bulletin de l'association des

professeurs de mathématiques

de l'enseignement public

“de la Maternelle aux Facultés”

Connecteurs logiques • Des cours d'arithmétique • La continuité • Expérience en Quatrième • RAPPORT DE LA COMMISSION MINISTÉRIELLE • Programmes pour les classes élémentaires • Vive Euclide ! • Les collègues écrivent • L'Assemblée générale

bimestriel - 46e année - mai-septembre 1967

n° 258

caractérise les anneaux factoriels. Mais les désavantages de cet ordre sont qu'il est nettement moins économique que celui du § 2, que certaines démonstrations dans la théorie (*c*) du *pgcd* et du *ppcm* y sont un peu subtiles (encore plus subtiles si on utilise la variante ci-dessus), que l'existence du *pgcd* et du *ppcm* y est séparée de leur calcul à partir de décompositions en facteurs premiers, et qu'enfin la finitude des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'y est pas utilisée (ce qui prive les élèves d'occasions de mieux comprendre les propriétés des ensembles finis).

Que peut-on maintenant conclure de cette discussion ? L'ordre du § 3, avec la démonstration de E. Zermelo, paraît un peu inférieur aux deux autres. Quant à ceux-ci, la simplicité du premier me paraît équilibrer la généralité du dernier ; le choix entre eux dépendra donc des préférences du professeur, de son tempérament, du niveau et de l'état d'esprit de ses élèves.

P. S.

Rotations normales, déplacements et orientations d'un plan métrique

Claude FRASNAY,

Faculté des Sciences de Toulouse.

Sommaire. — Dans une structure G-métrique plane (au sens de G. Choquet), le fait qu'une symétrie ne soit pas un déplacement constitue un théorème essentiel, qui ne résulte pas trivialement des axiomes de cette structure. Pour démontrer ce théorème, on peut effectuer au préalable une bipartition de l'ensemble des rotations normales. Une telle bipartition montre d'ailleurs immédiatement l'existence d'une double orientation du plan.

1. *Définition d'une G-métrique plane.*

1.1. Etant donné un groupe totalement ordonné G, une *G-métrique* sur un ensemble E est définie par une application d de $E \times E$ dans G vérifiant les trois conditions : $d(M, N) = 0 \iff M = N$, $d(M, N) = d(N, M)$, $d(M, N) \leqslant d(M, P) + d(P, N)$.

a) La notion d'*isométrie* entre deux espaces G-métriques D, F est évidente, et le cas F = G (muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$) permet d'introduire les *G-droites* D (supportant chacune deux droites ordonnées opposées) ainsi que les *segments* [M, N] de ces droites.

b) L'espace G-métrique E est *réglé* s'il contient, avec deux points distincts quelconques, une droite et une seule passant par ces points. On dit que E est *pliable* autour d'un sous-espace F s'il existe une partition (F, F_1, F_2) de E et une isométrie σ de $F \cup F_1$ sur $F \cup F_2$ vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} M \in F \implies \sigma(M) = M, \\ M_1 \in F_1 \text{ et } M_2 \in F_2 \implies F \text{ rencontre } [M_1, M_2]. \end{cases}$$

L'axiomatique de la géométrie plane prend alors une forme condensée :

DÉFINITION. — Un *G-plan* est un espace G-métrique réglé pliable autour de chacune de ses droites.

1.2. Diverses études ont été consacrées aux structures G-métriques planes par G. Choquet (1) (2) (3) et par nous-même (4) (5), jusqu'aux points de rencontre avec d'autres axiomatiques.

On sait que les pliages d'un plan E se prolongent en des isométries involutives de E : les *symétries* [D] autour des droites D de E. Les *perpendiculaires* à D sont les droites $D' \neq D$ invariantes par [D], ce qu'on note $D' \perp D$: on démontre alors $D \perp D'$ et, pour $\{A\} = D \cap D'$, on constate que la *transposition* $\theta = (A)$ (où A est milieu de $[M, \theta(M)]$ se décompose en $\theta = [D]\,[D']$.

2. *Groupe des déplacements, rotations normales d'un plan.*

Notons $\mathcal{G}$ le groupe des isométries d'un G-plan E.

2.1. Lorsque l'homomorphisme $x \longmapsto 2x$ de G est surjectif (ce qu'on supposera), on montre facilement que toute isométrie $\sigma \in \mathcal{G}$ se décompose en un produit de n symétries (qu'on peut réduire à $n \leqslant 3$). Dès que n est pair, on dit que σ est un *déplacement* de E.

Il est clair que les déplacements de E constituent un sous-groupe invariant $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}$. Nous nous proposons d'établir le théorème fondamental concernant ce groupe, à savoir : $\mathcal{D} \neq \mathcal{G}$ (corollairement, $\mathcal{G} : \mathcal{D} = 2$ pour l'indice du sous-groupe $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}$). Pour une droite D de E, le théorème revient à montrer que la symétrie [D] n'est pas un déplacement.

2.2. Dans un *repère* $\rho = (\Delta_1, \Delta_2)$ (couple de droites ordonnées de supports D_1, D_2 perpendiculaires), d'origine A, de bissectrice D_o, les points $M \in E$ prennent (par projection sur D_1, D_2) des *coordonnées* $x = \rho_1(M)$, $y = \rho_2(M)$.

Les trois déplacements

$$\sigma_o = (A) = [D_2]\,[D_1], \quad \sigma_1 = [D_o]\,[D_1], \quad \sigma_2 = [D_o]\,[D_2] = \sigma_1^{-1}$$

donnent alors des images $\sigma_i(M)$ de coordonnées respectives $(-x, -y)$, $(-y, x)$, $(y, -x)$.

Appelons *rotation normale* de centre A toute isométrie $\sigma \in \mathcal{G}$ telle que $\sigma^2 = (A)$. Dès lors, A est le seul point invariant par σ, et toute droite D passant par A admet une image $\sigma(D) \perp D$ (5). En utilisant l'unicité de l'isométrie transformant un repère ρ en un repère ρ', il en résulte : $\sigma = \sigma_1$ ou $\sigma = \sigma_2$ (et σ_1 apparaît comme l'unique rotation normale de centre A transformant Δ_1 en Δ_2).

Plus généralement, on appelle *rotation* de centre A tout déplacement σ de E tel que $\sigma(A) = A$. En notant $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations de E, et $\mathcal{R}_o$ l'ensemble des rotations normales de E, il est clair que :

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{G} \text{ et } \sigma \in \mathcal{R} & \Longrightarrow \quad \varphi\sigma\varphi^{-1} \in \mathcal{R} \\ \varphi \in \mathcal{G} \text{ et } \sigma \in \mathcal{R}_o & \Longrightarrow \quad \varphi\sigma\varphi^{-1} \in \mathcal{R}_o \end{cases}$$

2.3. Soit T l'ensemble des $(A, B, C) \in E^3$ tels que A, B, C ne soient pas alignés. A chaque *triangle* $(A, B, C) \in T$, on peut associer une rotation normale, de la façon suivante :

Soit $\rho = (\Delta_1, \Delta_2)$ l'unique repère d'origine A vérifiant les conditions $\rho_1(B) > 0$, $\rho_2(B) = 0$, $\rho_2(C) > 0$. Nous notons alors $\sigma = (ABC)$ la rotation normale de centre A transformant Δ_1 en Δ_2.

Si (A', B', C') est l'image du triangle (A, B, C) par une isométrie $\varphi \in \mathcal{G}$, alors : $\varphi\,(ABC)\,\varphi^{-1} = (A'\,B'\,C')$. Pour cette rotation normale $\sigma = (A'B'C')$, on pourra naturellement justifier d'autres notations $\sigma = (A'\,B''\,C'')$ (selon une règle facile à énoncer dès que A', B', B'' sont alignés). Par exemple :

Si Δ'_1 désigne la droite ordonnée de support AC pour laquelle $A < C$, et D la bissectrice de (Δ_1, Δ'_1), on obtient :

$$(ACB) = [D]\,(ABC)\,[D] = (ABC)^{-1}.$$

2.4. Si $\mathcal{D}_A$ désigne le groupe des rotations de centre A, la suite de l'exposé montrera que $\mathcal{D}_A$ est abélien. Mais, pour l'instant, seuls sont accessibles des cas particuliers de commutation.

Voici l'un de ces cas :

Lemme. — *Si* $\sigma \in \mathcal{D}_A$ *est une rotation normale, et si* $\theta \in \mathcal{D}_A$ *est un produit de trois transpositions, alors* $\sigma\theta = \theta\sigma$.

Pour ces transpositions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (et $\theta = \theta_3\,\theta_2\,\theta_1$), soit :

$$\theta_1(A) = B, \quad \theta_2(B) = C, \quad \theta_3(C) = A.$$

Il suffit d'examiner l'une $\sigma = (AMN)$ des deux rotations normales de centre A.

a) Si A, B, C appartiennent à un segment S d'une droite D, prenons $M \in D - S$, $N \notin D$. Dès lors : $\theta_1\,(AMN)\,\theta_1 = (BMN)$ et (de même) : $\theta_2\,(BMN)\,\theta_2 = (CMN)$, $\theta_3\,(CMN)\,\theta_3 = (AMN)$.

b) Si A, B, C ne sont pas alignés, prenons $M = B$, $N = C$. Alors : $\theta_1\,(ABC)\,\theta_1 = (BAC)^{-1} = (BCA)$ et (de même) :

$$\theta_2(BCA)\,\theta_2 = (CAB), \quad \theta_3\,(CAB)\,\theta_3 = (ABC).$$

Dans les deux cas, on obtient bien : $\theta\sigma\theta = \sigma$.

3. *Bipartition de* $\mathcal{R}_o$*, orientations du plan.*

Pour deux rotations σ (de centre A) et σ' (de centre B), soit $r(\sigma, \sigma')$ la relation binaire de base $\mathcal{R}$ définie par la condition : « Il existe une transposition θ telle que $\sigma' = \theta\sigma\theta$ » (cette transposition est alors unique, puisque son centre est le milieu de [A, B]).

La réflexivité et la symétrie de la relation r sont évidentes, mais (pour l'instant) nous ne pouvons pas affirmer qu'elle est transitive.

3.1. Notons r_0 la restriction de r ayant pour base l'ensemble $\mathcal{R}_0$ des rotations normales du plan E.

Proposition. — *La relation $r_0(\sigma, \sigma')$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{R}_0$, partageant cet ensemble en deux classes $\mathcal{R}_0^+, \mathcal{R}_0^-$, telles que :*

$$\sigma \in \mathcal{R}_0^+ \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{R}_0^- .$$

La transitivité de r_0 résulte en effet du lemme de commutation démontré en 2.4. Par ailleurs, si A, B sont les centres de deux rotations normales σ, σ', et θ la transposition ayant pour centre le milieu de [A, B], il est clair que $\theta\,\sigma'\,\theta$ vaut σ ou σ^{-1}. Et lorsque A = B, $\theta\,\sigma'\,\theta = \sigma$ implique (puisque $\sigma^2 = \theta$) : $\sigma' = \sigma^5 = \theta^2\sigma = \sigma$. D'où effectivement deux classes, qu'on note arbitrairement $\mathcal{R}_0^+$ et $\mathcal{R}_0^-$.

3.2. Appelons *quaterne* de E tout $(A, B, C, D) \in E^4$ comprenant deux triangles $(A, B, C) \in T$ et $(A, B, D) \in T$ tels que la droite AB rencontre le segment [C, D].

Une *orientation* du plan E est alors une application ε de T dans $\{1, -1\}$ vérifiant, pour tout quaterne (A, B, C, D) de E, les conditions :

$\varepsilon(A, B, C) = -\varepsilon(A, C, B) = \varepsilon(B, C, A) = -\varepsilon(A, B, D)$.

On voit facilement qu'il existe au plus deux orientations de E, nécessairement opposées. Et l'*existence* de cette double orientation du plan s'obtient en associant à tout triangle $t = (A, B, C)$ la rotation normale $\sigma = (ABC)$ définie en 2.3.

D'après la propositon 3.1. et certaines remarques faites en 2.3. et 2.4., il suffit en effet de poser : $\varepsilon(t) = 1$ si $\sigma \in \mathcal{R}_0^+$, $\varepsilon(t) = -1$ si $\sigma \in \mathcal{R}_0^-$.

4. *Bipartition de l'ensemble des isométries d'un plan.*

Pour deux rotations normales σ, σ' vérifiant la relation r_0, notons simplement : $\sigma \equiv \sigma'$. Cette équivalence implique : $\varphi\,\sigma\,\varphi^{-1} \equiv \varphi\,\sigma'\,\varphi^{-1}$ pour toute isométrie φ de E (puisque, si θ est une transposition, il en est de même de $\varphi\,\theta\,\varphi^{-1}$). Dès lors, si une rotation normale σ vérifie $\varphi\,\sigma\,\varphi^{-1} \equiv \sigma$, toute rotation normale σ' vérifie $\varphi\,\sigma'\,\varphi^{-1} \equiv \sigma'$, ce qui rend cohérente la définition suivante :

Définition. — Une isométrie $\varphi \in \mathcal{I}$ est dite *paire* si $\varphi\,\sigma\,\varphi^{-1} \equiv \sigma$ pour une rotation normale σ de E. Elle est dite *impaire* si $\varphi\,\sigma\,\varphi^{-1} \equiv \sigma^{-1}$.

Le produit de deux isométries toutes deux paires (ou toutes deux impaires) est une isométrie paire. Par ailleurs, toute symétrie [D] est une isométrie impaire, puisque $[D]\,\sigma[D] = \sigma^{-1}$ pour les rotations normales σ de centre $A \in D$. Ainsi, le groupe des isométries paires coïncide avec le groupe $\mathcal{D}$ des déplacements, et $[D] \notin \mathcal{D}$ (ce qui démontre le *théorème fondamental* sur $\mathcal{D}$).

Si $\varphi(t) = (A', B', C')$ est l'image d'un triangle $t = (A, B, C)$ par une isométrie φ, les rotations normales associées vérifient : $(A'B'C') = \varphi\,(ABC)\,\varphi^{-1}$. Par conséquent :

Proposition. — *Soit ε l'une des deux orientations du plan E. Pour tout triangle $t \in T$ et toute isométrie $\varphi \in \mathcal{I}$: $\varepsilon(\varphi(t)) = \varepsilon(t)$ si φ est paire, $\varepsilon(\varphi(t)) = -\varepsilon(t)$ si φ est impaire.*

5. *Groupe des rotations de centre A, angles de rotation.*

5.1. Pour $A \in E$, soit $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des isométries impaires φ telles que $\varphi(A) = A$: cet ensemble $\mathcal{S}_A$ est constitué par les symétries $\varphi = [D]$ telles que $A \in D$. Pour trois symétries $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de $\mathcal{S}_A$, il en résulte :

$$\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3 = \varphi_3\,\varphi_2\,\varphi_1 .$$

Comme toute rotation $\sigma \in \mathcal{D}_A$ est de la forme $\sigma = \varphi_2\,\varphi_1$ (pour $\varphi_1 \in \mathcal{S}_A$, $\varphi_2 \in \mathcal{S}_A$), on en déduit classiquement :

Proposition. — *Le groupe $\mathcal{D}_A$ des rotations de centre A est abélien.*

5.2. Le lemme de commutation énoncé en 2.4. s'étend alors à toute rotation $\sigma \in \mathcal{D}_A$, ce qui assure la transitivité de la relation binaire $r(\sigma, \sigma')$ sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations du plan. Pour cette relation d'équivalence r, la classe $\widehat{\sigma}$ d'une rotation $\sigma \in \mathcal{R}$ est l'*angle* de σ. Lorsque σ_1, σ_2 sont deux rotations de même centre, il est clair que : $\widehat{\sigma_1} = \widehat{\sigma_2} \implies \sigma_1 = \sigma_2$.

Si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des angles de rotation, et si σ parcourt $\mathcal{D}_A$, la bijection $\sigma \longmapsto \widehat{\sigma}$ de $\mathcal{D}_A$ sur $\mathcal{A}$ permet de transporter sur $\mathcal{A}$ une opération de groupe abélien (qu'il est d'usage de noter additivement). La classe 0 (*angle nul*) se réduit à la rotation identique 1_E, et les transpositions de E constituent une classe π (*angle plat*). Les classes des rotations normales sont les deux *angles droits* $\delta = \mathcal{R}_0^+$, $-\delta = \mathcal{R}_0^-$.

Si les supports de deux droites ordonnées Δ_1, Δ_2 se rencontrent en A, on peut introduire la rotation $\sigma \in \mathcal{D}_A$ transformant Δ_1 en Δ_2. L'angle de σ se note alors $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$, de sorte que : $\widehat{(\Delta, \Delta)} = 0$ et $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \pi$ pour deux droites ordonnées opposées Δ, Δ'.

Si deux rotations σ, σ' ont même angle, il en est encore ainsi pour les rotations $\varphi\,\sigma\,\varphi^{-1}$, $\varphi\,\sigma'\,\varphi^{-1}$, quelle que soit l'isométrie φ. Par ailleurs : $[D]\,\sigma\,[D] = \sigma^{-1}$ pour toute rotation σ de centre $A \in D$. Il en résulte qu'une symétrie [D] transforme tout angle $\alpha = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ en l'angle opposé $\alpha' = \widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)} = -\alpha$ et, plus généralement :

Proposition. — *Pour une isométrie φ transformant un angle $\alpha = \widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ en un angle $\alpha' = \widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)}$: $\alpha' = \alpha$ si φ est paire, $\alpha' = -\alpha$ si φ est impaire.*

On pourrait poursuivre cette étude, valable pour un plan G-métrique quelconque (euclidien ou non euclidien).

C. F.

Références

(1) G. Choquet, Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, chapitre V de *L'enseignement des Mathématiques*, Delachaux et Niestlé (1955).

(2) G. Choquet, Une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 209-213 (1960).

(3) G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann (1964).

(4) C. Frasnay, Un développement de la géométrie plane élémentaire (des axiomes à la mesure des angles et au produit segmentaire), *Alger-Mathématiques* (déc. 1959).

(5) C. Frasnay, Deux structures équivalentes pour la géométrie plane, *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 223 (1962).

(6) J. Lelong-Ferrand, Les axiomes de la géométrie élémentaire, chapitre XII de la *Géométrie différentielle*, Masson (1963).

Sur l'enseignement de l'analyse : la continuité

J. Siros,

Mathématiques Supérieures, Louis-le-Grand.

Dans une récente conférence à la Régionale de Paris, A. Revuz a montré qu'il est possible d'introduire « tôt et progressivement » des notions réputées difficiles, par exemple : fonctions *en escalier*, *linéaires par morceaux*, et leurs relations par *dérivation* et *intégration*. Sans les simplifier, Revuz a montré qu'elles étaient simples. L'élève de Seconde (par exemple) peut assimiler cela, il n'aura pas à corriger ces notions, si loin qu'il aille plus tard en Mathématiques.

Je ne sais si les mots soulignés se liront un jour dans le texte d'un programme de Seconde, mais, aujourd'hui, le professeur qui les ferait inscrire sur les cahiers de ses élèves serait sans doute mal vu. Cela montre que les dépassements du programme n'ont pas pour but d'assommer les élèves, mais au contraire d'introduire plus de clarté dans le programme lui-même, tout strict qu'il soit (grandeurs proportionnelles, variation d'une grandeur).

On peut se proposer, avant d'aborder l'idée de dérivation, d'éclaircir et de préciser celle de continuité. Car si la dérivation d'une application est en échec parce qu'il y a échec préalable de la continuité, il est ridicule de poser le problème de la dérivation. Comme il y a deux sortes de continuité : en un point, ... uniforme, on peut se demander si le caractère de plus grande difficulté accordé par habitude à la seconde est justifié, et regarder ce qu'on fait au juste quand on précise la continuité en un point.

Nous allons montrer que la seconde est aussi primitive (sinon plus) et aussi simple (sinon plus) que la première.

1. Un exemple instructif est celui de *la continuité du sinus*.

On commence habituellement par observer que $|\sin x| < |x|$, d'où continuité au point zéro et, par la formule qui transforme $\sin(x + h) - \sin x$, on passe au point x grâce au fait que le cosinus est borné. Cela, c'est de la continuité uniforme, exactement.