

## encore un problème de moutons...

par Jean Capron  
Lycée Louis Thuillier, Amiens

Que nous nous plaçons dans le cadre des anciens programmes ou dans celui des nouveaux, voici un exercice de probabilités qui fera réfléchir les élèves de Premières ou de Terminales.

**But de l'exercice :** Il est double : montrer aux élèves que le choix d'un ensemble fondamental (univers des "possibles") n'est pas unique et savoir définir convenablement un espace probabilisé, en particulier se rendre compte de la légitimité d'utiliser l'axiome d'équiprobabilité des événements élémentaires.

**Présentation :** On prévient les élèves que l'on va, sur deux exemples, montrer qu'il n'y a pas unicité de l'ensemble fondamental. On traite deux cas : l'un avec tirage exhaustif (sans remise), l'autre avec tirage bernoullien (avec remise). Cela "marche" bien pour le premier exemple, mais par contre, on trouve deux résultats différents pour le deuxième exemple ; d'où la question posée aux élèves : "OÙ EST L'ERREUR ?". On essaye ensemble de la trouver (pas facile !) et ensuite de la rectifier ; enfin on en tire un certain nombre de conséquences pratiques concernant la résolution des exercices de probabilités.

**Énoncé de l'exercice :** (A) On joue avec 6 cartes extraites d'un jeu classique de 32 cartes (non truqué) : l'as, le roi, la dame, le valet, le 10 et le 9 de Pique. On effectue au hasard un tirage exhaustif de 3 cartes et on se propose de calculer la probabilité d'avoir 3 figures.

**Première méthode :** On choisit pour  $\Omega$  l'ensemble des combinaisons sans répétition de 3 cartes prises parmi 6.  $\text{Card } \Omega = C_3^6 = 20$ . On prend comme tribu  $\mathcal{F}(\Omega)$  et on suppose équiprobables les 20 événements élémentaires. Si A est l'événement qui consiste à avoir 3 figures, A est élémentaire donc  $p(A) = \frac{1}{20} = 0,05$ .

**Deuxième méthode :** Étant donné qu'en général on prend les cartes une à une sans les remettre dans le jeu, on peut choisir pour  $\Omega$  l'ensemble des arrangements sans répétition de 3 cartes prises parmi 6.  $\text{Card } \Omega = A_3^6 = 120$  ; on prend comme tribu  $\mathcal{F}(\Omega)$  et on suppose équiprobables les 120 événements élémentaires. A est l'ensemble des permutations des 3 figures

donc  $\text{Card } A = 3! = 6$  et  $p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0,05$ .

On a bien trouvé la même réponse !

ⓑ On joue cette fois avec 3 dés cubiques, non pipés; on lance ces trois dés de manière à les récupérer tous les trois en équilibre sur une face, et par conséquent, nous montrant chacun une face supérieure et on se propose de calculer la probabilité d'avoir 4,2,1.

*Première méthode :* On choisit pour  $\Omega$  l'ensemble des "combinaisons" de 3 chiffres, en faisant bien attention que dans ce cas, en dehors des combinaisons sans répétition, il y a des "combinaisons" avec doublement d'un chiffre, par exemple la "combinaison"  $\{1, 1, 6\}$  (écriture non ensembliste) ou triplement d'un chiffre, par exemple la "combinaison"  $\{1, 1, 1\}$  (même remarque) d'où la difficulté de dénombrer  $\Omega$ . Les combinaisons sans répétition, comme au Ⓐ, sont au nombre de  $20$  ( $C_3^6 = 20$ ). Quand un chiffre est doublé, il y a un choix ordonné de 2 chiffres parmi 6 (ordonné car les 2 chiffres jouent des rôles différents : l'un est doublé et l'autre non). Il y en a donc  $A_2^6 = 30$ . Quand le chiffre est triplé, il suffit de choisir un chiffre parmi 6 et il y a donc 6 choix possibles. D'où  $\text{Card } \Omega = 20 + 30 + 6 = 56$ . On choisit encore comme tribu  $\mathcal{F}(\Omega)$  et on suppose équiprobables les 56 événements élémentaires. A étant l'événement qui consiste à avoir la combinaison  $\{4, 2, 1\}$  c'est un événement élémentaire, d'où  $p(A) = \frac{1}{56} \approx 0,018$ .

*Deuxième méthode :* On jette les 3 dés l'un après l'autre. Soit  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  l'ensemble des 6 chiffres. On choisit  $\Omega = E^3$ ,  $\text{Card } \Omega = 6^3 = 216$ , on prend  $\mathcal{F}(\Omega)$  comme tribu et on suppose équiprobables les 216 événements élémentaires. A étant l'ensemble des permutations des 3 chiffres 4, 2 et 1, on a :

$$\text{Card } A = 3! = 6 \text{ d'où } p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 0,028$$

Et on s'aperçoit cette fois que les réponses sont différentes ; d'où la question : "Où est l'erreur ?".

*Solution de l'exercice :* En général les élèves pensent que l'erreur vient du calcul des cardinaux, mais il est facile de leur montrer que les dénombrements sont exacts. Il est très rare qu'un élève déclare "la première méthode est fautive car on n'a pas le droit de dire que les 56 événements élémentaires sont équiprobables". Et même si un élève le dit, les autres n'en sont pas du tout persuadés, il reste donc à leur faire comprendre pourquoi l'erreur est effectivement là. C'est alors que le recours aux moutons peut être utile. En effet on leur a déjà dit dans le cours, pour déterminer le nombre  $C_n^p$ , qu'on utilisait le raisonnement dit "du berger"; à savoir que, puisque chacun des moutons a exactement 4 pattes, que chaque patte appartient à un et un seul mouton et qu'il n'y a pas de pattes sans moutons, alors le nombre de pattes est un multiple de 4 et par conséquent le nombre de moutons est égal au nombre de pattes divisé par 4 (chaque mouton étant une "classe d'équivalence" de 4 pattes). Dans l'exemple Ⓐ, les 20 combinaisons sont de même "espèce", en effet chacune d'elle est un "mouton à 6 pattes". Dire qu'il y a 6 pattes "favorables" sur 120 ou 1 mouton "favorable" sur 20, c'est la même chose. Il en

va tout autrement dans le **B**. On retrouve en effet les 20 "moutons à 6 pattes" mais il y a cette fois deux autres espèces de moutons, à savoir : 30 "moutons à 3 pattes" [la "combinaison"  $\{1, 1, 6\}$  par exemple ne peut être obtenue que de 3 façons différentes :  $(6, 1, 1)$ ,  $(1, 6, 1)$  et  $(1, 1, 6)$ ] et 6 "moutons à 1 patte" [la combinaison  $\{1, 1, 1\}$  ne peut être obtenue qu'une seule fois avec le triplet  $(1, 1, 1)$ ]. On fait alors le compte des pattes :  $(20 \times 6) + (30 \times 3) + (6 \times 1) = 216$  et on retrouve bien le nombre total des pattes ! Seulement il n'est plus possible d'admettre l'équiprobabilité des 56 "moutons". En effet, et l'expérience le prouve, on obtient plus souvent  $\{4, 2, 1\}$  que  $\{1, 1, 6\}$  et il est encore plus difficile d'obtenir  $\{1, 1, 1\}$ . Il faut donc fabriquer un espace probabilisé qui prenne en compte les différences entre les 3 espèces de moutons. En appelant  $x$  la probabilité d'avoir un "mouton à 1 patte", on peut estimer à  $3x$  celle d'avoir un "mouton à 3 pattes" et à  $6x$  celle d'avoir un "mouton à 6 pattes" et supposer que dans chaque espèce les moutons sont équiprobables. La somme des 56 probabilités des événements élémentaires étant égale à 1 on a donc :  $(20 \times 6x) + (30 \times 3x) + (6 \times x) = 1$  soit  $216x = 1$  d'où  $x = \frac{1}{216}$  d'où la probabilité  $p$  ainsi déterminée : 6 événements élémentaires de probabilité  $\frac{1}{216}$ , 30 événements élémentaires de probabilité  $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$  et 20 événements élémentaires de probabilité  $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$ . A étant l'un de ces 20 événements élémentaires, on a donc  $p(A) = \frac{1}{36} = 0,028$  et cette fois on retrouve bien le même résultat que celui obtenu par la 2<sup>e</sup> méthode !

**Conclusion** : Le choix de  $\Omega$  n'est pas unique, mais attention à l'utilisation de l'axiome d'équiprobabilité des événements élémentaires pour la construction de l'espace probabilisé.

a) quand il s'agira de tirages exhaustifs non ordonnés, on choisira de préférence pour  $\Omega$  l'ensemble des combinaisons sans répétition.

b) quand il s'agira de tirages exhaustifs ordonnés, on choisira pour  $\Omega$  l'ensemble des arrangements sans répétition.

c) quand il s'agira de tirages avec remise, on choisira de préférence pour  $\Omega$  l'ensemble des  $n$ -uplets.

Et dans ces cas-là on pourra, si le matériel n'est pas truqué et si les tirages se font au hasard, utiliser l'axiome d'équiprobabilité des événements élémentaires et le théorème corollaire, à savoir :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\Omega), p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

**Nota** : Si l'on songe que dorénavant la notion de probabilité sera présentée aux élèves sous la forme : nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles, on aura intérêt à leur parler avant des différentes espèces de moutons..., sans oublier de souligner : ... nombre de cas possibles *équiprobables*.