

Arithmétique à l'emporte-pièce*

par Daiyo SAWADA, Département de l'Éducation Élémentaire,
Université d'Alberta, Canada.

Traduit de l'anglais par Michèle LELARGE

L'automne dernier, dans l'espoir de trouver de nouvelles méthodes pour faire manipuler l'addition et la soustraction des naturels, je me mis à butiner parmi divers livres d'exercices de mathématiques au niveau élémentaire. Dans un texte de Lola May, je trouvai une activité au nom intéressant de "arithmétique à l'emporte-pièce". Le rapport de May sur cette activité indiquait qu'elle avait une grande puissance, aussi décidai-je que ça valait la peine d'essayer.

Le récit qui suit est tiré d'expériences faites avec diverses classes de trois niveaux différents : CM1 (9 ans), sixième (11 ans) et École Normale d'Instituteurs. Les aspects intéressants des différentes expériences sur ce sujet sont condensés ici sous forme d'une seule leçon, afin que le lecteur ait une idée des débouchés possibles de cette activité. Je suggérerais que l'"arithmétique à l'emporte-pièce" peut être utilisée efficacement à n'importe quel niveau au delà du CE2.

* Article paru dans le n° 67 de "Mathematics Teaching", bulletin de l'A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics, Grande-Bretagne).

Prenant la suggestion de May, je commençai par dire : "voici quelques-uns de mes nombres favoris" et j'écrivis, de *droite à gauche* avec le rétro-projecteur : 8 4 2 1 ; atteignant le 8, je m'arrêtai, le crayon planant au dessus de l'espace suivant, et regardai la classe d'un air interrogateur. Les élèves répondirent rapidement avec 16, puis 32, puis 64. Après les avoir félicités, je leur annonçai que j'allais utiliser mes nombres favoris d'une manière particulière pour fabriquer d'autres nombres. Ensuite, j'entrepris de "poinçonner" 7 de la manière suivante :

64	32	16	8	4	2	1		
				x	x	x	7	Lorsque je demandai
			x			x	9	"comment faire 9 ? ", les
			x	x	x		14	élèves n'éprouvèrent
								aucune difficulté à faire
								9, 14, 16 et plusieurs
								autres.

Je demandai "quelqu'un peut-il imaginer un nombre qu'on ne pourrait pas faire ?" Plusieurs nombres furent proposés, mais finalement, on trouva le moyen de les faire. Il apparut que tous les nombres pouvaient être fabriqués, jusqu'au moment où une fille proposa de faire 200. Cependant, presque aussitôt, la même fille suggéra d'ajouter 128 à la liste des nombres favoris. Personne ne s'y opposa et on put fabriquer 200.

Avant de continuer, il est peut-être préférable de réfléchir un moment sur la construction mathématique de l'"arithmétique à l'emporte-pièce" (AEP). Comme vous l'avez probablement remarqué, AEP est un système particulier de numération. En fait, si on remplace les x par des 1, et les espaces vides par des 0, alors l'aspect "base deux" de AEP devient évident.

$$111_{\text{deux}} = 7_{\text{dix}} \quad 1001_{\text{deux}} = 9_{\text{dix}}$$

C'est pourquoi, en plus de fournir des exercices pratiques d'addition et de soustraction, AEP peut être utilisé implicitement pour explorer les systèmes de numération dans d'autres bases. Un bon côté de AEP est qu'il fournit un mécanisme efficace et amusant pour traiter les autres bases sans devenir formel ni pédant (point faible de beaucoup d'approches des autres bases).

Afin de guider les élèves dans une exploration de la base trois (sans utiliser le mot de "base trois"), je demandai "quelqu'un peut-il imaginer un autre ensemble de nombres favoris?". Plusieurs ensembles furent proposés, que je nommai d'après le

nom de l'élève. En voici trois, et ce sont ceux-ci qui servent de base à la discussion.

John :	10	8	6	4	2	John, Mary et Kevin vinrent au tableau et chacun fit un tableau comme celui que j'avais utilisé. Les autres élèves demandèrent à John, Mary et Kevin de faire un nombre donné.
Mary :		27	9	3	1	
Kevin :		17	9	5	2	

Une discussion intéressante naquit lorsqu'on demanda à John de faire 7. John en fut incapable, mais dit ensuite qu'il avait simplement "oublié" de mettre un 1, ce que je lui permis de faire.

Ma décision rencontra l'objection immédiate d'un garçon qui fit remarquer que 1 est un nombre impair, alors que l'ensemble de John était l'ensemble des nombres pairs. Plus tard, le même garçon conclut que l'ensemble de John ne valait rien parce que 6 pouvait être obtenu de plusieurs façons !

L'ensemble de Mary était le "bon", dans la mesure où on voulait obtenir la base trois. En insistant sur celle-ci, j'espérais guider les élèves vers la convention que chaque élément de l'ensemble pourrait être utilisé une fois, deux fois ou pas du tout (les nombres 0, 1, 2 pour la base). Cependant, en laissant la liberté aux élèves pour construire les nombres avec l'ensemble de Mary, je vis apparaître une solution inattendue et plutôt ingénieuse.

$$\begin{array}{r}
 27 \quad 9 \quad 3 \quad 1 \\
 + \quad - \quad + \quad 7 \\
 + \quad + \quad - \quad 11 \\
 + \quad \quad - \quad + \quad 25
 \end{array}$$

On suggéra à Mary plusieurs nombres, et avec un peu d'aide de la part de ses camarades, elle put fabriquer tous les nombres avec des + et des -.

C'était donc un grand jour pour la petite fille qui suggéra de faire 7 en ajoutant 9 et 1 et en retranchant 3.

Bien que je fusse fort tenté de pousser l'aspect "base trois", je décidai de laisser cette situation à son agréable sort, et m'intéressai à l'ensemble de Kevin. Comme la méthode avec des + et des - était encore fraîche à leur esprit, les élèves l'essayèrent.

$$\begin{array}{r}
 17 \quad 9 \quad 5 \quad 2 \\
 \quad \quad + \quad + \quad 7 \\
 \quad \quad + \quad \quad \quad 9 \\
 + \quad \quad - \quad - \quad 10 \\
 \quad \quad + \quad + \quad + \quad 16
 \end{array}$$

La classe buta sur le nombre 18. Ils décidèrent finalement que 18 ne pouvait pas être fabriqué si on n'ajoutait pas 1 à l'ensemble de Kevin.

La classe fut très amusée de découvrir que personne ne s'était encore aperçu qu'on ne pouvait pas

fabriquer 1 avec l'ensemble de Kevin tel qu'il était à l'origine (mais cette conclusion est-elle vraie ?).

Un aspect intéressant de l'ensemble de Kevin était que personne ne put voir d'abord comment Kevin avait obtenu ses nombres favoris (et ceci peut les avoir empêchés de faire 18) si bien que Kevin nous dit qu'il avait tout simplement ajouté 1 à chacun des nombres favoris de son professeur (remarque : en fait il manque un 3). Je laisse au lecteur le soin d'obtenir 18 avec ce nouvel indice.

Plusieurs autres ensembles de nombres favoris furent suggérés et explorés mais aucun ne conduisit à des résultats inattendus.

Les idées suivantes pourraient conduire à des activités supplémentaires intéressantes (je ne les ai pas encore essayées).

1. Peut-on utiliser les + et les - avec l'ensemble du professeur ?
2. Etait-il nécessaire d'ajouter 1 à l'ensemble de Kevin ?
3. Si on ajoute le 1 à l'ensemble de Kevin, le signe - sera-t-il indispensable ?
4. Que se passe-t-il si on utilise les puissances de 4 comme nombres favoris ?
5. Peut-on utiliser les nombres triangulaires (1, 3, 6, 10, ...) comme nombres favoris ? Les signes + et - vont-ils marcher ? La représentation sera-t-elle unique ?
6. Et les carrés comme nombres favoris ? Peut-on utiliser les + et les - ? Peut-on faire tous les nombres impairs ?
7. Que se passe-t-il avec les chiffres romains comme nombres favoris ?