussi

- d'apprendre des mathématiques intéressantes ne figurant pas au programme de l'enseignement secondaire ;
- de se préparer aux études supérieures en apprenant à chercher et rédiger des solutions de problèmes difficiles ;
- d'éveiller et entretenir son désir de s'orienter vers une carrière scientifique ;
- de rencontrer d'autres élèves ayant le même profil et se sentir moins isolé. Créer une émulation et un esprit d'équipe.

L'objectif des médailles dans les compétitions n'est donc pas un but en soi, bien qu'il ne soit pas non plus à négliger car il permet de motiver les élèves et aussi de mesurer l'efficacité de la formation olympique.

5. Les stages olympiques

Animath propose en outre deux stages :

(1) un stage de 10 jours pendant l'été, pour une soixantaine d'élèves sortant d'une classe comprise entre la Quatrième et la Première ;

(2) un stage de 5 jours à la Toussaint pour une quarantaine d'élèves entre le début de la Quatrième et le début de la Seconde.

Pour le stage de la Toussaint, réservé aux Juniors, la sélection s'effectue sur dossier. La réussite à diverses compétitions (Olympiades Académiques de quatrième, FFJM, test d'entrée à l'OFM, Kangourou) est un élément important d'appréciation.

Le stage d'été attire plusieurs centaines de candidats, ce qui nécessite une sélection par un test en début Juin – qui devient à partir de cette année une compétition, la « Coupe Animath ».

Lors de ces stages, les élèves sont répartis en plusieurs groupes de niveau. Cela permet

- aux débutants de découvrir les mathématiques olympiques et, s'il s'avère qu'ils souhaitent s'y investir plus, de mieux se préparer au test d'entrée à l'OFM ;
- aux avancés d'approfondir leurs connaissances.

Les effectifs des groupes débutants et des groupes avancés sont comparables. En outre, on veille à ce que le stage comporte un nombre suffisant de filles (afin de promouvoir les carrières scientifiques chez les femmes, la préparation des compétitions pour filles étant un outil pour les motiver). Des moyens permettant d'admettre des stagiaires provenant d'origines géographiques les plus diverses possibles sont en cours de réflexion.

En plus des activités olympiques, il est prévu un ou plusieurs exposés sur un domaine de recherche, afin de montrer aux élèves que les mathématiques ne se limitent pas au monde olympique et leur faire apercevoir des perspectives plus larges.

6. Le repérage des élèves et le lien avec d'autres compétitions nationales

Les activités olympiques restent encore trop peu connues en France : les tests de sélection et la Coupe Animath que nous organisons peinent à recueillir plus de quelques centaines de candidatures par an ; on rencontre régulièrement des lauréats au Concours Général qui n'ont jamais entendu parler des Olympiades Internationales.

Les concours tels que le Kangourou et les Olympiades Académiques, dont le taux de participation est relativement élevé, constituent de bons moyens de repérer les élèves ayant des capacités très au-dessus de la moyenne. Les lauréats de ces concours sont généralement ceux qui sont les plus à même de s'intéresser aux mathématiques olympiques et de profiter de notre offre de formation. Cependant, les épreuves de ces concours sont conçues pour un public relativement large de bons élèves en mathématiques, et donc restent d'un niveau bien moins élevé que les énoncés d'olympiades internationales et demeurent relativement proches du programme scolaire français. C'est pourquoi les lauréats dont les coordonnées nous sont communiquées sont contactés et vivement encouragés à participer

– à la Coupe Animath,
– au test d'entrée à l'OFM en octobre, qui sont des concours destinés à un public plus restreint.

Les professeurs peuvent également jouer un rôle essentiel dans le processus de repérage en transmettant à leurs meilleurs élèves l'information sur les diverses activités périscolaires existantes et en les encourageant à participer à nos tests de sélection et à la Coupe Animath.

7. Pour plus d'information

Site officiel des Olympiades Internationales (anciens sujets et scores des participants) : http://www.imo-official.org/

Animath : http://www.animath.fr