Technique, science et pédagogie :
l'essai sur la perspective de Jean-Henri Lambert (applications pédagogiques)

par Roger LAURENT, I.U.T. de Sceaux, Université de Paris XI

Les lecteurs du bulletin n° 281, décembre 1971 de l'A.P.M.E.P. connaissaient déjà le savant mathématicien, astronome, philosophe mulhousien Jean-Henri LAMBERT (1728-1777), Académicien sous Frédéric II, à l'Académie des Sciences et Belles Lettres de Berlin.

Jean-Henri Lambert naît à Mulhouse en 1728, probablement le 29 août 1728, d'après les registres de baptêmes de la paroisse réformée de Mulhouse qui tiennent lieu à l'époque de registres d'état civil, dans une famille de réfugiés huguenots de condition simple. Le problème de la nationalité contestée peut trouver une solution en parlant du "savant et philosophe mulhousien Jean-Henri Lambert". A l'époque, Mulhouse était, suivant l'étude de Roger Jaquel (1), "une petite république alsacienne libre, associée à la fraction évangélique de la Confédération Helvétique, et vaguement alliée à l'ensemble du corps helvétique par le biais de l'alliance française". Autodidacte, Lambert bénéficiera de plusieurs protecteurs dont Euler qui lui permettra d'être recruté à l'Académie des Sciences et Belles Lettres de Berlin, de 1765 à 1777 où il mourra.

L'important colloque international (2) qui lui fut consacré aura permis une meilleure compréhension de son œuvre scientifique et philosophique touchant à des domaines très divers et de susciter des recherches qui devraient permettre d'assurer une meilleure diffusion de son œuvre, parmi les plus marquantes de la science et de la philosophie européenne de la seconde moitié du 18ème siècle.

Nous venons d'éditer pour la première fois en collaboration avec le C.N.R.S. et l'U.P.A.1, *L'essai sur la Perspective* (3) de 1752, premier travail de Lambert sur ce sujet alors qu'il était déjà âgé de 24 ans. Nous présentons ici quelques retombées pédagogiques de ce travail. Les concepts perspectivistes d'élévation, d'abaissement, d'écartement sont particulièrement bien adaptés, 230 ans après, à la programmation sur micro-

(1) *Le savant et philosophe mulhousien J.-H. Lambert*, R. JAQUEL, édition Ophrys, 10 rue de Nesle, Paris, 1977.

(2) Ce colloque a été organisé à l'Université de Haute-Alsace (Mulhouse) du 26 au 30 septembre 1977 et ses Actes ont été édités en 1979 : *Université de Haute-Alsace, Colloque international et interdisciplinaire Jean-Henri Lambert, Mulhouse, 26-30 sept. 1977*, Paris, édition Ophrys, 1979.

(3) Le manuscrit (*Anlage zur Perspektive*) d'août 1752 est conservé à la bibliothèque universitaire de Bâle en Suisse. Édition en français commentée et annotée par Roger LAURENT et Jeanne PEIFFER, préface de René TATON, chez Monom éditeur, 43 avenue du Contrat, 93470 Coubron.

ordinateur (mode graphique) (4). La construction du *perspectographe* ou machine à dessiner des perspectives nous paraît être un bon exercice pédagogique (5). Lambert donne les règles de construction de cet appareil, fondées sur des démonstrations géométriques. Comme c'était souvent le cas au 18ème siècle, le bon fonctionnement de la machine tenait lieu de démonstration : "si ça marche, c'est que c'est bon". Il y a là, un bon exemple du passage des concepts instrumentaux aux concepts mentaux.

Nous ne pouvons commencer cette présentation sans rappeler quelques notions élémentaires de perspective et surtout du vocabulaire utilisé.

Le vocabulaire

— **Plan géométral ou plan de terre.** C'est le plan (G) horizontal où est placé l'observateur OS *(figure 1)* qui représente la hauteur OS de l'œil O au-dessus du plan géométral.

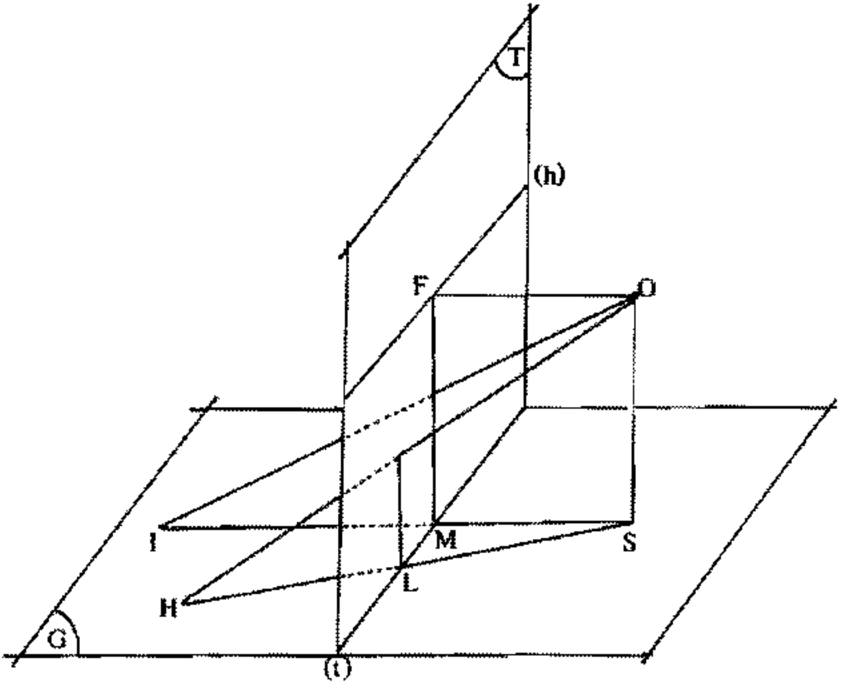


figure 1. - Point de base et point d'élévation.

(4) Nous donnons en annexe 1 une proposition de programme à améliorer par les utilisateurs. Nous sommes loin des machines à dessiner de A. Dürer, le fameux portillon (1525) et même du perspectographe de 1752 (voir en annexe 2 les planches 1 et 2 de A. Dürer).

(5) Ce perspectographe a été construit à l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture (Unité pédagogique d'architecture n° 1) dans le cadre du séminaire *Histoire, théorie et pratique de la perspective*, par des étudiants en 1981.

— **Plan du tableau.** C'est le plan (T) perpendiculaire au plan géométral où est exécuté le dessin en perspective.

— **La ligne de terre** (t), intersection du plan géométral et du plan du tableau ; c'est la seule droite du géométral où objet et image sont confondus.

— **La ligne d'horizon** (h), ensemble des points de fuite correspondants aux directions horizontales.

— **Le point de fuite principal** F (appelé par Lambert **point de l'œil)** est associé à la direction perpendiculaire au plan du tableau schématisée par S1, de même que F1 est le point de fuite associé à la direction (horizontale) schématisée par SH (point de l'œil F1 associé à la direction SH selon Lambert). *(figure 2).*

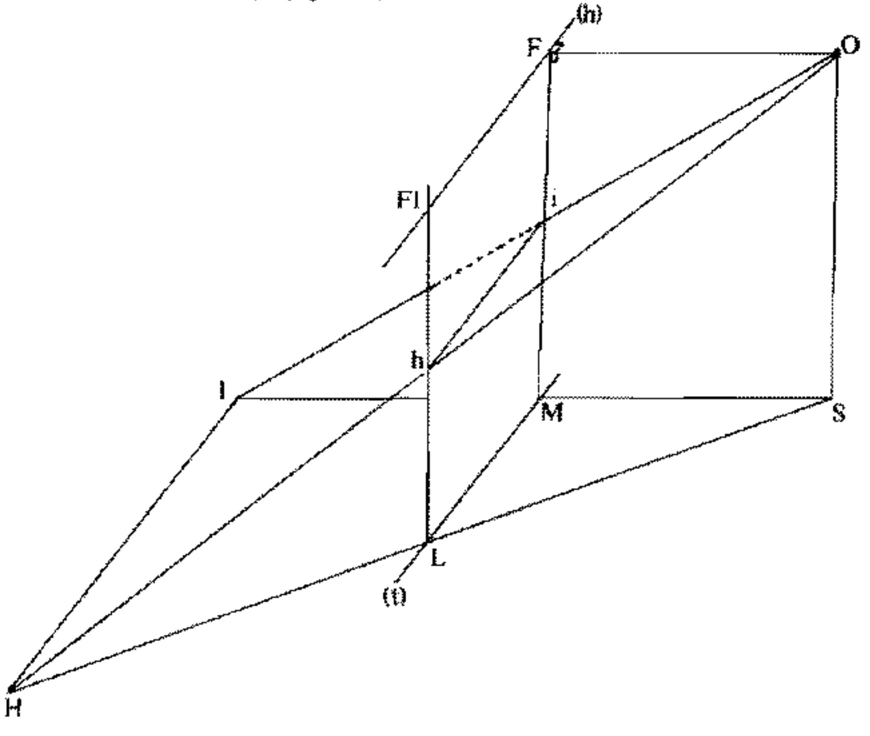


figure 2. - Elévation et abaissement.

— **Ligne de distance.** Lambert l'emploie dans au moins deux sens distincts : distance de l'œil au plan du tableau OF (§7 et §38) ; ligne passant par S et parallèle à la ligne de terre (t) (§36-3).

— **Point de base** ou point d'intersection de la ligne de terre (t) et de la ligne joignant le point à dessiner en perspective H à S : L est le point de base de H.

— **Point d'élévation** ou image de l'objet situé au dessus du point de base : h est le point d'élévation de H.

— **Elévation de H** ou distance de l'image au-dessus du point de base :
$x = \dfrac{bc}{a+b}$ (*)

— **Abaissement de H** ou distance de l'image au-dessous du point de l'œil :
$z = \dfrac{ac}{a+b}$ (*)

— **Ecartement de H** ou distance de l'image à FM :
$e = \dfrac{ad}{a+b}$ (*)

(*) a = SL ; b = LH ; c = OS ; x = Lh ; z = F1h ; d = HI ; e = hi (voir en annexe *figure 1 de Lambert*).

Perspectives dessinées par ordinateur

Intérêt pédagogique : redécouverte des principes de géométrie perspectiviste ; faire des programmes de dessins perspectivistes en mode graphique.

Comment utiliser ces principes pour programmer par exemple en langage basic sur micro-ordinateur ?

Le tableau T ne sera autre que *l'écran de télévision* ; il s'agira de trouver les coordonnées de l'image A1 dans le tableau de l'objet A du géométral(6). Les formules de Lambert donnant les valeurs de l'abaissement, de l'élévation et de l'écartement sont tout à fait bien adaptées à ce problème.

La simple considération de triangles semblables permet d'établir que :

FM1	$= D*H/X$	FM1 représente *l'abaissement* de tout objet du géométral situé sur une droite MA à la distance X de O1(7).
A1M1	$= E*D/X$	A1M1 est *l'écartement*.

(6) Nous appelons A1 l'image de A pour des raisons de programmation, il n'existe pas de minuscule a sur APPLE II.

(7) Nous notons la multiplication par une étoile * pour éviter toute confusion avec la lettre X représentant un nombre ; c'est de plus le signe multiplicatif en informatique.

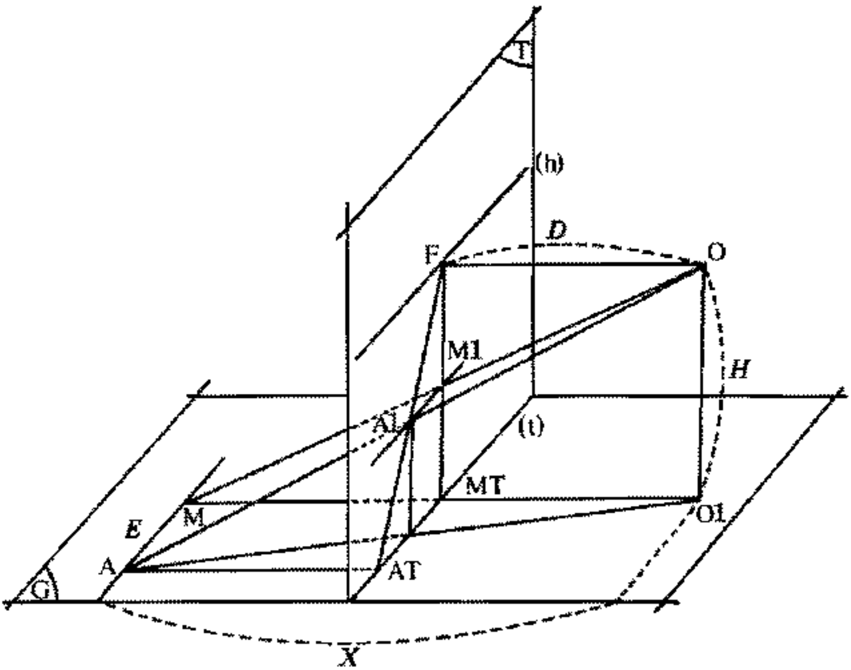


figure 3. - Abaissement FM1 de A et écartement M1A1 de A.

Dans le géométral :

Soit par exemple à construire l'image A1 de A. Le point A sera caractérisé dans le géométral par deux nombres *X* et *E*, coordonnées dans le repère O1E, O1X *(figure 4)*.

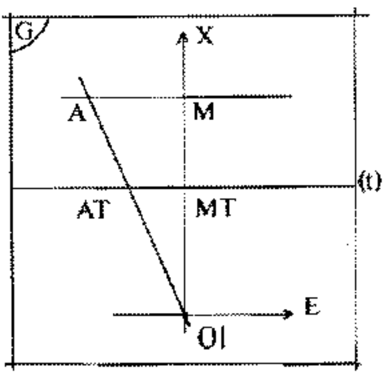


figure 4. - Géométral.
Objets A et M.

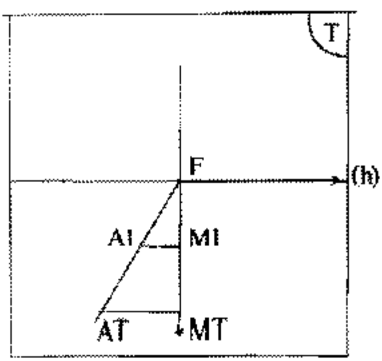


figure 5. - Tableau.
Perspectives A1 et M1 des objets A et M.

X est en quelque sorte *l'éloignement* de l'objet A situé sur une droite AM parallèle à la ligne de terre (t) à la distance O1M de O1 ; *E* est *l'écartement géométral* ou distance de l'objet par rapport à la perpendiculaire O1M à la ligne de terre (t).

Dans le tableau :

L'image A1 sera caractérisée par deux nombres : *l'abaissement* FM1 et *l'écartement* M1A1 *(figure 5)*. On pourra choisir comme repère dans le tableau *(écran de télévision)* un système de deux axes d'origine F *(le point de fuite principal* ou *point de l'œil)* la ligne d'horizon Fh et FMT (pour tenir compte des contraintes des lignes et colonnes de l'écran de télévision) respectivement comme axes des abscisses et des ordonnées. Dans ces conditions on pourra "ploter" *(mettre un point sur l'écran)* le point F et le faire varier à volonté pour traduire le déplacement de l'œil de l'observateur (vision mononoculaire) devant l'écran et ensuite "ploter" les points du type de A1, image perspective des points de l'espace. Il restera à définir la portion d'espace représentable *(cône visuel)* mais il s'agit d'un problème beaucoup plus d'informatique que de mathématique. (Voir programme en annexe 1).

Le perspectographe

Intérêt pédagogique : Concrétisation des mathématiques par la construction d'un appareil ; motivation par la découverte des principes de géométrie perspectiviste nécessaires pour construire.

Le deuxième problème que nous présentons est la construction du perspectographe (voir *figure Lambert 3* en annexe). Dans l'enseignement technique sa construction pourrait être un élément de motivation obligeant les élèves à bien comprendre les principes de géométrie perspectiviste s'ils veulent construire concrètement cet appareil. Lambert en donne soigneusement les principes et apparaît déjà en 1752 le géomètre capable d'utiliser toutes les ressources de la géométrie, à une époque où, suivant l'analyse de Michel CHASLES (1793-1880), celle-ci ne bénéficiait pas de tous les suffrages (8).

Le principe de construction du perspectographe est fondé sur un double rabattement permettant d'obtenir dans le plan géométral l'image perspective normalement dessinée dans le plan du tableau. Il faudra que dans ce double rabattement les images perspectives soient métriquement conservées. Rappelons le vocabulaire :

(8) Dans son *"Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie"* de 1837, M. Chasles attribue à Lambert le rôle de continuateur de l'esprit de géométrie : "... le célèbre Lambert, autre Leibniz par l'universalité et la profondeur de ses connaissances, doit être placé au nombre des mathématiciens qui, dans un temps où les prodiges de l'analyse occupaient tous les esprits, ont conservé la connaissance et le goût de la géométrie...".

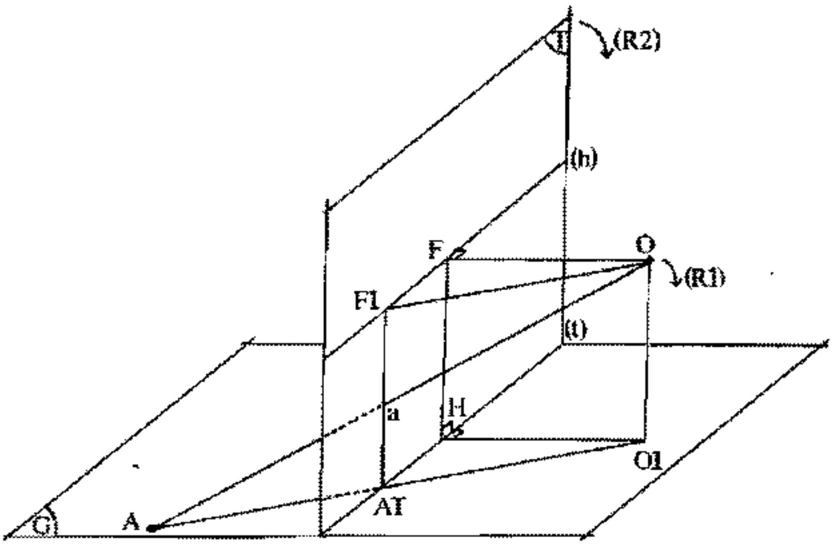


figure 6. - Point d'élévation a ou image a de l'objet A.

A : objet.
a : image (ou point d'élévation).
O : œil.
O1 : pied de l'observateur.
F1 : point de fuite associé à la direction O1 A.
(R1) : rabattement de l'œil O dans le plan géométral en S (rotation de 90 degrés autour de O1H dans un sens arbitraire).
(R2) : rabattement des points d'élévation (ou image) dans le plan géométral (rotation de 90 degrés d'axe la ligne de terre (t) dans un sens arbitraire).

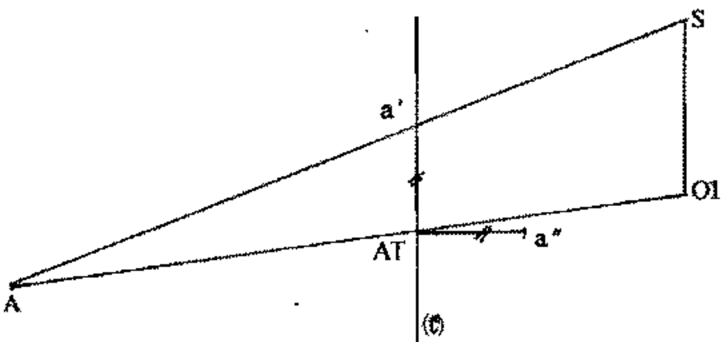


figure 7. - Double rabattement. Schéma du perspectographe.
Image rabattue a" de l'objet A (voir *figure Lambert 2* en annexe 3).

S : rabattement de l'œil suivant (R1).
a' : rabattement du point d'élévation a (rotation dans le plan du tableau (T) de centre le point de base associé AT, même sens que (R1)).
a" : rabattement du point d'élévation suivant (R2).

Le texte et la figure de Lambert sont de lecture plus difficile (voir *figure Lambert 1* en annexe 3).

Dans ces rabattements on remarquera que AT a' = AT a". Par ailleurs de la même manière que les trois points A, a et O sont alignés dans l'espace (section plane conique, *figure 6*), de même les trois points A, AT et O1 sont alignés dans le plan géométral (G). En effet,

$$\frac{a\,AT}{O\,O1} = \frac{Aa}{AO} = \frac{A\,AT}{A\,O1} \text{ (fig. 6)} \quad \text{et} \quad \frac{A\,AT}{A\,O1} = \frac{a'AT}{S\,O1} = \frac{Aa'}{AS} \text{ (fig. 7)}$$

D'où le procédé de construction proposé par Lambert : faire coulisser deux règles mobiles passant par les points fixes O1 et S (*pied de l'observateur et œil rabattu*) mais se coupant au point objet A du géométral. La règle AO1 glisse sur une règle fixe AT a' (*la ligne de terre (t)*), entraînant une équerre mobile dont le but est de maintenir constamment égales les distances AT a' = AT a" (voir *figure Lambert 2*). Ainsi l'image a" de l'objet A peut être construite dans un même plan ; il suffit de trouver un système mécanique permettant aux deux règles mobiles de déplacer continuement leur intersection ou pointe sèche A pendant que le point a", pointe humide, trace le dessin en *perspective*.

Un autre petit problème intéressant : l'utilisation d'une branche d'hyperbole pour construire l'échelle des profondeurs d'une perspective ; l'abaissement z est calculé en fonction de l'éloignement x et des deux paramètres (b hauteur de l'œil et a distance de l'œil au tableau). (Voir *figure 8* ou *figure Lambert 4* en annexe 3).

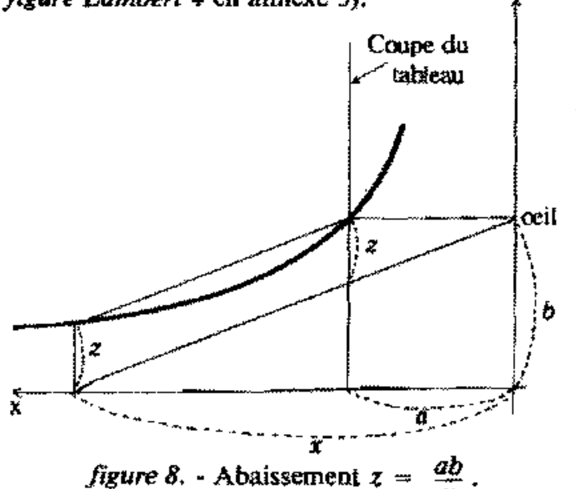


figure 8. - Abaissement $z = \dfrac{ab}{x}$.

Annexe 1

Perspective suivant le principe de Jean-Henri Lambert, sur micro-ordinateur APPLE II, en basic, mode graphique.

```
]LIST

0  PRINT "PERSPECTIVE SUIVANT LE PRINCIPE     DE JEAN HENRI LAMBERT"
1  PRINT "VOULEZ-VOUS FAIRE UNE PERSPECTIVE D'APPARTEMENT, OUI OU NON?"
2  INPUT A$
3  IF A$ = "OUI" GOTO 5
4  PRINT "TANT PIS": END
5  INPUT "ABSCISSE DE L'OEIL 0<=A<=279,A=";A
7  INPUT "HAUTEUR DE L'OEIL 0<=H<=150,H=";H
10  HGR
15  FOR L = 1 TO 15
20  HCOLOR= 3: POKE - 16144,L
32 B = 150 - H
33 D = 100
40  HPLOT A,B
50  FOR I = 1 TO 8
60  READ E(I),X(I),Y(I)
70 Z(I) = (H - Y(I)) * D / X(I)
80 E1(I) = ((A - E(I)) * D) / X(I)
90 I(I) =  INT (A - E1(I))
100 J(I) =  INT (B + Z(I))
110  HPLOT I(I),J(I)
120  NEXT I
125  RESTORE
130  HPLOT I(1),J(1) TO I(2),J(2) TO I(3),J(3) TO I(4),J(4) TO I(1),J(1)
135  HPLOT  TO I(1),J(1) TO I(5),J(5) TO I(6),J(6) TO I(7),J(7) TO I(8),J(8) TO I(5),J(5)
136  HPLOT I(2),J(2) TO I(6),J(6)
137  HPLOT I(3),J(3) TO I(7),J(7)
138  HPLOT I(4),J(4) TO I(8),J(8)
139  DATA  5,100,0
140  DATA  160,100,0
150  DATA  160,400,0
170  DATA  5,400,0
180  DATA  5,100,150
190  DATA  160,100,150
200  DATA  160,400,150
210  DATA  5,400,150
220  NEXT L
221  PRINT "VOULEZ-VOUS DESSINER DES CERCLES EMPILES EN PERSPECTIVE, OUI OU NON?"
222  INPUT B$
223  IF B$ = "OUI" GOTO 230
224  PRINT "TANT PIS": END
230  INPUT "ABSCISSE DU CENTRE DU CERCLE      COMPRISE ENTRE 0 ET 279, X=";X
240  INPUT "DISTANCE DU CENTRE DU CERCLE      SUPERIEURE A D=100,Y=";Y
250  INPUT "RAYON DU CERCLE R=";R
260  FOR Z = 0 TO 150 STEP 10
270  FOR DR = 1 TO 360 STEP 3
280 T = ((3.14) * DR) / 180
290 X1 = X + R *  COS (T)
300 Y1 = Y + R *  SIN (T)
310 X2 = (A - X1) * D / Y1
320 Y2 = (H - Z) * D / Y1
330 I =  INT (A - X2)
340 J =  INT (B + Y2)
350  HPLOT I,J
360  NEXT DR
370  NEXT Z
380  GOTO 0
```

Annexe 2

Planche 1 - A. Dürer, Le dessinateur à la femme couchée, vers 1525.
Les machines à perspective.

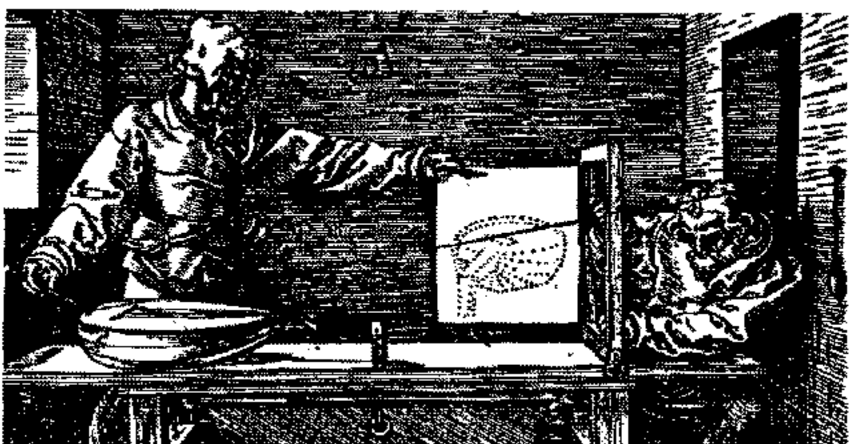


Planche 2 - A. Dürer, Le dessinateur au luth, 1525.
Les machines à perspectives.

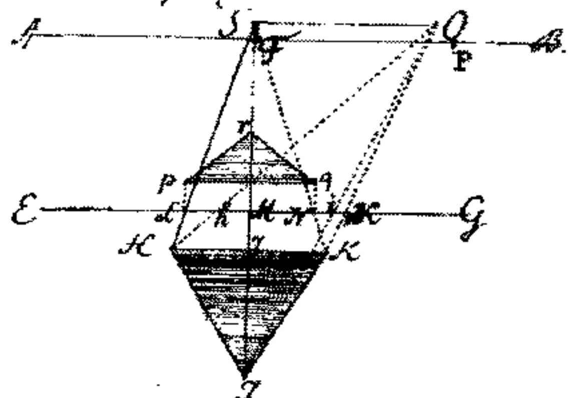
Annexe 3

Es seye demnach HJ = d. LM = y, so ist

$$a : (a+b) = y : d.$$

$$y = \frac{ad}{a+b}$$

Hieraus ist also offenbar, daß wenn man die Linien OS, LS, LH und HJ hat, die 2 linien ML, und Lk, und folglich der punct k auch gefunden seyen. Wir wollen nun sehen, wie dieselben zu zeichnen seyen.



2. Es seye HJK der geometrische Plan. EG die grund-linie. SM die distanz linie. S der punkt, über welchem das Aug ist. OS die Höhe des Auges. Es ist SM, SL, SN = a. ferner LH, MJ, NK = b. HJ, JK = d. SO = c.

Wir wollen zum Unterschied die puncte L. M. N. die Lagepuncte, h, i, k hingegen Erscheinungs puncte nennen.

figure Lambert 1

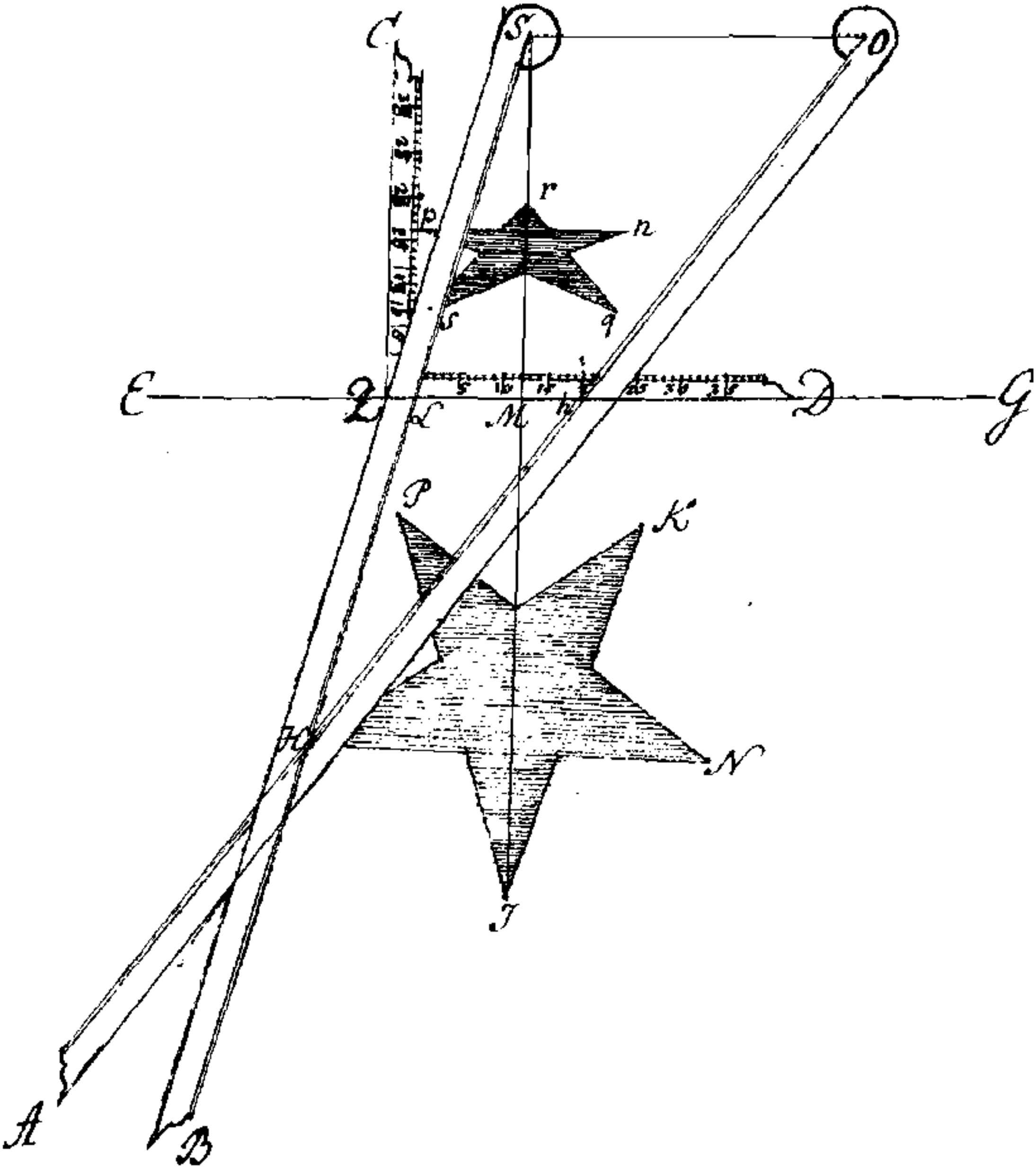


figure Lambert 2

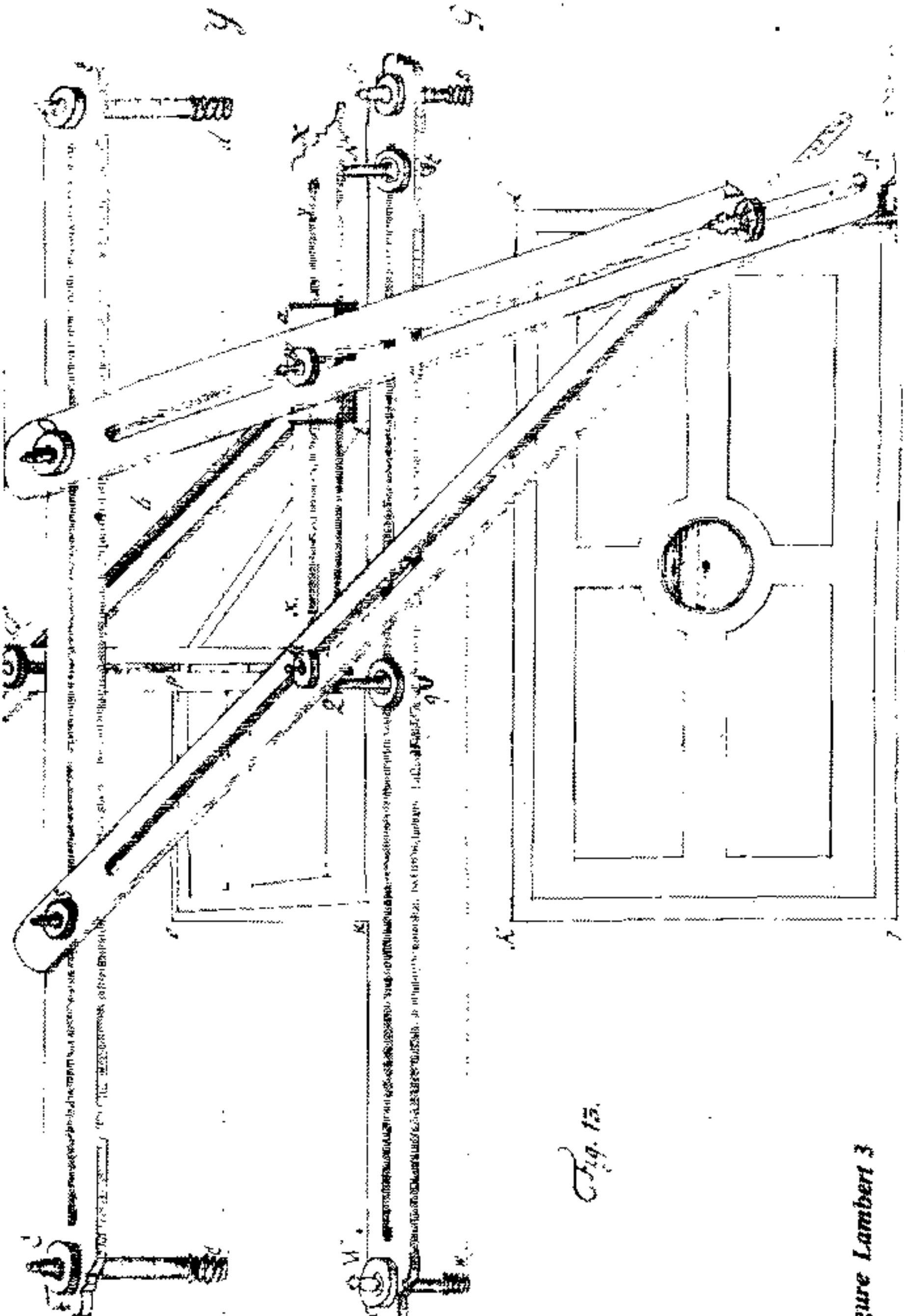


Fig. 13.

figure Lambert 3

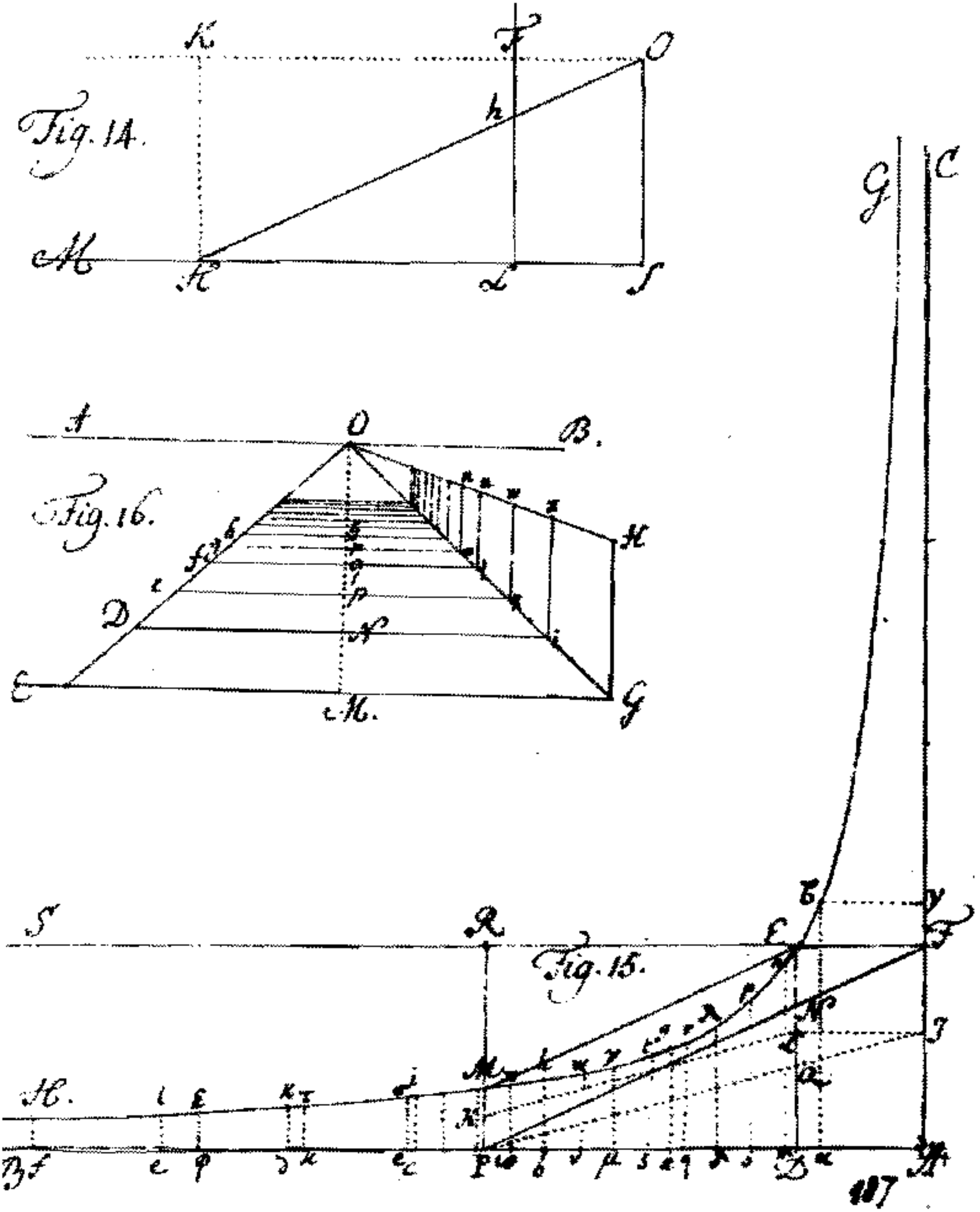


figure Lambert 4