

Comment tracer un segment (AB) avec une règle de longueur L et un compas d'empan maximum e ?

Jean-François Canet
Lycée Frédéric Mistral
Avignon

Préliminaire 1

Il est possible, avec une règle de longueur L et un compas d'empan maximum e de tracer le milieu I d'un segment de longueur inférieure ou égale à L .

Si $L < 2e$, le problème est résolu.

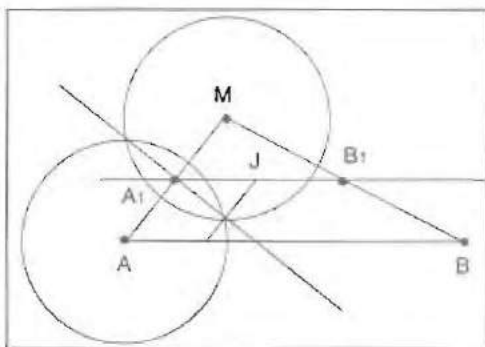
Dans le cas contraire, il est possible de construire un segment $[A_1B_1]$ homothétique de $[AB]$ dans une

homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de

centre M , M étant choisi tel que $MA < 2e$ et $MB < L$. On construit le milieu A_1 de $[MA]$, puis la parallèle (A_1J) à (AB) et enfin B_1 .

En itérant si nécessaire le procédé, on obtient un segment $[A_nB_n]$ de longueur inférieure à $2e$ dont on peut construire le milieu.

La valeur de e est donc sans influence.



Propriété 1 : Si on peut tracer un segment $[AB]$, on peut construire son milieu.

Si AB est inférieure à L , c'est la propriété précédente. Sinon, pour pouvoir tracer $[AB]$, il est nécessaire de connaître une suite de points M_i de ce segment vérifiant $M_i M_{i+1} < L$. On peut donc construire les divers milieux et

reporter les distances $\frac{M_i M_{i+1}}{2}$.

Propriété 2 : Si deux segments $[OA]$ et $[OB]$ ont des longueurs inférieures à $\frac{L}{2}$, on peut tracer le parallélogramme $OABP$.

Conséquence : On peut tracer l'image du triangle OAB dans l'homothétie de centre O et de rapport 2^n .

Propriété 3 : Si on peut tracer deux segments $[OA]$ et $[OB]$, on peut tracer le segment $[AB]$.

Si les deux distances OA et OB sont inférieures à $\frac{L}{2}$, c'est immédiat. Dans le

cas contraire, on construit les suites de points A_i et B_i définies ainsi :

* $A_0 = A$, A_{i+1} est le milieu de $[OA_i]$

* $B_0 = B$, B_{i+1} est le milieu de $[OB_i]$

Il existe un rang n tel que l'on puisse construire $[A_n B_n]$ et donc $[AB]$.

Construction : On se donne une suite de points M_i vérifiant $M_0 = A$, $M_n = B$ et $M_i M_{i+1} < L$. Il suffit alors d'appliquer la propriété 3 pour pouvoir tracer les segments $[BM_i]_{i=n-1, \dots, 0}$.

