Limites de suites et calculatrices

G.Clément
05100 Briançon

Cette activité s'adresse aux élèves de classes scientifiques au début de Terminale ou en fin de Première. Elle peut être une partie d'un devoir à la maison ou être présentée en séance de travaux dirigés. L'étude empirique se fait sur calculatrice uniquement.

L'étude théorique déniant le résultat conjecturé, ce qui surprend les élèves. Cette surprise est l'un des intérêts de l'exercice.

La généralisation justifie l'étude théorique et explique pourquoi l'étude empirique a pu conduire à une conjecture erronée.

Texte de l'activité proposée aux élèves

Le but de ce problème est l'étude expérimentale et théorique des limites des suites a, b et q définies sur $\mathbb{N}$ par

$$a_0 = 2 + \sqrt{7},\ a_1 = -3,\ b_0 = 1,\ b_1 = 2 - \sqrt{7}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = 4a_{n+1} + 3a_n,\ \ b_{n+2} = 4b_{n+1} + 3b_n,\ q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$

A - Etude empirique

1°) Déterminer des valeurs approchées de a_n, b_n et q_n pour $20 \leq n \leq 30$.

2°) Que peut-on conjecturer pour les limites des suites a, b et q?

B - Etude théorique

1°) Déterminer les solutions r et s avec $r < s$ de l'équation

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

2°) Soit u et v les suites définies sur N par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a_{n+1} - r a_n \,,\, r_n = b_{n+1} - r b_n$$

Etablir que u et r sont des suites géométriques.

3°) Déduire de 2° que les suites a et b sont des suites géométriques.

4°) Calculer a_n, b_n et q_n en fonction de n et en déduire les limites des suites a, b et q.

5°) Comparer les résultats A2°) et B4°).

C - Généralisation et conclusion

Soit E l'ensemble des suites réelles x définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} x_{n+2} = 4 x_{n+1} + 3x_n$$

1°) Montrer que E contient deux suites géométriques de premier terme 1 et de raisons non nulles. Soit q_1 et q_2 les raisons de ces deux suites avec $q_1 < q_2$.

2°) Soit x une suite de E, montrer qu'il existe un couple (λ_1, λ_2) de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N} \; x_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n$

Déterminer λ_1 et λ_2 en fonction de x_0, x_1, s et r.

3°) Soit α la suite obtenue avec $x_0 = 2 + \sqrt{7}$, et $x_1 = -3$; β la suite x obtenue avec $x_0 = 1$; $x_1 = 2 - \sqrt{7}$ et θ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\theta_n = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$.

Déterminer α_n, β_n et θ_n en fonction de n. En déduire les limites de α, β et θ.

4°) Soit a' la suite x obtenue avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2 - \sqrt{7} + \varepsilon_2$ avec $\varepsilon_2 \neq 0$ et q' la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $q'_n = \dfrac{a'_n}{b'_n}$

Déterminer a'_n, b'_n et q'_n en fonction de n. En déduire les limites de a', b' et q'.

5°) Expliquer B5°).