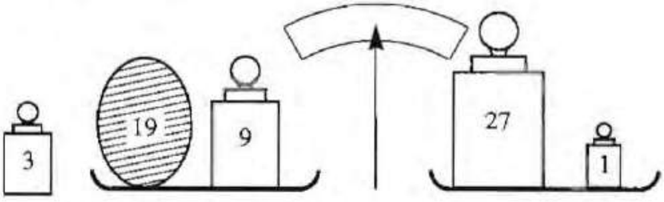
Echanges

Système balançaire

Pierre JULLIEN

Préambule

Avec une balance à deux plateaux et un jeu de poids valant 1, 3, 9, 27, il est possible de peser tous les poids entiers de 1 à 40, et ce, de manière unique. Par exemple, un poids de 19 mis sur le plateau de gauche s'équilibre comme suit (où le poids 3 n'est pas utilisé) :



Le système balançaire

Ce système de numération de position et de base 3 comprend trois chiffres : >, 0, < qui, respectivement se lisent DI, NO et GA et valent 1, 0 et – 1.

Selon le modèle de la balance à deux plateaux, DI correspond à un poids mis à droite, NO à un poids non utilisé et GA à un poids mis à gauche.

Ainsi, dix-neuf s'écrit : > < 0 >, qui se lit DIGANODI

27	– 9		1
DI	GA	NO	DI

Evidemment, cette modélisation suppose que le poids à peser est placé sur le plateau de gauche. On peut convenir que, si le poids est mis sur le plateau de droite, alors il correspond à un nombre négatif qui s'obtient en échangeant les DI et les GA. Exemple : moins dix-neuf s'écrit : < > 0 <, qui se lit : GADINOGA.

Les premiers entiers

Par similitude avec les autres systèmes de position :

Numération		Prononciation	***Conversion décimal→balançaire***
moins cinq	<>>	GADIDI	
moins quatre	<<	GAGA	167 | <
moins trois	<0	GANO	56 | <
moins deux	<>	GADI	19 | >
moins un	<	GA	6 | 0
zéro	0	NO	2 | <
un	>	DI	1 | >
deux	><	DIGA	Soit : > < 0 > < <
trois	>0	DINO	DIGANODIGAGA
quatre	>>	DIDI	Ce qui correspond à :
cinq	><<	DIGAGA	$167 = 3 \times 56 - \mathbf{1}$
six	><0	DIGANO	$56 = 3 \times 19 - \mathbf{1}$
sept	><>	DIGADI	$19 = 3 \times 6 + \mathbf{1}$
huit	>0<	DINOGA	$6 = 3 \times 2 + \mathbf{0}$
neuf	>00	DINONO	$2 = 3 \times 1 - \mathbf{1}$
dix	>0>	DINODI	$1 = \mathbf{1}$

Conversion balançaire → décimal

DIGAGADINODI

> < < > 0 >

	1	ou encore	1
	9		$3 \times \mathbf{1} - 1$
	−27		$3 \times \mathbf{2} - 1$
	−81		$3 \times \mathbf{5} - 1$
	243		$3 \times \mathbf{16} - 0$
			$3 \times \mathbf{48} + 1$
Soit	**145**	soit	**145**

Addition

```
         > >  <
106     > > 0 < >
 33       > > < 0
 ----------------
139   > < < 0 > >
```

Cette somme se calcule selon l'algorithme usuel, de la droite vers la gauche :

- DI + NO vaut DI, que je pose (sans retenue) ;
- GA + GA vaut GADI (car $-2 = -3 + 1$), je pose DI et je retiens GA ;
- GA (de retenue) + NO + DI vaut NO, que je pose (sans retenue) ;
- DI + DI vaut DIGA, je pose GA et retiens DI et, enfin, je pose DI (de la dernière retenue).

Evidemment, il n'y a pas lieu d'étudier la soustraction qui consiste à ajouter l'opposé, obtenu par l'échange des DI et des GA, comme nous l'avons déjà vu.

Multiplication

La multiplication par 3 consiste à adjoindre un NO à droite (voir ci-dessus) et, dans le cas général, on effectue la multiplication selon l'algorithme usuel.

```
16        > < < >
 5          > < <
      -----------
    <   >
          < > > <
        < > > <
      > < < >
    -------------
80      > 0 0 0 <
```

Sous la barre, je laisse une ligne pour écrire les retenues.

- GA fois DIGAGADI c'est GADIDIGA que j'écris.
- Idem à la ligne suivante, où je me décale d'un cran vers la gauche
- DI fois DIGAGADI, c'est DIGAGADI que je recopie, en me décalant encore d'un cran vers la gauche.
- Je fais alors l'addition, en inscrivant les retenues qui se présentent sur la ligne que j'avais préparée.

Il faut remarquer que dans cette addition, le dernier total, à gauche, est NO (= GA + DI) que je n'écris pas.

Divisibilité

La divisibilité par 3 équivaut à la présence d'un NO comme dernier chiffre à droite. Le quotient par 3 s'obtient alors en supprimant ce NO. D'où les critères de divisibilité par 9, 27, etc.

La divisibilité par 2 (1 de moins que la base 3) équivaut à la divisibilité par 2 de la somme des chiffres, soit à la parité de la somme des DI et des GA.

Division

```
  33  > > < 0 > < >   |   > < < >
– 16  < > > <         |   > 0 0 >
  17  > < 0 <         |   >     >
– 16  < > > <         | > < 0 > <
  34        > > < >   |
– 16        < > > <   |
  18        > < 0 0   |
– 16        < > > <   |
   2            > <   |
```

Pour diviser DIDIGANODIGADI par DIGAGADI (898 par 16), je pose la division normalement et vais procéder par additions successives de GADIDIGA.

Le dividende partiel est parfois supérieur à deux fois le diviseur. Ce qui entraîne alors une deuxième soustraction, avant de se décaler vers la droite et abaisser le chiffre suivant du dividende. C'est pourquoi j'ai prévu de marquer les DI des quotients partiels successifs sur deux lignes et d'obtenir le diviseur en sommant ces deux lignes.

D'où les calculs en faisant les retenues de tête.

Le quotient est DIGANODIGA (56) et le reste est DIGA (2).

Conclusion

Si cela vous amuse, entraînez-vous…continuez par les nombres à virgule, etc.

Surtout, faites savoir que c'est bien connu !

Nota

Pourquoi les poids 1, 3, 9, 27 etc ? La raison est la suivante :

De manière générale, si avec un jeu de poids on couvre un ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{Z}$ alors, avec un poids supplémentaire p, on couvre l'ensemble $\mathbb{E} - p \cup \mathbb{E} \cup \mathbb{E} + p$. En outre, si $\mathbb{E}$ est un intervalle et p la longueur de $\mathbb{E}$, alors ce nouvel ensemble est un intervalle de longueur triple.

Or, avec le poids 1, on couvre l'intervalle $\{-1, 0, 1\}$ de longueur 3.

Donc avec les poids 1 et 3, on couvre l'intervalle $[-4 ; 4]$, de longueur 9.

Puis avec les poids 1, 3 et 9, on couvre l'intervalle $[-13, 13]$, de longueur 27. Etc.

NDLR : LUCAS, dans ses "Récréations mathématiques" (sixième récréation - page 153 - Editions Albert Blanchard - 9, rue de Médicis - 75006 Paris), utilise déjà un codage similaire où 1, $\overline{1}$ et 0 *tiennent simplement la place de GA, DI et NO, respectivement. Voici le texte de LUCAS, que nous reproduisons avec l'aimable autorisation de l'éditeur :*

«Les nombres de la progression triple 1, 3, 27, 81,... ont une propriété analogue, qui consiste en ce qu'en les ajoutant ou en les retranchant d'une certaine manière, on forme tous les nombres entiers possibles. Cette propriété remarquable se démontre très simplement au moyen du système de la numération ternaire de base 3, modifiée par l'introduction de caractère négatifs. Ainsi, en convenant qu'un petit trait placé au-dessus d'un chiffre $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots$, exprime que le nombre indiqué par ce chiffre avec sa valeur de position doit être retranché, on peut écrire tous les nombres du système décimal avec les cinq premiers chiffres significatifs 1, 2, 3, 4, 5 et le caractère 0. Par exemple, 6 serait exprimé par $1\bar{4}$; 7 par $1\bar{3}$, et ainsi de suite. Si on applique cette considération au système ternaire, on arrive à écrire tous les nombres avec les caractères $1, \bar{1}$ et 0. Ainsi les nombres

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9

peuvent être représentés par les symboles

1	$1\bar{1}$	10	11	$1\overline{11}$	$1\bar{1}0$	$1\bar{1}1$	$10\bar{1}$	100

On pourrait encore utiliser cette propriété pour la pesée, en répartissant convenablement les poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr},..., entre les deux plateaux d'une balance pour évaluer, avec le moindre nombre possible de poids différents, les masses qui peuvent être exprimées en nombres entiers.

Ainsi, avec quatre poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, on pourra peser jusqu'à 40^{gr} ; avec les cinq poids 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, 81^{gr}, on pourra peser jusqu'à 121^{gr}.»