Matériaux pour une Histoire des Mathématiques : Les chemins du paradis (*)

par Jean CHEVRIER

Ce paradis, bien sûr, est celui auquel fait allusion David HILBERT (1862 - 1943) quand, en 1899, il écrit dans la préface des Grundlagen der Geometrie :

> *"Du paradis que Georg CANTOR (1845 - 1918) créa pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser".*

Par sa lucidité et sa profondeur, cette oeuvre de HILBERT devient en quelque sorte une charte de l'axiomatique moderne. Avec une logique implacable HILBERT illustre la proclamation de CANTOR dans sa publication révolutionnaire, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeit (Leipzig, 1883) :

> *"La mathématique est entièrement libre dans son développement et ses concepts ne sont liés que par la nécessité d'être non contradictoires aux concepts antérieurement introduits par des définitions précises".*

Cette proclamation conduira plus tard Bertrand RUSSEL (1872 - 1969) à déclarer dans son "Introduction to Mathematical Philosophy" (1920) :

> *"La logique est la jeunesse des mathématiques, et les mathématiques sont l'âge mûr de la logique".*

Au cours des quelques pas que nous allons faire sur ces chemins du paradis qui, bien souvent, ne furent que des sentiers à peine tracés, nous suivrons les efforts que depuis des millénaires, logiciens et mathématiciens déployèrent pour trouver des solutions satisfaisantes à deux problèmes intimement liés, celui de l'infini et celui de la continuité.

Dans sa lettre à SCHUMACHER (1780 - 1850), le Prince des mathématiciens, Karl Friedrich GAUSS (1777 - 1835), écrivait en 1831 :

> *"Je proteste contre l'emploi d'une grandeur infinie comme achevée — infini actuel — ; ce n'est jamais permis en mathé-*

(*) Conférence faite à la Régionale de Lyon, le 9 mai 1973, et publiée dans le Bulletin n° 10 de la Régionale A.P.M. de Lyon.

matiques. **L'infini n'est qu'une façon de parler** *(en français dans le texte). Le sens réel étant une limite dont certains rapports s'approchent indéfiniment, tandis qu'il est permis à d'autres de croître sans restriction* ".

Ce à quoi CANTOR réplique en 1885 — GAUSS était mort en 1853 ("Zum Problem des aktualen Unendlichen) :

"*En dépit de la différence essentielle entre les concepts de l'infini potentiel et de l'infini actuel, le premier désignant une grandeur variable pouvant croître au-delà de toute limite, tandis que le second est une quantité fixe, constante au-delà de toutes les grandeurs finies, il arrive trop souvent que l'on confonde l'un avec l'autre, en raison d'abord d'une aversion justifiable pour de tels infinis illégitimement actuels, de l'influence ensuite de la tendance moderne quelque peu épicurienne et matérialiste ; une certaine "horror infiniti" s'est développée dans un grand nombre de cercles scientifiques, tendance qui a trouvé son expression classique dans la lettre de GAUSS à SCHUMACHER ; il me semble pourtant que le rejet pur et simple de l'infini légitimement actuel n'est rien moins qu'une violation de la nature des choses, que nous devons prendre comme elles sont*".

C'était peut-être aussi le sentiment de DESCARTES (1596 - 1650) quand il écrivait à CHEVALIER :

"*Or je dis que la notion que j'ai de l'infini est en moi avant celle du fini.*"

Opinion aujourd'hui très discutable puisque le cinquième des axiomes du système proposé pour la théorie des ensembles par ZERMELO (1871 - 1953), en 1908, dans

"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre"

système complété, en 1922, par A. FRAENKEL, dans

"Zu den Grundlagen des Cantor - Zermeloschen Mengenlehre"

est :

Il existe un ensemble infini

Bien que les Grundlagen de HILBERT aient aujourd'hui quelque peu vieilli, disons cependant quelques mots de cette "robuste" construction.

"Pensons trois différents systèmes de choses :

Les choses du premier système sont appelées *points.*

Les choses du second système sont appelées *droites.*

Les choses du troisième système sont appelées *plans.*

Les points s'appellent aussi les éléments de la *géométrie linéaire*, les points et les droites ceux de la *géométrie plane*, les points, les droites et les plans ceux de la *géométrie dans l'espace*".

Pour *construire* la géométrie, HILBERT a besoin de vingt axiomes répartis en cinq groupes :

8 axiomes de coïncidence	4 axiomes d'ordre
5 axiomes de congruence	1 axiome des parallèles

2 axiomes de continuité

Si l'on en croit la petite histoire, HILBERT aurait dit :

"*On pourrait d'ailleurs remplacer les mots* points, droites *et* plans *par* tables, chaises *et* chopes *sans rien changer à cette géométrie*".

Autrement dit, les noms mêmes des éléments de base d'une théorie mathématique peuvent être choisis à volonté pourvu qu'ils n'impliquent pas de contradictions.

D'ALEMBERT (1717 - 1783) avait sans doute déjà pensé de même en écrivant dans l'article "Définition" de l'Encyclopédie :

"*On peut donner aux mots tels sens que l'on veut : on pourrait faire à la rigueur des éléments de géométrie exacts, mais ridicules, en appelant triangle ce que l'on appelle ordinairement cercle.*"

On doit donc ranger d'ALEMBERT et HILBERT dans le camp des *formalistes* qui s'opposera, et parfois, comme nous le verrons, avec une extrême violence, à celui des *intuitionnistes* qui, eux, n'accordent l'existence à un "objet" que dans la mesure où l'on est capable de le "construire".

Cette distinction entre *formalistes* et *intuitionnistes* n'est pas récente : elle opposa il y a plus de vingt siècles deux écoles célèbres, celle de l'Académie à Athènes et celle de Cyzique, petit port sur les rivages de la Mer de Marmara.

La première, celle des formalistes, fut fondée vers 387 avant J.C. par PLATON (428 ? - 347 ? Av. J.C.). Le premier scoliarque, une sorte de recteur désigné par le fondateur, fut son neveu SPEUSIPPE (395 - 334 Av. J.C.), fils de la soeur POTOME de PLATON.

SPEUSIPPE dirigea l'Académie de 347 à 339 Av. J.C. Il accompagna son oncle lors du troisième voyage que celui-ci fit à Syracuse et qui faillit mal tourner pour le philosophe : vers 428 il fut en effet emprisonné sur l'ordre de DENYS le JEUNE, tyran de

Syracuse, pour avoir réclamé le retour de DION, exilé par le tyran ; PLATON aurait sans doute été exécuté sans l'intervention d'une lettre énergique du mathématicien ARCHYTAS, souverain de Tarente.

SPEUSIPPE s'intéressa à la *forme géométrique* de certains nombres entiers : se basant sur les travaux de PHILOLAEUS, un contemporain de SOCRATE et qui vécut au cinquième siècle avant J.C., il écrivit un livre traitant en particulier des nombres polygonaux (voir figure page suivante).

Pour SPEUSIPPE, le nombre parfait était 10, le *tetrakis* car ce nombre est la somme du point 1, de la ligne 2, du triangle 3 et de la pyramide 4.

Parmi les successeurs de SPEUSIPPE, élus selon la tradition par le Collège des Maîtres et des disciples, il convient de citer un élève d'ARCHYTAS, EUDOXE (408 - 335), surnommé le "renommé", car EUDOXE fut non seulement un mathématicien éminent, mais aussi un astronome, un géographe, un médecin et un orateur fort écouté. Entre autres travaux, on doit à EUDOXE :

— les éléments de la théorie des proportions qu'EUCLIDE devait plus tard codifier dans les livres V et VI de ses Eléments,
— la méthode d'exhaustion, nom assez malheureux dû à l'idée que les polygones inscrits et circonscrits à un cercle devaient en "épuiser" l'aire.

Les mathématiciens de l'Académie, comme SPEUSIPPE, se représentaient l'existence possible des objets de leur science indépendamment des modes d'accès que notre connaissance nous assure accidentellement jusqu'à eux, indépendamment aussi des procédés dont on pourrait disposer pour les construire.

Le philosophe RENOUVIER (1805 - 1903) caractérise très bien la doctrine de l'Académie lorsqu'il écrit :

> "*La morale et les mathématiques ont cela de commun que pour exister comme sciences elles doivent se fonder sur de purs concepts*". ("La science de la morale", 1869)

Au contraire, les positivistes de l'Ecole de Cyzique, fondée en cette ville par EUDOXE lorsqu'il eut quitté l'Académie, n'accordaient l'existence à un objet que dans la mesure où l'on était capable de le construire. Il faut donc que le mode d'accès de la connaissance soit effectivement assuré : au lieu de la contemplation platonicienne, la mathématique devient alors une science de l'action.

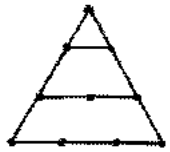
EUDOXE eut pour successeur **MENECHME** (375 - 325) à qui l'on attribue la réponse qu'il aurait faite à **ALEXANDRE** le **GRAND** :

"Oh Roi, si pour voyager il y a des routes royales, et d'autres pour le menu peuple, pour le géomètre, il n'y en a qu'une seule, la même pour tous."

EUCLIDE aurait lui aussi fait la même réponse, mais à **PTOLEMEE**.

Nombres polygonaux

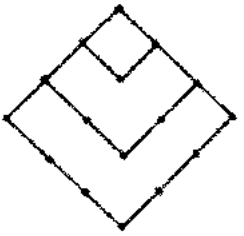
triangulaires



$t_n = 3(n - 1)$

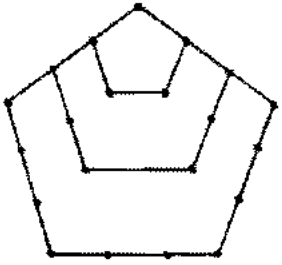
$T_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

carrés



$c_n = 4(n - 1)$ $\quad C_n = n^2$

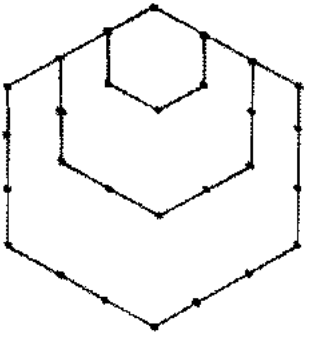
pentagonaux



$p_n = 5(n - 1)$

$P_n = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

hexagonaux



$h_n = 6(n - 1)$ $\quad H_n = \dfrac{n(4n - 2)}{2}$

k-gonaux

$k_n = k(n - 1)$

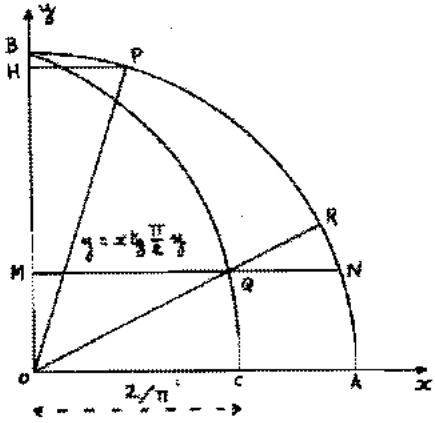
$K_n = \dfrac{(k - 2)n^2 - (k - 4n)}{2}$

k_n , k = 3, 4, 5, ... est le $n^{ième}$ nombre k-gonal défini par le nombre de points situés sur le périmètre du polygone régulier à k côtés.

K_n , k = 3, 4, 5, ... est le $n^{ième}$ nombre k-gonal défini par le nombre de points situés sur la surface fermée du polygone régulier à k côtés.

MENECHME eut pour frère un géomètre distingué, DINOSTRATE, qui, vers 330 Av. J.C., utilisa pour résoudre la quadrature du cercle par une construction géométrique une courbe imaginée aux environs de 420 par HIPPIAS d'ELIS pour résoudre un autre problème fameux : la trisection de l'angle.

QUADRATRICE de DINOSTRATE



$$\frac{\widehat{AR}}{AM} = \frac{\widehat{AP}}{OH} \rightarrow \widehat{AR} = \frac{OM}{OH}\widehat{AP}$$

$$\text{Si } \frac{OM}{OH} = \frac{1}{3}, \widehat{AR} = \frac{1}{3}\widehat{AP}$$

L'oeuvre la plus importante attribuée à MENECHME est la découverte et l'étude des coniques qu'il utilisa pour résoudre le troisième des problèmes fameux auxquels s'attaqua la mathématique grecque, le problème déliaque.

Ce que nous savons de ce problème, la duplication du cube, est dû à EUTOCIUS d'ASCALON (vers 560 Ap. J.C.), un

commentateur d'ARCHIMEDE, qui reproduit une lettre qu'ERATOSTHENE aurait écrite à PTOLEMEE, "aurait" car WILAMOWITZ a montré qu'une telle lettre n'avait pu être écrite par ERATOSTHENE (Ein WEIHGESCHENK des ERATOSTHENE, Un Cadeau d'ERATOSTHENE, 1894). Voici le texte de cette lettre :

> *"On raconte qu'un des anciens poètes tragiques grecs porta sur la scène MINOS qui avait fait construire un tombeau pour GLAUCOS. Quand il apprit que le tombeau mesurait cent pieds dans chacune de ses dimensions, il s'écria :*
> *"Vous avez construit une résidence royale trop petite : elle devrait être deux fois plus grande. Doublez vite chaque côté du tombeau sans en altérer la forme."*

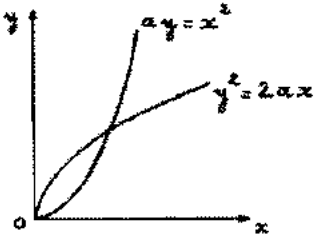
MINOS sembla avoir fait une erreur. Quand en effet les côtés eurent été doublés, la surface se trouva multipliée par quatre et le volume par huit. Les géomètres se mirent alors à étudier comment doubler un solide donné sans en changer la forme. Ce problème reçut le nom de *duplication* du cube car ils tentèrent d'abord de doubler le volume d'un cube. Après qu'ils eurent longtemps, mais en vain, cherché une solution, vers 420 Av. J.C., HIPPOCRATE de CHIOS (ne pas confondre avec le père de la médecine, HIPPOCRATE de COS) remarqua que si l'on pouvait insérer deux moyennes proportionnelles entre deux segments donnés tels que la longueur du plus grand soit double de celle du plus petit, on obtiendrait la duplication du cube. En effet :

> Si a et 2a sont les longueurs données, les moyennes proportionnelles cherchées x et y vérifient :
>
> $$a/x = x/y = y/2a \quad \text{ou} \quad x^2 = ay \quad \text{et} \quad y^2 = 2ax$$
> d'où en éliminant y : $x^3 = 2a^3$.

On passait ainsi d'une difficulté à une autre non moins considérable.

On rapporte ensuite, qu'à quelque temps de là, certains Déliens, auxquels un oracle avait imposé la tâche de doubler un cube, rencontrèrent donc la même difficulté. C'est pourquoi ils

envoyèrent des émissaires aux géomètres de l'Académie de Platon pour leur demander de trouver une solution. Ceux-ci se mirent à l'oeuvre en toute hâte pour résoudre le problème des moyennes proportionnelles. On dit qu'ARCHYTAS le résolut avec des demi-cylindres et EUXODE avec des lignes dites *courbes*..

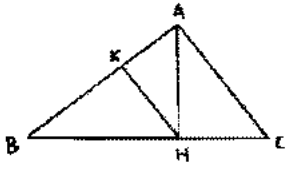


Comme *lignes courbes*, MENECHME utilisa les deux paraboles

$$x^2 = ay \quad \text{et} \quad y^2 = 2ax.$$

On doit au sauveur de PLATON, ARCHYTAS de Tarente, qui périt dans un naufrage, une solution tellement extraordinaire du problème des moyennes proportionnelles qu'on la pourrait attribuer à quelque inspiration divine.

Dans l'esprit d'ARCHYTAS dut se projeter la structure qu'il désirait construire, à savoir celle formée par les triangles rectangles ABC, HAB, KBH et les hauteurs issues des sommets des angles droits, soit AH et HK.



On a en effet :

$$BC : AB = AB : BH = BH : BK$$

D'où :

$$BC = \overline{AB}^2 : BH, \; BK = \overline{BH}^2 : AB$$

puis :

$$BC : BK = \overline{AB}^3 : \overline{BH}^3$$

Si alors $BC = 2 . BK$

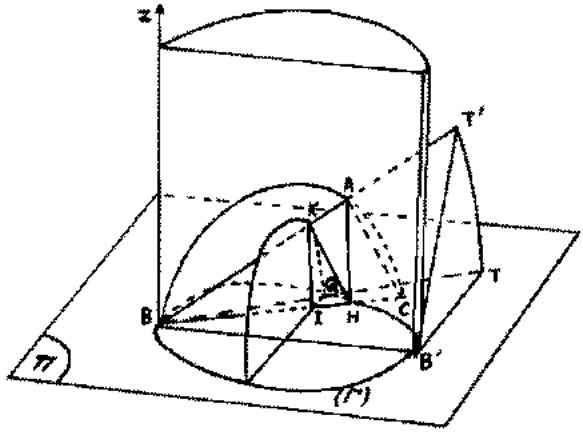
$$\overline{AB}^3 = 2 . \overline{BH}^3$$

Autrement dit, si BH est le côté du cube donné, AB est celui du cube de volume double.

L'insertion de moyennes proportionnelles entre deux segments donnés revient donc à déterminer le sommet A du triangle rectangle dont l'hypoténuse BC a pour longueur celle du plus grand des segments, triangle tel que BK ait pour longueur celle du plus petit de ces segments.

ARCHYTAS obtint le point A comme point commun :

DUPLICATION DU CUBE par ARCHYTAS



$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} = \frac{BH}{BK} \rightarrow \frac{BC}{BK} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{BH}^3}$$

Si $BC = 2\,BK$, $\overline{AB}^3 = 2\,\overline{BH}^3$

1) à un demi-cylindre droit dont la base dans le plan Π est un demi-cercle Γ de diamètre BC = BB′

2) à un demi-tore de diamètre interne nul obtenu par la rotation, autour d'un axe BZ normal en B au plan Π, d'un demi-cercle de diamètre BC situé dans un plan normal au plan Π

3) d'un cône de révolution autour de BB′, dont la génératrice est BT définie par le point de rencontre de la corde BD du cercle Γ telle que BD = BK avec la tangente en B′ à ce cercle.

Analytiquement, dans un système Oxyz défini par :

Ox suivant BB′ , Oy orthogonal , Oz normal au plan (Oxyz) , les trois surfaces utilisées ont respectivement pour équations :

$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2/b^2)x^2$ (1) pour le cône

$x^2 + y^2 = ax$ (2) pour le cylindre

$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (3) pour le tore

De (1) et (2), on déduit :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + y^2)^2/b^2$$

et à l'aide de (3) :

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}$$

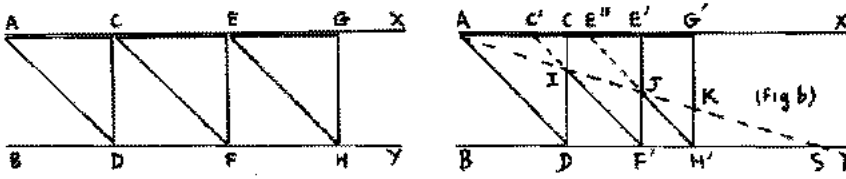
c'est-à-dire : a:BA = BA:AH = AH:b

et a:b = (AH:BD)³ ; en particulier si a = 2b, $\overline{AH}^3 = 2.\overline{BD}^3$

Une réalisation *mécanique* de la solution du problème des moyennes proportionnelles est due à ERATOSTHENE de Cyrène

(vers 230 Av. J.C.), célèbre surtout par la mesure d'un arc de méridien qu'il réalisa entre Alexandrie et Cyrène pour calculer une valeur de la circonférence terrestre ; il obtint 250 000 stades, soit en kilomètres 39 375 ou 52 500 suivant la valeur en mètres que l'on attribue au stade.

Il s'agit d'un châssis comprenant deux glissières parallèles, AX et BY, entre lesquelles on peut déplacer des triangles égaux, ACD, CEF, EGH.



ACD restant fixe, on fait glisser sous lui CEF pour l'amener en C'E'F', puis de même EGH sous C'E'F' en E''G''H'' de façon que les points A, I, J soient alignés.

Sur la figure (b), on voit facilement que :

$$SB:SD = SA:SI = SD:SF' \qquad SB:SD = AB:ID$$

$$SD:SF' = DI:JF' \quad \text{d'où :} \quad AB:ID = ID:JF' = JF':KH'$$

Dans sa vie de MARCELLUS, PLUTARQUE nous livre ce que les Platoniciens pensèrent de cette "mécanique" : lisons donc PLUTARQUE (Les vies des hommes illustres, La Pléïade, Vol. 1, page 679).

> *"Car cet art d'inventer et dresser instruments et engins qui s'appelle la mécanique ou organique* . . . . . .
>
> . . . . . .
>
> *depuis ce temps-là, dis-je, la mécanique ou art des ingénieurs vint à être séparée de la géométrie, et, étant longtemps tenue en mépris par les philosophes, devint l'un des arts militaires."*

Plus tard le poète et mathématicien iranien Omar KHAYAM (1044 - 1123), l'auteur des Rubayhat, dit avoir, lui aussi, résolu le problème déliaque à l'aide des sections coniques.

Cheminant sur les chemins du paradis, les Pythagoriciens pensaient bien l'avoir trouvé. PYTHAGORE, dont la vie assez mystérieuse se déroula entre 569 et 500 Av. J.C., prêchait que la nature, l'univers tout entier, est une *gamme numérique* ; toute chose, mathématique, physique, métaphysique (et même pataphysique, eût ajouté Alfred JARRY), repose sur le modèle "discret"

des nombres entiers et peut s'interpréter au moyen de ceux-ci, *un don de Dieu*, affirmation que, quelque 2500 ans plus tard, précisera Leopold KRONECKER (1823 - 1891) en écrivant, à propos des mathématiques :

> *"Dieu créa les nombres entiers ; tout le reste est oeuvre de l'homme."*

Dans une scholie du livre X d'EUCLIDE, on lit :

> *"Les Pythagoriciens furent les premiers à se consacrer à l'étude de l'incommensurabilité qu'ils avaient découverte comme résultat de leurs études sur les nombres ; tandis que l'unité est la commune mesure de tous les entiers, ils furent incapables de trouver une commune mesure de toutes les grandeurs car toutes les grandeurs sont divisibles à* l'infini *et ne laissent jamais une grandeur qui soit trop petite pour une division ultérieure, mais ce reste est également divisible à l'infini."*

Et le scholiaste ajoute :

> *"Le premier des Pythagoriciens qui rendit publics les résultats de ces recherches périt dans un naufrage."*

Il s'agit d'HIPPASUS de Métaponte (Vème siècle Av. J.C.), qui aurait été précipité à la mer pour avoir dévoilé, oh ! l'impie, aux ennemis du Maître la terrible découverte. On lui conserva cependant le crédit d'avoir découvert le dodécaèdre pentagonal (en inscrivant 12 pentagones dans la sphère), l'un des cinq polyèdres réguliers, appelés improprement platoniciens, car trois d'entre eux, le cube, l'octaèdre et ce dodécaèdre, ont été découverts par des Pythagoriciens.

Cet écroulement du paradis pythagoricien posait des problèmes nouveaux, celui de l'infini entre autres.

ZENON d'Elée (495 - 435 Av. J.C.) accroîtra le désarroi des philosophes en leur proposant ces paradoxes que, dans "Le cimetière marin", nous rappelle Paul VALERY :

> *ZENON, cruel ZENON, ZENON d'Elée*
> *M'as-tu percé de cette flèche ailée,*
> *Qui vibre, vole et qui ne vole pas.*
> *Le son m'enfante et la flèche me tue*
> *Ah le Soleil, quelle ombre de tortue*
> *Pour l'âme : ACHILLE immobile à grands pas.*

PLUTARQUE, dans la vie de Périclès, écrit :

"Périclès fut aussi quelque temps auditeur et disciple du philosophe Zénon, natif de la ville d'Elée, qui enseignait la philosophie naturelle comme Parménide ; mais il faisait profession de contredire à tout le monde et alléguer tant d'oppositions en disputant, qu'il rangeait son homme à ne savoir que répondre, ni a quoi se résoudre, ainsi comme Timon Phliasien le témoigne en ces vers :

Grande éloquence et grande force d'art
Pour disputer en l'une et l'autre part
Avait Zénon, reprenant tout le monde
Quand il voulait déployer sa faconde."

Le "cas" ZENON a fait couler beaucoup d'encre pour et contre. Désireux de consacrer la réhabilitation de ZENON, Bertrand RUSSELL écrivit, chapitre 42 de "La Philosophie du continu" (Principles of mathematics, Londres 1902) :

"Dans un monde capricieux, rien n'est plus capricieux que la gloire posthume. Une des victimes les plus notables du manque de jugement de la postérité est ZENON d'Elée."

Ayant trouvé quatre arguments immensément subtils et profonds, le gros des philosophes qui lui succédèrent déclarèrent que ZENON n'était qu'un bateleur ingénieux et qu'en tout en pour tout ses arguments n'étaient que des sophismes. Après deux mille ans de réfutations continuelles, ces sophismes ont été réintroduits, mais pour être la base d'une renaissance mathématique, grâce à un professeur allemand qui, probablement, ne jamais rêva d'une parenté quelconque entre ZENON et lui.

En bannissant strictement tous les infinitésimaux, WEIERSTRASZ montra finalement que nous vivons dans un monde immuable et que la flèche, à tout moment de son vol, est véritablement au repos. Le seul point où ZENON fit probablement erreur fut du conclure, si jamais il conclut, que puisqu'il n'y a pas de changement, alors le monde doit être dans le même état à n'importe quel instant. Cette conclusion n'est aucunement nécessaire et sur ce point le professeur allemand est plus "constructif" que le Grec subtil.

Les paradoxes de ZENON se divisent en deux classes : la première qui comprend la dichotomie et l'Achille concerne l'hypothèse que les grandeurs continues sont indéfiniment divisibles, tandis que la flèche et le stade qui sont dans la seconde

classe vont à l'encontre de l'hypothèse que ces grandeurs continues sont formées d'éléments indivisibles.

La dichotomie -- Le mouvement n'existe pas car tout mobile doit atteindre le milieu de sa course avant d'arriver à son terme, et naturellement il doit parcourir la moitié de la moitié avant d'atteindre le milieu et ainsi de suite indéfiniment.

L'Achille -- Le plus lent, la tortue, ne sera jamais rejoint par le plus rapide, Achille, car le poursuivant doit précisément atteindre d'abord le point d'où le poursuivi est parti, si bien que le plus lent doit toujours nécessairement précéder le plus rapide.

La flèche -- La flèche qui vole est en repos car si toute chose est au repos quand elle occupe un espace égal à elle-même, et que, en vol, à un instant donné, elle occupe toujours un espace égal à elle-même, la flèche ne peut se mouvoir.

Le stade veut prouver que la moitié d'un temps peut être égal au double de ce temps.

En résumé, ZENON s'est attaqué à trois problèmes : l'infinitésimal, l'infini et le continu. Depuis son époque jusqu'à la nôtre, les plus grands esprits de chaque génération ont chacun à leur tour étudié ces problèmes, mais à parler franchement sans aboutir à rien de définitif, car tandis que certains, il n'y a pas si longtemps, estimaient que la théorie positive de l'infini créée par CANTOR et celle des nombres irrationnels imaginée par WEIERSTRASZ et DEDEKIND (Was sind und was sollen die Zahlen, 1887), avaient résolu toutes les difficultés, d'autres soutenaient qu'il n'en était rien. C'est ainsi qu'HERMITE (1882 - 1901), qui en 1872 établit la transcendance de e (que LINDEMANN en 1882 étendit à celle de π, mettant ainsi un point final à la quadrature du cercle) écrivait :

> "*Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées*".

Allusion sans doute à cette fonction de WEIERSTRASZ :

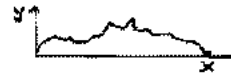
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi z)$$

pour $0 < a < 1$ et b entier impair, que du BOIS REYMOND publia en 1875 dans le Journal de CRELLE.

Sautons maintenant plusieurs siècles pour arriver au problème des cordes vibrantes qui souleva lui aussi de très vives controverses, qui ouvrirent la porte aux développements de FOURIER.

Moyennant certaines hypothèses simplificatrices, le mouvement d'un point d'une corde vibrante est régi par une équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



En 1747 d'ALEMBERT et EULER proposèrent une solution de la forme :

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires deux fois continument différentiables.

A la même époque, Daniel BERNOULLI proposait une autre solution, une somme infinie de termes trigonométriques, des sinus, dont les coefficients étaient ce que l'on appellera plus tard les coefficients de FOURIER, pour deux fonctions dont l'une donne la distribution des élongations y des points de la corde et l'autre celle des vitesses $\frac{\partial y}{\partial t}$ de ces points à l'instant initial.

BERNOULLI prétendait que "sa" solution impliquait celle d'EULER et de d'ALEMBERT, ce à quoi EULER en 1753 objecta que s'il en était ainsi, on pourrait développer en série de sinus, fonction impaire, une fonction quelconque qui n'est évidemment pas impaire.

En 1759, LAGRANGE (1738 - 1813) "*cette haute pyramide des sciences mathématiques*" selon le jugement de NAPOLEON, s'attaqua à ce paradoxe. Dans un mémoire remarquable

"*Sur la nature et la propagation du son*"

il considère d'abord la corde vibrante comme la limite d'un ensemble fini de masses ponctuelles régulièrement espacées sur une corde idéale sans masse. En admettant, dans le cas fini, une élongation et une vitesse initiales arbitraires pour chacune des masses, il obtint la solution sous la forme proposée par BERNOULLI, à savoir, la somme d'une suite finie de termes trigonométriques, mais sa conscience professionnelle fort élevée lui interdit de passer à la limite, manquant ainsi l'occasion de devancer FOURIER (1768 - 1830) en découvrant l'analyse harmonique.

Quelque cinquante ans plus tard, FOURIER *osa* en présentant en 1812 pour le grand prix de mathématiques de l'ACADEMIE des SCIENCES son mémoire :

La théorie analytique de la chaleur
que Lord KELVIN (1824 - 1907) considérait comme un

Splendide poème mathématique.

Le jury de l'Académie était formé des trois L : LAGRANGE, LAPLACE, LEGENDRE. Non sans raison, LAGRANGE convainquit ses confrères que le mémoire manquait de rigueur mathématique. FOURIER obtint cependant le prix, mais garda vis-à-vis de LAGRANGE une rancune tenace.

Ainsi, au début du XIXème siècle, les mathématiciens se demandaient :

"*Toute fonction d'une variable est-elle représentable par une somme infinie de termes trigonométriques ?* "

Force fut bien alors de s'apercevoir qu'on ne savait pas très exactement ce qu'était ni une fonction, ni une somme infinie, ni la représentabilité d'une fonction par la somme d'une série. Les paradoxes de ZENON sur l'infini n'étaient toujours pas, mathématiquement, résolus.

Dès 1638, cependant, GALILEE avait signalé une distinction remarquable entre le fini et l'infini. Dans les "Discorsi et dimonstrazion mathematiche interne due nuove scienze", parus à LEYDE, le Sage SALVATIUS démontre à SIMPLICIUS, que l'inquisition soupçonnait être une caricature du Pape de l'époque, que dans un ensemble infini la partie peut être égale au tout en établissant une correspondance biunivoque entre tout entier n et son carré n^2. Autrement dit une partie d'un ensemble infini peut avoir même puissance, même cardinal, que l'ensemble tout entier.

Arrivons aux portes de ce *paradis* que va créer Georg CANTOR.

Né en 1845 à Saint-Pétersbourg, CANTOR raconte qu'à dix-sept ans il aurait entendu une voix inconnue et mystérieuse qui l'appelait aux mathématiques, cependant que ses parents le voulaient faire ingénieur.

Attiré, séduit par la perfection des "Disquisitiones arithmeticae" (GAUSS 1801), CANTOR étudia d'abord la théorie des nombres. Subissant ensuite l'influence de WEIERSTRASZ, CANTOR, dans une série de mémoires, soumet à une analyse rigoureuse la question si controversée des séries trigonométriques. D'abord dans le Journal de CRELLE (1789 - 1885) fondé en 1826 :

1) Sur un théorème relatif aux séries trigonométriques (1870)

2) Unicité de la représentation par une série trigonométrique d'une fonction définie pour toute valeur réelle de x (1870)
3) Remarque sur le théorème précédent (1871)

Puis dans les Mathematisches Annalen :

4) Sur les séries trigonométriques (1871)
5) Sur l'extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques (1872)

C'est alors que, selon l'expression de H. WEYL, CANTOR *monte à l'assaut du ciel* en publiant dans ce même journal de CRELLE en 1874 :

"*Sur une propriété du concept de tous les nombres algébriques*" où il rejoint DEDEKIND en montrant que l'ensemble de tous les nombres algébriques a même puissance que celui des entiers, autrement dit est dénombrable.

Ce mémoire acheva de scandaliser KRONECKER, Directeur de la Publication, à ce point qu'il en vint à traiter CANTOR de Satan de la mathématique, de corrupteur de la jeunesse. C'est sans doute KRONECKER qui en 1877 mettait peu d'enthousiasme à publier un autre mémoire de CANTOR : "*Contribution à la théorie des multiplicités*", mémoire jugé par trop révolutionnaire puisqu'il établissait l'identité de puissance des continus à nombre quelconque de dimensions. Ce fut d'ailleurs le dernier mémoire que donna CANTOR à ce Journal de CRELLE.

De 1880 à 1883, CANTOR publia, soit aux Mathematische Annalen, soit aux Acta Mathematica que venait de fonder le mathématicien suédois MITTAG-LEFFLER, une série de mémoires qu'il rassembla sous le titre :

"*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitlehre*" Leipzig, Teubler 1883.

En 1872, passant sa lune de miel à Interlaken, CANTOR eut la chance d'y rencontrer DEDEKIND : ce fut bien une heureuse rencontre car DEDEKIND fut un des très rares mathématiciens de l'époque qui fit un effort sérieux, sympathique même, pour comprendre les propositions de CANTOR jugées alors subversives.

Cette rencontre donna lieu à l'échange d'une longue correspondance puisqu'elle s'étendit du 28 avril 1872 au 30 août 1899, année qui marqua la fin de la période productive de CANTOR, correspondance parfois pathétique qui fut d'abord publiée en allemand par E. NOETHER (1844 - 1921) et Jean CAVAILLES (1903 - 1944) (HERMANN, ASI, 518, 1939), puis traduites par

CAVAILLES in "Philosophie mathématique" (HERMANN, 1962).

Voici des extraits de deux lettres de cette correspondance. D'abord celle que CANTOR adressa le 25 juin 1877 à DEDEKIND :

"... *Mais comme je tiens avant tout à vous convaincre si possible de l'exactitude de mon théorème, savoir :*
A) Une multiplicité continue à e *dimensions peut être mise en correspondance univoque avec une multiplicité à une dimension, ou (ce qui n'est qu'une autre forme du même théorème) les points (éléments) d'une multiplicité à* r *dimensions peuvent se déterminer par une coordonnée réelle* t *de telle sorte que, à chaque valeur réelle de* t *dans l'intervalle (0 ... 1) corresponde un point de la multiplicité, mais aussi réciproquement, qu'à chaque point de la multiplicité corresponde une valeur déterminée de* t *dans l'intervalle (0 ... 1)*
je me permets de vous en soumettre une autre démonstration sur laquelle j'étais même tombé plus tôt que sur celle-là..."

Le 29 juin de la même année, CANTOR, revenant sur la proposition qu'il avait formulée dans sa lettre du 25, écrit :

"*Veuillez excuser mon zèle pour cette affaire si je fais appel tellement souvent à votre bonté et à votre peine : ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi-même si inattendu, si nouveau que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire :*

Je le vois, mais je ne le crois pas (en français dans le texte)

C'est pourquoi je vous prie de m'envoyer une carte postale pour me dire quand vous pourrez avoir terminé l'examen de la chose et si je peux compter sur vous pour exaucer ma demande certainement bien exigeante".

DEDEKIND répondit le 2 juillet :

"*J'ai examiné encore une fois votre démonstration et n'y ai pas trouvé de lacune. Je suis convaincu que votre intéressant théorème est exact et je vous en félicite.*
... mais vous êtes obligé d'introduire dans la correspondance une discontinuité, à donner le vertige, une discontinuité qui

réduit tout en atomes, telle que toute partie continument connexe, si petite qu'elle soit, de l'un des domaines a une image complètement déchirée, discontinue.
J'espère m'être expliqué assez clairement ; cette lettre n'a d'autre but que de vous prier de ne pas entreprendre publiquement des polémiques contre les articles de foi admis jusqu'à présent de la théorie des multiplicités avant d'avoir soumis mon objection à un examen approfondi."

Conseils de prudence, pressentiments peut-être de la polémique qu'allait déchaîner la théorie cantorienne des ensembles en raison des paradoxes que certains mathématiciens s'ingénièrent à formuler.

BURALI-FORTI (1861 - 1931), CANTOR lui-même, montrèrent en 1897 que l'on ne saurait, sans contradiction, parler de l'ensemble de tous les ensembles. En effet, si U désigne cet ensemble, l'ensemble $\mathcal{P}$ (U) des parties de U est un ensemble, donc un élément de U, et par suite cardinal de $\mathcal{P}$ (U) < cardinal de U.

Mais d'après un théorème démontré par CANTOR lui-même, cardinal de U < cardinal $\mathcal{P}$ (U), d'où contradiction.

En 1905, B. RUSSELL imagina le paradoxe du catalogue des catalogues, c'est-à-dire celui de l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Le paradoxe du Barbier de Séville eut réjoui ZENON :

Axiome I Tous les habitants de Séville doivent être rasés.
Axiome II Le barbier de Séville rase tous les habitants qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Ces deux axiomes rendent impossible l'existence du barbier.
Le paradoxe est levé par un troisième axiome.
Axiome III Le barbier n'habite pas Séville.

La crise provoquée par l'axiome de choix imaginé en 1904 par ZERMELO :

"Si $\{X_i\}$, $i \in I$, est une partition de l'ensemble X, il existe une partie Y de X telle que pour tout $i \in I$, $X_i \cap Y = \{a_i\}$."

Cette *innocente* proposition divisa les mathématiciens en deux clans ennemis : les formalistes d'une part qui, comme HILBERT, ZERMELO, FRAENKEL, von NEUMANN, acceptèrent l'axiome, tandis que les intuitionnistes tels POINCARE, BOREL, H. WEYL, et surtout BROUWER le repoussaient avec horreur.

En 1920, HILBERT et BROUWER en vinrent à échanger des propos que E.T. BELL qualifie de *robustes*.

> "*Que font WEYL, et BROUWER, clamait HILBERT, sinon d'emboîter le pas à KRONECKER* (1) *: ils tentent d'établir les fondations des mathématiques en jetant par-dessus bord tout ce qui ne leur convient pas, et décrètent sur le reste un embargo.*"

Dans son anxiété, HILBERT fit à ses adversaires, à l'intuitionnisme, une excellente publicité "involontaire" dont les charmes "macabres", écrit E.T. BELL, attirèrent bien des "clients".

HILBERT, donc, écrivait :

> "*Le résultat est de démembrer notre science, il fait courir le risque de perdre une grande partie de nos possessions les plus valables. WEYL et BROUWER condamnent les concepts généraux de nombres irrationnels, de fonctions — et même telles fonctions que l'on rencontre dans la théorie des nombres — les nombres transfinis de CANTOR, etc ..., le théorème fondamental en analyse qu'un ensemble infini d'entiers positifs possède un plus petit élément et même l'axiome du tiers exclu, comme par exemple cette proposition : ou bien il n'existe qu'un nombre fini d'entiers premiers, ou bien il en existe une infinité. Ce sont là des exemples de théorèmes ou modes de raisonnement interdits. Je crois que l'impuissance de KRONECKER à abolir les nombres irrationnels se retrouve aujourd'hui dans les efforts de WEYL et de BROUWER* (2)."

Et HILBERT affirme la victoire de ses partisans :

> "*Le programme de BROUWER n'est pas une révolution, mais seulement la répétition, avec de vieilles méthodes, d'un futile coup de main et ce qui avait été entrepris avec beaucoup de verve a maintenant totalement échoué. Aujourd'hui, grâce aux travaux de FREIGE, de DEDEKIND, de CANTOR,*

---

(1) LINDEMANN (1852 - 1939) ayant établi en 1882 la transcendance de π, KRONECKER lui objecta :
"*Que vaut donc votre belle démonstration puisque les nombres irrationnels n'existent pas ?*"

(2) WEYL avait d'ailleurs proclamé (Das Kontinuuk, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Leipzig 1918) :
"*La solidité du rocher sur lequel est bâtie la forteresse de l'Analyse est illusoire, une grande partie du château est essentiellement bâtie sur le sable.*"
C'est pourquoi WEYL, se souvenant de la parabole de l'Evangile, abandonna les formalistes et établit sa résidence chez les intuitionnistes, comme le firent d'autres mathématiciens distingués.

l'ETAT est soigneusement armé. Les efforts de BROUWER et de WEYL sont condamnés à la futilité."

E.T. BELL, cependant, ajoute :

"*Si ces travaux constituent la ligne SIEGFRIED des formalistes, leurs adversaires sont déjà surarmés.*"

A propos de cette "dispute", E.T. BELL écrit :

"*Le tumulte, les clameurs furent tels que les physiciens eux-mêmes en vinrent à suspendre leurs travaux pour y prêter l'oreille, non sans quelque appréhension.*"

EINSTEIN, rencontrant un collègue mathématicien, lui aurait demandé :

"*Quel est donc ce combat de souris et de grenouilles auquel se livrent les mathématiciens ?* "

Les mathématiciens n'avaient pas attendu l'ouverture des hostilités entre formalistes et intuitionnistes pour tenter de bâtir une axiomatique de la théorie des ensembles conservant l'essentiel des résultats obtenus par CANTOR tout en rendant impossible l'existence des ensembles paradoxaux.

En 1908, ZERMELO propose un système de neuf axiomes, dont le cinquième postule l'existence d'un ensemble infini (Untersuchuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre).

En 1925, von NEUMANN modifie le système précédent en introduisant la notion de classe, un ensemble devenant alors une classe particulière : l'axiomatique de von NEUMANN sera ensuite complétée par BERNAYS et GÖDEL dans les GRUNDLAGEN der MATHEMATIK.

Si ces axiomatiques éliminaient la plupart des antinomies qui avaient tant inquiété les mathématiciens au point que H. POINCARE écrivait :

"*Il n'y a pas d'infini actuel : les Cantoriens l'ont oublié et ils sont tombés dans la contradiction.*"

une question troublante demeurait sans réponse : l'hypothèse du continu.

CANTOR avait démontré que pour un ensemble E et pour l'ensemble $\mathcal{P}$ (E) de ses parties

$$\text{cardinal } E < \text{cardinal } \mathcal{P}(E) \text{ et cardinal } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{cardinal } E}$$

Il existe donc plusieurs types d'ensembles infinis ; on peut donc toujours trouver un ensemble infini plus *grand* que n'importe quel ensemble infini donné, en particulier

$$\text{cardinal } N < \text{cardinal } R \quad \text{ou} \quad \aleph_0 < \aleph_1$$

qui se lit : aleph zéro est inférieur à aleph un.

A la question : Existe-t-il un ensemble A compris entre N et R et tel que

$$\text{cardinal } N < \text{cardinal } A < \text{cardinal } R \text{ ?}$$

CANTOR crut pouvoir répondre par la négative : c'est l'hypothèse du continu ; sa forme la plus générale s'énonce :

Entre un cardinal $\aleph$ et le cardinal $2^{\aleph}$ de l'ensemble de ses parties, existe-t-il un cardinal α tel que

$$\aleph < \alpha < 2^{\aleph} \text{ ?}$$

Les travaux de Kurt GÖDEL, en particulier : "Consistengy-proof for the Generalised Continuum Hypothesis" (1939), qui utilisent l'axiomatique des classes de BERNAY, von NEUMANN, puis ceux de son élève Paul COHEN rassemblés dans "Set theory and the continuum hypothesis" (1966), montrent d'une part la consistance de l'hypothèse du continu et de l'axiome de choix, d'autre part l'indépendance de cette hypothèse et de cet axiome.

Il apparaît ainsi que, dans une axiomatique donnée, il peut exister des propositions *indécidables*, mais qui pourraient être établies (ou réfutées) dans un système plus fort faisant appel à des axiomes supplémentaires.

Cette indécidabilité menace-t-elle d'effondrement l'édifice de la mathématique ? Nullement si l'on fait confiance à la sagesse de Nicolas BOURBAKI.

On lit en effet dans ses "Eléments de Mathématique", livre I, page 9, ASI n° 1212, 3ème édition 1966 :

"*Depuis cinquante ans que l'on a formulé avec assez de précision les axiomes de la théorie des ensembles et qu'on s'est appliqué à en tirer des conséquences dans les domaines les plus variés des mathématiques, on n'a jamais rencontré de contradiction et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais.*" (Ce qui précède était écrit avant les derniers travaux de P. COHEN).

"*S'il en était autrement,* poursuit BOURBAKI, *c'est que la contradiction observée serait inhérente aux principes mêmes qu'on a admis à la base de la théorie des ensembles ; ceux-ci*

seraient donc à modifier sans compromettre si possible les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus ; il est clair qu'on y parviendrait d'autant plus facilement que l'usage de la méthode axiomatique et d'un langage formalisé aura permis de formuler plus distinctement ces principes et d'en séparer plus nettement les conséquences. C'est d'ailleurs à peu près ce qui s'est passé à une date récente lorsqu'on a éliminé les paradoxes de la théorie des ensembles par l'adoption d'un langage formalisé essentiellement équivalent à celui décrit ici : c'est une révision semblable qu'il faudrait entreprendre si ce dernier se révélait à son tour contradictoire.

En résumé, nous croyons que la mathématique est destinée à survivre et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée ; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie : cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité."