# 1

# ÉTUDES

## Les réels et la calculatrice :
### Une récurrence rebelle au calcul numérique

*par Daniel SAADA, Lycée de Rambouillet*

Parmi les problèmes que soulève l'étude des suites, intéressons-nous à celui qui consiste à calculer, de façon exacte ou approchée, tel ou tel terme de rang donné.

Plusieurs obstacles peuvent entraver cette tâche :

*Un volume de calcul rédhibitoire :* appelons $\pi_n$ le nombre d'entiers premiers inférieurs à $n$ . Pour $n = 10^9$ , j'ai relevé dans trois ouvrages :

50847543 ; 50847534 ; 50847479

Déterminer soi-même le nombre véridique est certes facile, mais extrêmement long.

*Un nombre de mémoires insuffisant :* l'écart moyen $e_n$ des $n$ premiers termes d'une suite $(u_n)$ est défini par :

$$e_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |u_i - \overline{u}_n| \qquad \text{avec} \qquad \overline{u}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$$

A priori, le calcul automatique des $e_n$ nécessite la mise en mémoire préalable de chaque $u_i$ , $i \leqslant n$ . On est donc vite limité si on possède un petit instrument de calcul.

*Des dépassements de capacité :* la probabilité d'obtenir $n$ piles et $n$ faces en jetant $(2n)$ pièces est $p_n = C_{2n}^{n}/4^n$ ; $p_{500}$ est le quotient de 2 entiers incalculables par la machine. La formule de Stirling et le passage aux logarithmes fournissent $p_{500} = 2{,}5\ \%$ , qui n'est pas négligeable.

*Des erreurs d'arrondis :* toute machine à calculer ne manipule que des décimaux de longueur bornée. Un irrationnel ou un rationnel de période longue sera inévitablement tronqué ou arrondi. Une machine arrondissant à 10 chiffres affichera $\pi = 3{,}141\ 592\ 654$, commettant une erreur de $4{,}1 \times 10^{-10}$. Pour $x$ très grand, en radians, $\sin(\pi x)$ sera imprécis : sur ma machine, $\sin(10^9 \pi) = 0{,}4$ au lieu de 0.

A cela, deux remèdes : calculer en degrés, ou, si $x$ est trop grand, le réduire modulo 2.

Autre exemple : le nombre de surjections d'un ensemble à $n$ éléments sur un ensemble à $p$ éléments est :

$$S(n,p) = (-1)^p \sum_{i=1}^{p} (-1)^i C_p^i i^n$$

Après calculs, cette formule se révèle terriblement imprécise. L'addition terme à terme fournit $S(20,20) = 4{,}9 \times 10^{18}$ au lieu de $20\,! = 2{,}4 \times 10^{18}$.

Pour $n = p = 30$, l'écart est saisissant :

$$3{,}83 \times 10^{37} \quad \text{au lieu de} \quad 2{,}65 \times 10^{32}$$

Bien entendu, ces deux calculs sont des tests, mais ils ôtent toute signification au calcul de ce qui est réellement intéressant, par exemple $S(30,20)$. Expliquons maintenant l'effet néfaste des erreurs d'arrondi. Dans le calcul de $S(20,20)$ figure $C_{20}^{18} \times 18^{20} = 2{,}4 \times 10^{27}$. Admettons une erreur d'une unité sur le dernier chiffre.

L'erreur absolue commise vaut alors $10^{-9} \times 10^{27} = 10^{18}$, quasiment la moitié du résultat final ! Pour clore cet exemple, signalons la formule :

$$S(n,p) = p(S(n-1,\ p-1) + S(n-1,\ p))$$

Ainsi obtient-on $S(21,20) = 5{,}4 \times 10^{19}$, qui est exact, au lieu de $5{,}0 \times 10^{20}$ par la formule précédente.

Nous examinons maintenant, en détail, un troisième exemple, où l'effet cumulé des erreurs est spectaculaire.

Il s'agit de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$

Cette suite est manifestement positive et décroissante. L'encadrement

$$(1) \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

prouve qu'elle converge, lentement, vers zéro.

Le calcul de $u_n$, pour $n \geqslant 1$, se faisant par intégrations par parties répétées, il est rationnel de mettre à jour la relation de récurrence :

$$(2) \qquad u_{n+1} = e - (n+1)\,u_n$$

En partant de $u_0 = e - 1$, le calcul est aisé. Voici pourtant les étonnants résultats donnés par la calculatrice :

(3)

| $n$ | $u_n$(*) | $n$ | $u_n$(*) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 0,274 |
| 2 | 0,718 | 9 | 0,249 |
| 3 | 0,563 | 10 | 0,227 |
| 4 | 0,465 | 11 | 0,217 |
| 5 | 0,396 | 12 | 0,114 |
| 6 | 0,345 | 13 | 1,234 ! |
| 7 | 0,305 | 14 | − 14,552 ! |

$u_{13}$ est manifestement faux puisque supérieur à $u_{12}$ ; quand à $u_{14}$, il est négatif ! On peut même concevoir un doute sur la validité de $u_{12}$.

Calculer avec plus de chiffres (16 sur une T.I. 58) ne fait que reculer, légèrement, le moment où les résultats deviennent aberrants.

Pourquoi ces aberrations ? Parce qu'à chaque étape du calcul, $u_p$ est multiplié par $p+1$ ; il en résulte que l'erreur commise sur $u_n$ vaut $\frac{n!}{2}\cdot\varepsilon$, où $\varepsilon$ est l'erreur d'arrondi sur $u_2 = e-2$ ($u_1$ est exact).

L'égalité (2) se détériorera donc, quelle que soit la qualité de l'approximation de $u_2$, mais le problème intéressant est d'améliorer la précision avec un matériel donné.

Après cet échec, il est naturel d'aborder le calcul direct d'un $u_n$ (en tout état de cause utile si $n$ est grand).

Pour cela, cherchons une primitive $P_n(x)\,e^x$ de $x^n e^x$, ce qui donne l'intéressante équation polynomiale : $P_n(x) + P_n'(x) = x^n$.

On obtient alors explicitement $u_n$ :

$$(4) \qquad u_n = (-1)^n\, n!\, e \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{e} \right)$$

Malheureusement, cette formule est inexploitable. Ainsi, ma machine m'a donné $u_{13}=0$ car elle ne distingue pas :

$$1/e \qquad \text{et} \qquad \sum_{0}^{13} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Mais écrivons (4) sous la forme : $(-1)^n\, n!\, e \left( -\sum_{i>n} \frac{(-1)^i}{i!} \right)$

et nous obtenons par un changement d'indice :

$$(5) \qquad u_n = e \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(n+1)\dots(n+p+1)}$$

On a donc remplacé une somme finie instable par une série alternée. Celle-ci autorise un calcul rapide et sûr de tous les $u_n$.

(*) $u_n$ arrondis au millième.

Ainsi pour $n = 13$ , l'addition des 3 premiers termes donne 0,181 98 l'erreur étant, on le sait, inférieure au premier terme négligé, soit $4{,}8 \times 10^{-5}$ . On en conclut $u_{13} = 0{,}182$ .

Plus généralement, voici un algorithme de calcul de $u_n$ à $\varepsilon$ près :
1. Mettre $n$ dans la mémoire N et $\varepsilon$ dans la mémoire E
2. Poser $S = V = e/(n+1)$ et $P = N+2$
3. Si $|V| \leqslant E$ , afficher S
4. $V = -V/P$ , $S = S+V$ , $P = P+1$ , aller en 3.

Pour pouvoir être exposés à des élèves, les résultats précédents s'atteignent comme suit :

Au lieu de $u_n = [x^n e^x]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} e^x \, dx$ , qui a fourni (2), envisageons l'autre intégration par parties :

$$(6) \qquad u_n = \left[ \frac{x^{n+1} e^x}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1} e^x}{n+1} \, dx$$

c'est-à-dire en fait $u_n = \dfrac{e - u_{n+1}}{n+1}$ .

En réitérant (6) : $u_n = \dfrac{e}{n+1} - \dfrac{e}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

et par récurrence :

$$u_n = e \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{(n+1)\dots(n+i+1)} - (-1)^p \frac{u_{n+p+1}}{(n+1)\dots(n+p+1)}$$

Grâce à (1) : $u_{n+p+1} \leqslant \dfrac{e}{n+p+2}$ , et nous retrouvons la majoration classique du reste.

En d'autres termes, au lieu de relier $u_n$ à $u_0$ comme il est habituel, on a relié $u_n$ à $u_\infty = 0$ .

Pour calculer $u_n$ pour $n$ allant de $n_1$ à $n_2$ $(n_1 < n_2)$ , on opérera ainsi :
1. Calculer $u_{n_2}$ avec précision par (5)
2. "Descendre" jusqu'à $u_{n_1}$ par $u_{n-1} = \dfrac{e - u_n}{n}$

Cet algorithme est excellent. Pour calculer $u_{25}$ avec 10 chiffres exacts, il suffit d'ajouter 7 termes de la série (5) et on obtient :

$$u_{25} = 0{,}100\,810\,782\,9$$

L'étape 2 m'a conduit jusqu'à $u_1 = 1$ exactement, et a corrigé ainsi le tableau (3) :

$$u_{12} = 0{,}195 \qquad u_{11} = 0{,}210 \qquad u_{10} = 0{,}228$$

Pour finir, mentionnons l'égalité :

$$(7) \qquad u_n = \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!\,(n+p+1)}$$

obtenue en développant $e^x$ en série entière.

Cette formule est moins simple à programmer et le calcul de l'erreur moins immédiat. Sa convergence est également plus lente : il faut 13 termes pour obtenir entièrement $u_{25}$.

L'égalité entre les séries (5) et (7) se prouve en développant la fraction $\dfrac{1}{(x+1)\,\dots\,(x+k)}$ en éléments simples.