Qui de π ou de la circonférence a fait l'œuf ?

Pour une définition de π.

Jean-Pierre TRUONG

La question a d'ailleurs été largement débattue dans le «Numéro spécial π» (supplément au Petit Archimède, n° 64-65, mai 1980).

1 - Circonférence

Dans de nombreux ouvrages de mathématiques qui parlent de π, on peut lire la définition de ce nombre : «π est le rapport de la circonférence d'un cercle à la longueur de son diamètre» [2][3][4]. C'est pour tous une définition bien naturelle.

Il paraîtrait surprenant , voire saugrenu, de mettre en doute ou même se poser des questions sur cette définition. Pourtant, si la longueur d'un segment de droite, en l'occurrence le diamètre, est une grandeur bien définie, quelle est la définition du périmètre d'un cercle ?

Faut-il donc répondre $C = \pi D$?! Diable ! Il y a là une difficulté certaine !

Mais qui de π ou de la longueur du cercle a fait l'œuf?

2 - Points de vue

A priori, il y a deux manières de penser la chose :

1) soit on veut que la circonférence soit égale à πD, alors, il faudrait définir le nombre π d'une manière indépendante du cercle,
2) soit il faudrait donner une autre définition du périmètre d'un cercle qui permettrait de définir le nombre π comme le rapport susmentionné.

Ces deux manières de voir sont équivalentes, bien que chacun puisse, en dehors de toute considération mathématique, défendre tel ou tel point de vue.

Par exemple, on pourrait dire que le second point de vue a l'avantage important de ne pas mettre en cause la définition généralement admise pour π et cela d'autant plus qu'elle est simple à apprendre, mais pas toujours à comprendre.

Mais S. Baruk relate une anecdote du mathématicien De Morgan : «*Ayant expliqué à un agent d'assurances une formule donnant en fonction du temps les chances d'être toujours en vie au bout d'un certain temps, De Morgan fut amené à dire ce qu'était π, car il figurait dans la formule. L'agent l'interrompit fort poliment pour lui dire: "Mais, monsieur, il doit y avoir une erreur! Quel rapport y a-t-il entre un cercle et le nombre de personnes qui sont encore en vie au bout d'un temps donné ?"*». Pour défendre le premier point de vue, on pourrait donc dire que le nombre π apparaît aussi là où l'on ne parle pas de cercle et que par conséquent, il doit être plus fondamental. Dans le même registre, mais en physique, R. Feynman [5] disait : «*Et un beau jour, dans un de ces manuels, je suis tombé sur la formule qui donne la fréquence propre d'un circuit oscillant : $f = \frac{1}{2}\pi\sqrt{L\,C}$, où L est l'inductance du circuit et C sa capacité. Mais π ? De quel cercle s'agissait-il? Vous riez, moi j'étais sérieux. Pour moi, π avait nécessairement à voir avec le cercle et le voilà qui apparaissait dans un circuit électrique. De quel cercle s'agissait-il ? Ceux qui rient pourraient-ils me dire pourquoi π intervient ici ?*

Il faut réfléchir, me dis-je. Il faut que j'y pense. Il faut que je me consacre à la chose. C'est alors que je me suis aperçu , évidemment, que les bobinages électriques sont en forme de cercle. Mais voilà que six mois plus tard je découvre, dans un autre livre, les formules donnant l'inductance d'enroulements à section carrée. Et toujours avec un π! Après avoir réfléchi de nouveau, j'ai fini par copmprendre que π n'avait rien à voir avec la forme circulaire des bobinages. Aujourd'hui, je comprends mieux toutes ces questions, mais au fond de moi, je ne sais toujours pas très bien de quel cercle il s'agit, ni d'où vient le π.»

3 - Première définition de π

Le cosinus d'un nombre peut être défini par la série entière issue de la définition par l'exponentielle :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} + \ldots$$

Cette série converge sur tout $\mathbb{R}$ (le rayon de convergence de la série est infini). Et comme on peut le voir, cette définition ne repose pas sur celle d'un cercle. Dans l'intervalle [0, 2], on peut montrer que la fonction cosinus ainsi définie ne s'annule qu'une seule fois en une valeur que l'on notera pour l'instant ξ : $\exists\,!\,\xi \in [0,2]$ / $\cos\xi = 0$ (notamment en étudiant sa dérivée et à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires et de la continuité).

Le nombre 2ξ sera alors artificiellement appelé le nombre π.(1)

4 - Seconde définition de π

On peut montrer qu'un cercle de diamètre D est rectifiable et exhiber au moins une suite qui converge vers sa longueur. Par exemple, soit $\lambda(p)$ la longueur du polygone régulier à 2^{p+1} côtés inscrits dans le cercle :

$$\lambda(0) = 2D$$

$$\lambda(1) = 2D\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda(0)}{2}\right)^2}}$$

$$\lambda(2) = 4D\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda(1)}{4}\right)^2}}$$

$$\lambda(p) = 4^pD\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda(p-1)}{2^p}\right)^2}}$$

Cette suite converge vers un nombre C qui sera bien sûr la longueur du cercle. Cette autre manière de calculer une circonférence est évidemment très lourde et vraiment peu efficace, mais a le mérite d'exister indépendamment du nombre π !

---

1 - Un cercle de centre O et de rayon R peut être paramétré dans un repère orthonormé par les équations : $x(\theta) = R\cos\theta$ et $y(\theta) = R\sin\theta$.

On peut montrer qu'un cercle est rectifiable et que sa longueur est donc définie par :

$L = \int_0^{4\xi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$ d'où, en calculant : $L = 2\xi D$ où D est le diamètre du cercle. La longueur du cercle est donc égale à πD.

On pourra alors définir π de la manière suivante :

Le rapport *C/D* est indépendant du diamètre *D*, donc c'est le même quel que soit le cercle choisi. On appellera alors ce nombre «π».

5 - Et alors ?

Ces deux définitions possibles du nombre π ne permettent pas d'effacer le paradoxe «*Qui de π ou de la circonférence a fait l'œuf ?*» : c'est vous qui voyez!

Ce qui fait la force des mathématiques est leur structure tissée à la manière des toiles d'araignées : Quelle que soit la définition que vous prenez, comme tout se tient, tous les autres énoncés susceptibles d'être des définitions du même objet se transforment en propriétés découlant de la définition choisie : ici, ces deux définitions permettent de démontrer rigoureusement aussi bien l'une que l'autre toutes les relations où est impliqué le nombre π (surface d'un disque, volume d'une sphère etc....).

6 - Références bibliographiques

[1] «Spécial π» Supplément au *Petit Archimède*, n° 64-65.

[2] Stela BARUK *Dictionnaire des Mathématiques Elémentaires*, Editions du Seuil, Septembre 1992. P: 862-873.

[3] A. BOUVIER, M. GEORGE et F.LE LIONNAIS, *Dictionnaire de Mathématiques*, quatrième édition, Presses Universitaires de France, Novembre 1993, p. 643-644.

[4] D. WELLS, *Le dictionnaire Penguin des nombres curieux*, Editions Eyrolles, p. 49-56.

[5] R. FEYNMAN, *La nature de la physique*, Points-Sciences, Editions du Seuil, p. 216.

[6] Numéro *Spécial* π, Le petit Archimède.