FAISONS BOUGER LES CENTRES

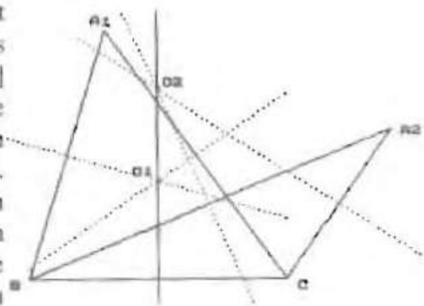
Jean FAGES
ENFA Toulouse

Les réflexions qui suivent peuvent servir de base de travail pour réaliser des séances en second cycle. Elles sont, nous semble-t-il, conformes à l'esprit des programmes actuels où l'on demande de développer "...les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique...", *de réaliser des activités mathématiques dont les différents moments sont* "...formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus,...". *Certaines activités font intervenir des équations de courbes en coordonnées paramétriques, les calculatrices graphiques actuelles, que la plupart des élèves possèdent, permettent de tracer les courbes sans étude préalable. Toutes les activités proposées sont basées sur l'utilisation du logiciel* «Le Géomètre». *Ce logiciel donne des possibilités nouvelles d'investigation, il autorise le mathématicien amateur à se poser des questions et à résoudre des problèmes qu'il n'aurait peut-être pas eu l'audace intellectuelle d'envisager avec les seuls instruments de dessin traditionnels et ceci notamment en matière de lieux géométriques.*

On considère, dans tout ce qui suit, un triangle ABC dont les sommets B et C sont fixes et dont le sommet A se déplace sur une courbe donnée. On s'intéresse au déplacement de chacun des points O, G, H et I respectivement centre du cercle circonscrit à ABC, centre de gravité de ABC, orthocentre de ABC et centre du cercle inscrit dans ABC. Les connaissances mathématiques élémentaires (niveau collège et seconde) permettent de conclure rapidement en ce qui concerne les points O et G, il n'en est pas de même pour H et I.

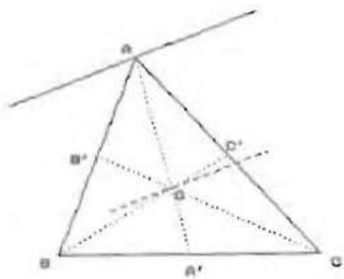
A) Centre du cercle circonscrit à ABC :

Le point O étant le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ appartient donc à la médiatrice de $[BC]$ qui est une droite fixe. Le lieu de O est donc inclus dans cette droite. Avec le logiciel "Le Géomètre", on visualise bien cette propriété. Selon la courbe sur laquelle se déplace A, le point O décrit toute la médiatrice ou un sous ensemble de cette droite. C'est le cas le moins spectaculaire.

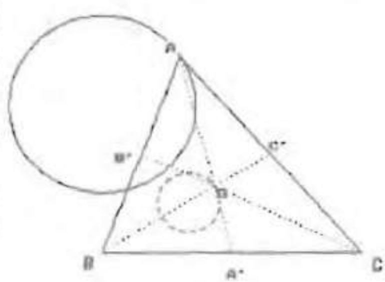


B) Centre de gravité de ABC :

Une expérimentation avec le logiciel, en prenant par exemple A sur une droite puis sur un cercle, nous permet de constater que G se déplace sur une courbe de même nature que celle sur laquelle se déplace A (une droite parallèle ou un cercle plus petit).



Le point G étant le point d'intersection des médianes se trouve donc sur la médiane $[AA']$ issue de A et passant par le milieu, fixe, A' de $[BC]$. On sait même que : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ ce qui permet d'affirmer que G est l'image de A dans l'homothétie de centre A' et



de rapport $\frac{1}{3}$. On conclut donc que le lieu de G est l'image, par cette homothétie, de la courbe décrite par le point A, ce qui confirme les résultats de l'expérimentation.

C) Orthocentre de ABC :

Quelques manipulations avec le logiciel donnent des résultats originaux et très variés. Ceci nous conduit à mener nos investigations avec prudence et méthode.

Nous savons que H est le point d'intersection des 3 hauteurs (AA_1), (BB_1) et (CC_1), nous savons aussi que si ABC est rectangle, H est confondu avec le sommet de l'angle droit. Enfin un exercice classique permet de démontrer que le symétrique de H par rapport à un côté du triangle ABC appartient au cercle circonscrit à ABC. Ces propriétés nous permettent d'envisager quelques cas particuliers.

I - Quelques cas particuliers

1 - *A décrit une perpendiculaire*, Δ, *à (BC):*

Lorsque A se déplace sur Δ, la hauteur (AA_1) reste fixe donc H se déplace sur Δ : le lieu de H est inclus dans Δ.

H est aussi sur la perpendiculaire à (AB) issue de C (à (AC) issue de B) donc :

a) Si $A_1 = B$ ou $A_1 = C$

H est fixe et confondu avec B (ou avec C).

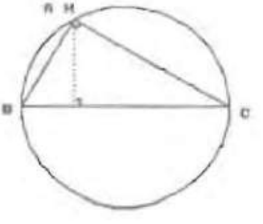
b) Si $A_1 \neq B$ et $A_1 \neq C$

H décrit toute la droite Δ.

* A_1 est la position limite de H lorsque A s'éloigne indéfiniment sur Δ
* Lorsque A tend vers A_1, H s'éloigne indéfiniment sur Δ.

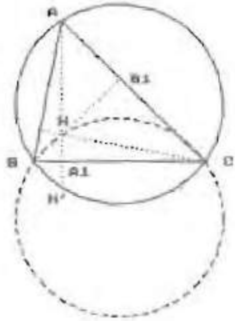
2 - *A décrit le cercle de diamètre [BC] :*

D'après un théorème (nommé dans certains pays Théorème de Thalès), le triangle ABC est rectangle en A. L'orthocentre H est confondu avec A, le lieu de H est donc le cercle de diamètre $[BC]$.

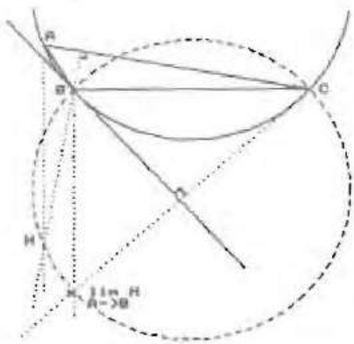


3 - A décrit un cercle, (C), passant par B et C :

Le symétrique de H par rapport à (BC) appartient au cercle (C), lorsque A décrit (C), le symétrique de H décrit lui aussi tout le cercle. On en conclut que le lieu de H est le cercle (C') symétrique du cercle (C) par rapport à (BC).



Remarque : Que devient le point H lorsque A tend vers le point B (ou le point C) ?



Une manipulation avec Le Géomètre nous fait penser que le point H se rapproche d'un certain point du cercle (C') que nous allons caractériser géométriquement.

Quand A tend vers B (sur le cercle (C)), la droite (AB) tend vers la tangente en B au cercle. La hauteur issue de C tend donc vers la perpendiculaire issue de C à cette tangente et le point H tend vers le point d'intersection de cette droite avec la perpendiculaire à (BC) passant par B. On peut noter ce point, par analogie avec l'analyse, $\lim\limits_{A \to B} H$.

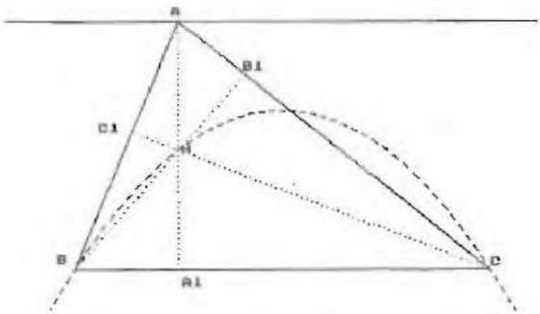
On verra plus loin deux autres cas où la limite de H lorsque A tend vers B dépend de la tangente en B à la courbe sur laquelle se déplace A.

II - Essayons d'aller plus loin

Sortons des cas prévisibles en choisissant toutefois des configurations simples pour le déplacement de A.

1 - A décrit une droite Δ parallèle à (BC) :

La construction réalisée avec Le Géomètre donne une belle courbe pour le lieu de H et permet de faire la conjecture suivante : *H se déplace sur une courbe passant par B et C dont l'allure fait penser à une parabole* (voir figure page suivante).



Le fait que le lieu de H passe par B et C se découvre assez facilement (voir plus haut). Par contre, il est certainement moins évident d'imaginer la nature de ce lieu, et ceci devient nettement plus facile lorsqu'on peut faire la manipulation. Pour démontrer cette propriété un élève de seconde ou de première devrait penser à utiliser la géométrie analytique puisque la seule référence qu'il possède concernant la parabole est la fonction du second degré. Il faut donc choisir un repère orthonormal. Pour des raisons évidentes de symétrie nous prendrons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ centré au milieu de $[BC]$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant des vecteurs directeurs respectivement de (BC) et de la médiatrice de $[BC]$.

Soit : $A(t, \beta)$; $B(-\alpha, 0)$; $C(\alpha, 0)$; $H(x, y)$ $(\alpha > 0 ; \beta > 0)$

En remarquant que : H orthocentre de ABC équivaut à A et H ont même abscisse et $\overrightarrow{BH} . \overrightarrow{AC} = 0$, on obtient finalement :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{(x+\alpha)(\alpha - t)}{\beta} \end{cases} \qquad \text{soit } y = \frac{1}{\beta}(-x^2 + \alpha^2)$$

Ceci prouve que H se déplace sur une parabole passant par B et C et même que le lieu de H est la parabole, étant donné que x décrit $\mathbb{R}$.

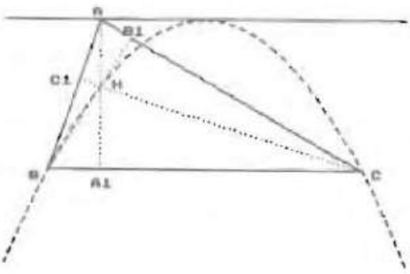
Remarques :

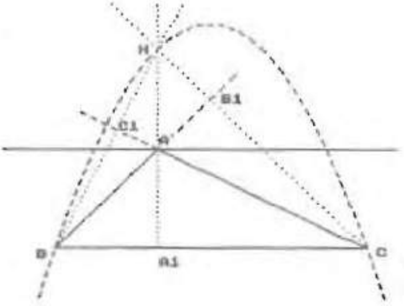
* On peut se poser quelques questions concernant cette parabole dont la forme dépend évidemment de α et β. En particulier : la parabole, lieu de H, peut elle couper la droite Δ ?

A et H étant sur une même perpendiculaire à (BC), donc à Δ, l'intersection n'est possible que si et seulement si A et H sont confondus, donc que si le triangle ABC est rectangle en A. La réponse est donc :

- → si $\beta < \alpha$, la parabole coupe Δ en 2 points distincts
- → si $\beta = \alpha$, la parabole est tangente à Δ en son sommet
- → si $\beta > \alpha$, la parabole ne coupe pas Δ.

Ces résultats s'illustrent immédiatement avec le logiciel (voir figures).





** Etant donné que l'orthocentre du triangle HBC n'est autre que le point A, on peut facilement conclure que si le sommet A d'un triangle ABC se déplace sur une parabole d'axe de symétrie la médiatrice de $[BC]$, passant par B et C, alors le lieu de l'orthocentre H est une droite parallèle à (BC). Ce résultat peut être vérifié avec Le Géomètre (voir en annexe les constructions à réaliser).

2 - *A décrit une droite Δ qui coupe (BC) en D (distinct de B et de C) :*

Il est légitime de se demander si le fait, pour Δ, d'être parallèle à (BC) a une incidence sur la nature du lieu de H. La facilité avec laquelle on manipule les objets dans Le Géomètre nous permet (à condition d'avoir prévu cette possibilité au départ) d'envisager rapidement le cas. La manipulation ne permet pas de donner une réponse avec certitude (voir figure page suivante). Il est en effet difficile de dire si la courbe obtenue est encore une parabole. On peut simplement affirmer qu'elle n'admet plus la médiatrice de $[BC]$ comme axe de symétrie, ce qui ne nous surprend pas.

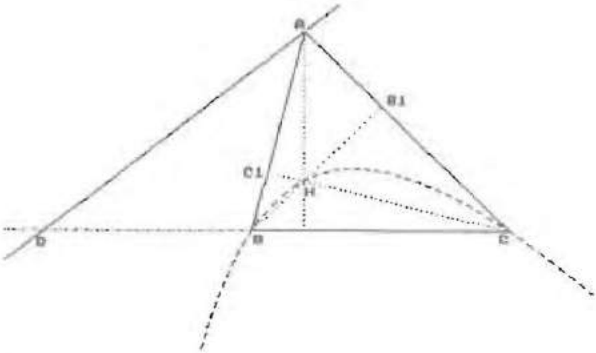
Cherchons une équation du lieu de H :

$$A(t, \gamma t + \beta);\ B(-\alpha, 0)\ ;\ C(\alpha, 0);\ H(x, y) \qquad (\gamma \neq 0, \alpha > 0)$$

Les calculs réalisés plus haut nous permettent d'aboutir à :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{(\alpha + x)(\alpha - t)}{\gamma t + \beta} \end{cases} \qquad \text{soit } y = \frac{(\alpha^2 - x^2)}{\gamma x + \beta}$$

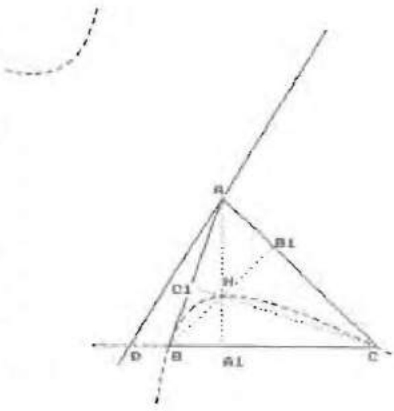
qui est l'équation d'une hyperbole.



Remarques :

* La seule différence entre les deux cas précédents est la possibilité pour A, dans le second cas, de venir en D sur la droite (BC).

Etudions le comportement de H lorsque A tend vers D. Le triangle ABC devient aplati, ses côtés deviennent parallèles , les hauteurs deviennent également parallèles et H tend vers l'infini sur la perpendiculaire en D à (BC) (2 cas selon que A tend vers D au-dessus ou au-dessous de (BC)).



Ceci nous donne donc, pour le lieu de H, quatre branches infinies ; cette conclusion, qui coïncide avec l'équation trouvée plus haut, ne correspond pas à la figure obtenue avec Le Géomètre. En diminuant les dimensions de la figure et en choisissant convenablement β et γ qui déterminent les positions des asymptotes, on finit par voir apparaître, avec soulagement et satisfaction, la deuxième branche de l'hyperbole dans la partie supérieure de l'écran.

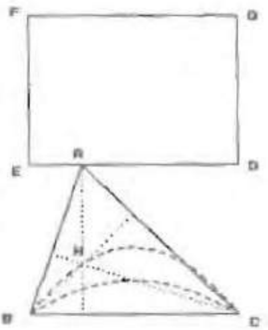
** Les calculs réalisés au-dessus permettent d'affirmer que si A décrit la courbe d'équation $y = f(x)$, alors le lieu de H est la courbe d'équation $y = \dfrac{-x^2 + \alpha^2}{f(x)}$.

Exemple : Si A se déplace sur l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ alors le lieu de H est la courbe d'équation $y = -x^3 + \alpha^2 x$ (voir annexe).

*** Les études que nous venons de faire nous permettent de trouver le lieu de H lorsque A se déplace sur des polygones situés dans un même demi-plan de frontière (BC).

Exemple :

Si A décrit un rectangle $DEFG$ tel que B appartienne à (EF) et C appartienne à (DG) et tel que (ED) soit parallèle à (BC) (voir figure), alors le lieu de H est la réunion de deux portions de paraboles d'extrémités communes B et C. On peut remarquer que, quelle que soit la longueur des côtés $[EF]$ et $[DG]$, le lieu H est toujours cette même figure.



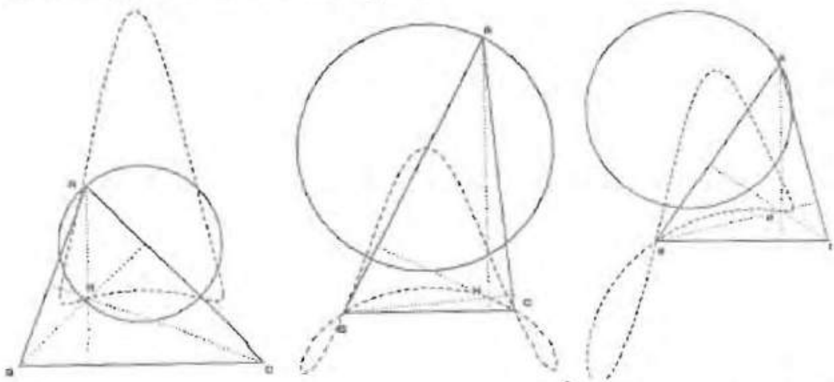
Les considérations qui précèdent concernant l'orthocentre nous poussent à émettre la conjecture suivante :

si A décrit une courbe fermée ne coupant pas la droite (BC), alors le lieu de H est une courbe fermée.

De là l'idée de faire se déplacer A sur un cercle.

3- *A décrit un cercle (C) disjoint de (BC) :*

L'expérimentation avec Le Géomètre permet d'obtenir les figures suivantes qui confirment notre conjecture.



Pour trouver des équations de ces jolies courbes et vérifier avec un traceur de courbes ou une calculatrice graphique les résultats obtenus, nous allons prendre un repère orthonormal d'origine le centre du cercle et tel que :

$$A(R\cos t, R\sin t) \;;\; B(a,b) \;;\; C(c,b) \quad (R>0 \;;\; R<|b|)$$

On obtient pour H les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = \dfrac{(R\cos t - a)(R\cos t - c)}{b - R\sin t} + b \end{cases}$$

En faisant varier les paramètres a, b, c, R, tout en respectant la contrainte $R < |b|$ qui assure que le cercle (C) ne coupe pas (BC), on obtient des courbes fermées qui peuvent avoir des formes très variées.

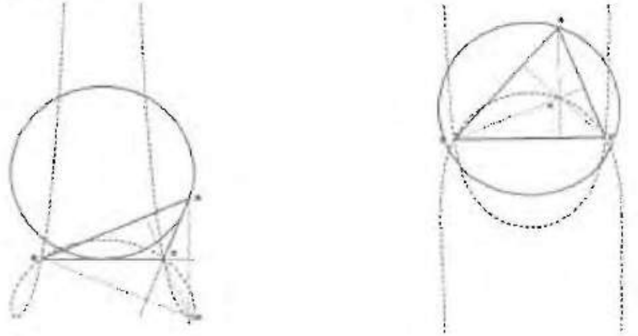
4 - *A décrit un cercle (C) qui coupe (BC) :*

a) *(C) ne contient ni B ni C :*

Un raisonnement géométrique réalisé plus haut nous permet d'affirmer que si le cercle *(C)* coupe *(BC)* en un ou deux points distincts de B et de C, alors le lieu de H est une courbe admettant 2 ou 4 branches infinies.

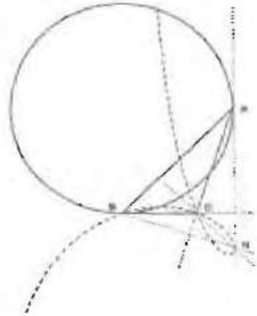
Des manipulations avec le logiciel nous confirment cette conjecture.

Les équations paramétriques définies au dessus attestent que si $R \geq |b|$ le dénominateur de $y(t)$, $b - R\sin t$, s'annule, en changeant de signe, pour une ou deux valeurs de t ($\mathrm{Arcsin}(b/R)$ et $\pi - \arcsin(b/R)$) d'où l'existence de 2 ou 4 branches infinies.



b) *(C) contient B (ou exclusif C) :*

On a déjà vu que lorsque A tend vers B la limite de H dépend de la tangente au cercle en B.



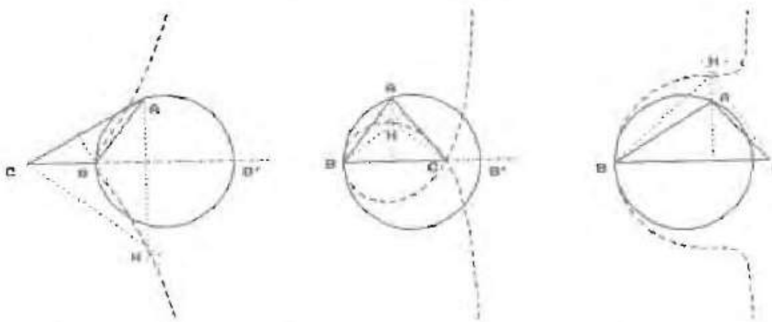
* si (C) est tangent en B à (BC), la position limite de la hauteur issue de C quand A tend vers B est la perpendiculaire à (BC) en C et donc H s'éloigne indéfiniment sur la perpendiculaire à (BC) passant par B (2 cas selon que A est d'un côté ou de l'autre de B). Ceci est confirmé à la fois par la manipulation et par l'étude du cas particulier (voir figure) :
$R = 1$; $a = 0$; $b = -1$; $c = 0,7$ qui donne :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{\cos t\,(0,7 - \cos t)}{1 + \sin t} - 1 \end{cases}$$

** si la tangente en B à (C) est perpendiculaire à (BC), la position limite de la hauteur issue de C est la droite (BC) elle même et donc le point H tend vers le point B.

Dans ce cas de figure, lorsque le point C occupe des positions différentes sur le diamètre issu de B au cercle (C), le lieu de H prend des formes variées et notamment ce lieu est une strophoïde droite lorsque C appartient au diamètre $]BB'[$ (voir figures).

$R = 1$; $a = -1$; $b = 0$ $\quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{(\cos t + 1)(c - \cos t)}{\sin t} \end{cases}$



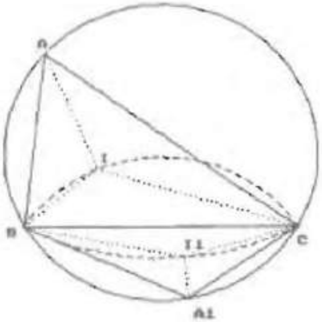
c) En faisant varier à loisir le cercle (C) on obtient toutes sortes de courbes. Il est intéressant d'en prévoir et justifier les formes (fermées ou non), l'existence éventuelle de points doubles, de points de rebroussement etc.

D) Centre du cercle inscrit dans ABC :

Le problème se complique avec le point I car il n'est pas facile de calculer les coordonnées de I en fonction des coordonnées de A, B et C. L'expérimentation avec Le Géomètre donne, pour le lieu de I, des courbes assez variées dont il est beaucoup moins facile de retrouver les équations que pour l'orthocentre H.

Le point I reste évidemment à l'intérieur du triangle ABC, son lieu est une courbe qui ne passe par B et C que si A peut se confondre avec B ou C ou si A peut se trouver sur la droite (BC), à l'extérieur du segment $[BC]$.

En reprenant des cas de figure traités pour le point H, une configuration donne un résultat qui paraît simple : c'est la configuration où A décrit un cercle passant par B et C. Il semble alors que le lieu de I soit constitué de deux arcs de cercles d'extrémités B et C. De là l'idée "d'arc capable", vérification immédiate avec le logiciel en faisant afficher la mesure de l'angle $\widehat{BIC}$, c'est bon !, démonstration évidente ensuite :



$$\widehat{BIC} = \pi - \widehat{IBC} - \widehat{ICB}$$
$$= \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$$
$$= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{BAC}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

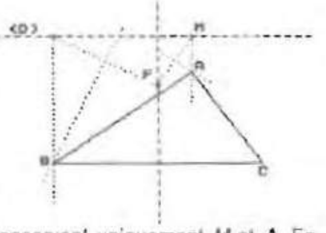
qui est constant quand A décrit l'un des arcs de cercle d'extrémités B et C sur le cercle (C).

Pour les autres cas, les courbes obtenues avec Le Géomètre restent encore à explorer, les nombreux calculs menés n'ont pas encore livré leurs équations : à vos stylos !

Les activités précédentes peuvent se traiter sans grandes connaissances mathématiques. Les moyens technologiques actuels, calculatrices graphiques et ordinateurs, permettent d'aborder des sujets riches, originaux, qui peuvent "accrocher" des élèves et développer chez eux la curiosité, l'esprit de recherche. La machine ne fournit jamais de démonstration, elle peut servir, on l'a vu, à se poser des problèmes, à faire des investigations, à émettre des conjectures, à vérifier des résultats, à infirmer des conclusions hâtives.

ANNEXE I

Pour vérifier avec Le Géomètre que le lieu de H, lorsque A se déplace sur une parabole passant par B et C et dont l'axe est la médiatrice de $[BC]$, est bien une droite parallèle à (BC) il faut d'abord réaliser une construction de A situé sur une parabole définie par foyer F et directrice (D).



• M étant un point lié à la directrice, A est l'intersection de la médiatrice de $[FM]$ et de la perpendiculaire en M à la directrice. On cache les objets de la construction en conservant uniquement M et A. En déplaçant M, A décrit une parabole.

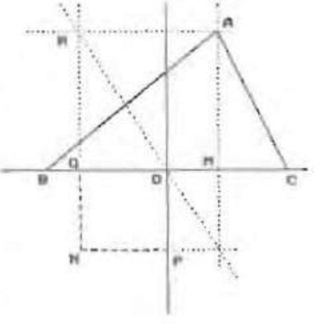
• On construit le point B sur la parabole (construction identique à celle de A), on prend ensuite le symétrique C de B par rapport à l'axe de la parabole (perpendiculaire à (D) passant par F).

• On construit le triangle ABC et son orthocentre H.

En déplaçant le point M, A décrit une parabole et H décrit une droite parallèle à (BC).

ANNEXE II

Pour faire se déplacer A sur l'hyperbole d'équation $y = k/x$, on fait également une construction géométrique de A.



• On trace deux droites perpendiculaires en O qui constitueront les axes du repère. Dans le 3ème quadrant on trace le carré $OQNP$ de côté $\sqrt{k}$.

• On marque un point M lié à l'axe des abscisses, puis on construit R sur la droite (QN) (voir figure).

• Le point A est le point d'intersection des parallèles aux axes menées par R et M.

• On choisit deux points B et C sur l'axes des abscisses, symétriques par rapport à O.

• On construit le triangle ABC et son orthocentre H.

En déplaçant M sur l'axe des abscisses, A décrit l'hyperbole d'équation $y = k/x$ et A la cubique d'équation $y = -x^3/k + a^2 x/k$