Réflexions sur la notion d'antisymétrie d'une rélation binaire dans un ensemble

par J. Y. BRETON - P. COMPAGNON - M. HERAULT - R. PERROT - R. SEROUX, Professeurs de Mathématique au Lycée Technique de REZE-les-NANTES

I — *Diagramme sagittal*

Nous poserons *à priori* qu'une relation $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble E est antisymétrique si et seulement si dans son diagramme sagittal ne figure aucun "aller et retour" entre deux éléments distincts.

II — *Définitions formelles*

Après consultation d'un certain nombre d'ouvrages, six formes de la définition de l'antisymétrie d'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E ont retenu notre attention :

D_1 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)\ [(x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } y\ \mathcal{R}\ x) \Rightarrow x = y]$

Remarque. C'est cette définition qui est la plus couramment utilisée.

D_2 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)\ [(x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } y\ \mathcal{R}\ x)$ et $x \neq y$ sont contradictoires]

D_3 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)\ [(x \neq y) \Rightarrow \text{non}(x\ \mathcal{R}\ y) \text{ ou } \text{non}(y\ \mathcal{R}\ x)]$

Remarque. C'est la définition donnée dans "Chantiers de pédagogie mathématique" de la Régionale parisienne de l'A.P.M.

D_4 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)\ [(x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \text{non}(y\ \mathcal{R}\ x)]$

Remarque. Cette définition est proposée dans les fiches de l'A.P.M. "La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent".

D_5 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)$ [$x\ \mathcal{R}\ y$, $y\ \mathcal{R}\ x$ et $x \neq y$ ne sont pas simultanément vraies]

Remarque. Cette définition est utilisée dans le livre de Terminale C de C. Pair (Collection Cossart-Théron).

D_6 $(\forall x \in E), (\forall y \in E)\,[(x\ \mathfrak{R}\ y \text{ et } y\ \mathfrak{R}\ x) \Leftrightarrow x = y]$

Remarque. C'est la définition du livre de seconde de Queysanne et Revuz.

III — *Commentaires*

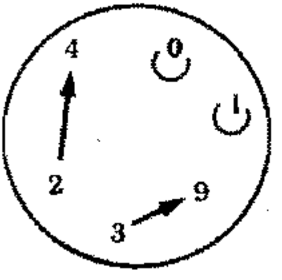
A. *D'un point de vue logique*

1 — Nous écarterons d'emblée la définition D_6 car elle suppose que l'antisymétrie implique la réflexivité, ce que n'impose pas notre définition initiale (diagramme sagittal).

Exemple

$\mathfrak{R}$: "*a pour carré*" dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$

Cette relation est, pour nous, antisymétrique sans être réflexive ! !



2 — D_1 et D_3 sont équivalentes puisque l'une est la contraposée de l'autre.

3 — D_2 se décompose en :

$$\left.(x\ \mathfrak{R}\ y \text{ et } y\ \mathfrak{R}\ x) \Rightarrow \underbrace{\text{non}(x \neq y)}_{x = y}\right\}\ \text{définition } D_1$$

et

$$\left.(x \neq y) \Rightarrow \underbrace{\text{non}(x\ \mathfrak{R}\ y \text{ et } y\ \mathfrak{R}\ x)}_{\text{non}(x\ \mathfrak{R}\ y) \text{ ou non}(y\ \mathfrak{R}\ x)}\right\}\ \text{définition } D_3$$

D_2 est donc équivalente à $D_1 \wedge D_3$ ce qui, en tenant compte du fait que D_1 est équivalente à D_3, entraîne l'équivalence de D_1, de D_2 et de D_3.

4 — Si nous désignons par P_1 la proposition $x\ \mathfrak{R}\ y$, P_2 la

proposition y $\mathcal{R}$ x, P_3 la proposition $x \neq y$, nous avons les tables de vérité suivantes :

					D_1			D_4
P_1	P_2	P_3	$P_1 \wedge P_2$	non P_3	$(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow$ non P_3	$P_1 \wedge P_3$	non P_2	$(P_1 \wedge P_3) \Rightarrow$ non P_2
1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Il est alors clair que D_1 est équivalente à D_4.

5 — D_5 se décompose en :

$$\left.\begin{array}{r}(x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } y\ \mathcal{R}\ x) \Rightarrow \underbrace{\text{non}(x \neq y)}_{x\,=\,y}\end{array}\right\}\ \text{définition } D_1$$

et

$$(x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \text{non}(y\ \mathcal{R}\ x) \qquad \text{définition } D_4$$

D_5 est donc équivalente à $D_1 \wedge D_4$, mais puisque D_1 est équivalente à D_4, alors D_1, D_4, D_5 sont équivalentes.

Les cinq premières définitions sont donc logiquement équivalentes.

B. *D'un point de vue pédagogique* (niveau seconde)

1 — Nous écarterons D_1 et D_2 car pour la relation < dans R les deux hypothèses $x < y$ et $y < x$ n'étant pas simultanément vraies, les élèves hésitent à conclure.

2 — Nous écarterons également D_4 car pour la relation = dans R, la même difficulté se présente.

3 — La définition D_3 comportant deux négations est, pour les élèves, difficile à manier sur les exemples.

Dans ces conditions, nous adopterons la définition D_5 :

Une relation binaire $\mathfrak{R}$ *définie dans un ensemble* **E** *est antisymétrique si et seulement si :*

$\forall \ (x,y) \in E^2 \quad x \ \mathfrak{R} \ y, \ y \ \mathfrak{R} \ x, \ x \neq y$ *ne sont pas simultanément vraies.*

Dès lors, il est clair qu'avec cette définition les relations $=$ et $<$ dans **R** sont toutes deux antisymétriques.