

Mise en place du raisonnement déductif

Danielle Bergue & Jacqueline Borreani^(*)

Introduction

En mathématiques, un travail autour de la démonstration permet d'aborder l'apprentissage du raisonnement et, en particulier, du raisonnement déductif. Cet apprentissage implique les savoirs mathématiques dans une volonté éducative, sociale et culturelle. En ce sens, nous considérons que c'est un moyen pour l'école de développer la réflexion, la créativité dans une démarche scientifique et d'apprendre à respecter des lois.

Pour les élèves, le sens et l'utilité d'un travail autour de la démonstration ne sont pas toujours compris. Ce travail demande d'argumenter, d'organiser ; il impose un effort de rédaction souvent long et considéré comme fastidieux.

Dans cet atelier, nous avons décrit des outils et des démarches permettant aux élèves de s'approprier des propriétés ainsi que leurs structures, de comprendre le sens d'une démarche déductive, de s'engager dans la recherche d'une démonstration.

Dans un premier temps, nous avons montré des outils permettant de faire prendre conscience de la différence entre dessiner et construire en utilisant des macro-constructions avec CABRI 2. Cette partie est décrite dans un article à paraître dans une publication Copjrelem/Irems autour de la géométrie entre le CM2 et la sixième.

Dans un deuxième temps, nous avons exposé comment nous pensons que se structure une démonstration. Nous avons présenté ensuite un travail à effectuer avec les élèves autour des propriétés dans leur organisation interne et leur fonction outil. Nous avons proposé d'utiliser le débat de classe, en s'appuyant sur la distinction dessin-figure à partir du texte du problème, pour mettre en évidence la différence de statut entre hypothèse et conclusion. Enfin, nous avons décrit et expliqué le mode de fonctionnement d'un objet de transition qui est une aide à la recherche d'une démonstration.

(*) IREM de Rouen

1. Structure d'une démonstration

On travaille souvent dans deux directions pour favoriser l'apprentissage de la démonstration :

- la connaissance de certaines procédures. Par exemple, on peut introduire la démonstration comme une nécessité pour convaincre l'autre dans un jeu d'interaction sociale (problème ouvert)⁽¹⁾ ; on peut aussi la lier à une découverte du jeu des contraintes internes d'une figure⁽²⁾ ou un apprentissage de « méthodes »⁽³⁾ ;
- la recherche de démarches naturelles de type argumentatif.

Mais cela laisse entier le problème de l'accès des élèves à la notion de démonstration.

Or la démonstration repose sur deux caractères :

- elle articule les énoncés en fonction de leurs statuts et non de leurs sens ;
- elle progresse par substitution d'énoncés et non par enchaînement d'énoncés.

Ces deux caractères sont en général masqués par la manière dont sont écrites et présentées les démonstrations :

- la marque du statut se fait par la présence d'un connecteur ou même plus simplement par l'ordre des énoncés ;
- le texte de la démonstration fait apparaître des énoncés qui se suivent sans qu'il y ait une convergence de sens comme dans l'argumentation.

Il s'agit donc de proposer d'autres outils pour aider les élèves dans la recherche de l'organisation déductive de la démonstration.

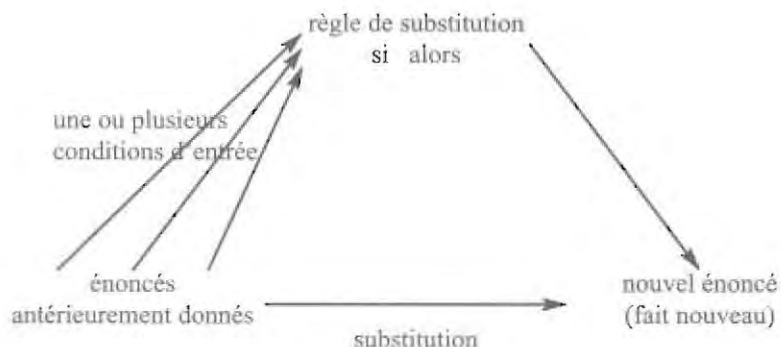
Pour cela, nous nous appuyons sur l'analyse que fait R. DUVAL. Il explique que la structure d'un pas de démonstration n'est pas binaire du type $A \rightarrow B$, mais de type ternaire, ce qu'il appelle un arc transitif de substitution (A.T.S) (cf. figure ci-dessous).

Pour faire fonctionner un A.T.S., il s'agit de bien savoir reconnaître, d'une part, les conditions d'entrée et, d'autre part, le fait nouveau que permet de montrer la règle de substitution. D'où le travail important à faire, dès le début de l'apprentissage, des règles sur ce double aspect de leur fonctionnement et non sur leur connaissance globale.

(1) Arsac Gilbert & al., *Initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM de Lyon, 1992.

(2) Duval Raymond, *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n° 17, 1994, p. 121-138.

(3) Groupe Premier cycle, *Les fichiers méthodes : un outil pour résoudre les problèmes*, IREM de Poitiers, Repères IREM, n° 16, 1994, p. 111-127.



Le changement de statuts des énoncés (hypothèses et conclusions) qui se fait par l'intermédiaire de l'énoncé tiers (la propriété) n'apparaît que dans une vision globale de l'ATS.

Pour certains pas de démonstration, l'usage d'un énoncé-tiers est redondant ou implicite⁽⁴⁾. Certains énoncés ne peuvent s'exprimer que de manière instanciée (propriété de Thalès, réciproque de Pythagore, etc.) ; d'autres, étroitement liés à certaines définitions, peuvent rester sous-entendus (symétrie centrale et milieu, droites parallèles ayant un point commun et points alignés, etc.). Ainsi, lorsque l'hypothèse est « M est le symétrique de N par rapport à I », la conclusion « I est milieu de [MN] » nécessite-t-elle de faire appel à un énoncé tiers et lequel ?

II. Étude des propriétés

Pour que l'A.T.S. prenne du sens auprès des élèves, il nous semble utile de travailler aussi sur la structure des propriétés, celles-ci n'étant pas seulement des règles à apprendre. Nous pensons que des séquences de classe centrées sur la découverte et la démonstration des propriétés sont nécessaires, mais ne sont pas suffisantes. Pour pouvoir être choisies, puis appliquées, il est nécessaire que ces propriétés soient rendues fonctionnelles pour les élèves dans la recherche de problèmes.

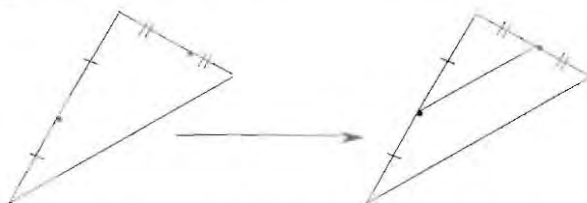
Le travail, en classe, sur les propriétés se fera donc sur plusieurs temps : un temps de recherche, un temps de démonstration, un temps d'apprentissage de base. L'opérationnalisation des propriétés se met en place progressivement au cours de ces différents temps.

La compréhension des propriétés se construit dans plusieurs registres de représentations :

(4) Noïrfalïse Robert, Une étude sur le maniement d'énoncés dans une démonstration, Petit X, n° 46, 1997-1998, p. 5-17.

– *représentation mentale* : c'est en général celle à laquelle on fait régulièrement appel en classe. Ce type de représentation figure souvent dans les manuels. La propriété est associée à une situation, un dessin. Cette représentation se met en place dès la conclusion du temps de recherche.

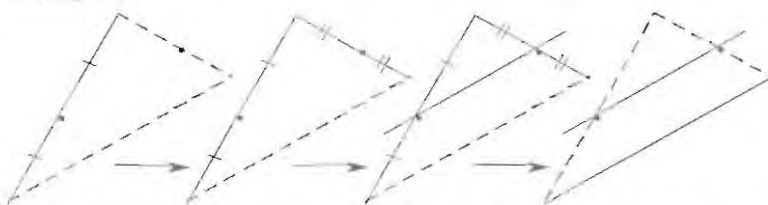
Exemple :



« Si, dans un triangle, une droite joint les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté ».

– *représentation interne* : elle va rendre la propriété opérationnelle. Cette représentation est rarement travaillée. C'est une représentation qui n'est plus constituée seulement d'un état initial et d'un état final, comme ci-dessus. Elle montre l'action interne de la propriété par la transformation progressive des objets sur lesquels elle agit. Elle se traduit par un « film » qui est à construire, en classe, avec les élèves.

Exemple 1 :



« Si, dans un triangle, une droite joint les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté ».

Exemple 2 :



« Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme ».

– *représentation sémantique particulière* : elle distingue, dans l'écriture elle-même de la propriété, les deux parties de l'énoncé, en soulignant les liens entre ces deux parties, les conditions d'entrée et le fait nouveau.

Nous avons choisi de continuer à énoncer les propriétés sous la forme :

« si ..., alors ... »

Ces deux mots ne sont pas explicités, dans un premier temps, en tant que connecteurs auprès des élèves, même si, ultérieurement, ils prendront ce sens. Ils pourraient être, pour le moment, aussi bien remplacés par :

« © ..., ★ ... »

Ils sont là pour indiquer les deux parties de la propriété qui doivent être distinguées :

- la ou les clé(s) qui permet(tent) d'utiliser cette propriété,
- la connaissance nouvelle qu'elle permet de prouver.

Ces deux parties de la propriété doivent être distinguées dans les différentes représentations. On peut le montrer en s'appuyant sur l'écriture des propriétés telles qu'elles sont proposées dans le logiciel « Aide à la démonstration »⁽⁵⁾.

Le logiciel d'aide à la démonstration est muni de commandes qui permettent de mettre systématiquement en évidence ces deux parties (boutons droit et gauche de la souris qui font souligner les deux parties).

Les deux parties de l'énoncé sont soulignées séparément et permettent de faire expliciter aux élèves :

- 1) ce qu'il faut savoir pour utiliser la propriété,
- 2) ce qu'il est possible de dire comme fait nouveau sur la figure et dont on est alors absolument sûr.

Ce logiciel permet une illustration des propriétés à l'aide du logiciel Géoplan.

III. Le débat de classe

Le travail par débat de classe⁽⁶⁾ a pour but de donner du sens à la distinction entre hypothèse et conclusion, indépendamment de toute démonstration.

Un dessin est projeté sur lequel les élèves vont avoir à proposer des énoncés qui leur semblent visuellement vrais.

En déformant le dessin, certains énoncés proposés semblent rester vrais, d'autres sont à écarter d'emblée. Puis, avec la donnée du texte du problème (sans les questions), les élèves vont avoir à effectuer un tri parmi les

(5) Logiciel « Aide à la démonstration », CRDP de ROUEN, 1997.

(6) Bergue Danielle & al., Autour de la notion d'activité, IREM de Rouen, 1995.

propositions qui ont été faites. Dès qu'on associe au dessin un texte, un tri est possible entre les éléments de dessin de base (ce sont les hypothèses) qui permettent de le construire et le reste des « configurations » visibles qui deviennent les conclusions à démontrer. De plus, certaines d'entre elles peuvent ne pas résister à des déplacements des points de base ; elles sont liées à des cas particuliers (que l'on pourra étudier après).

Un logiciel tel que CABRI permet ce jeu d'utilisation des points de base et permet aussi de reconstruire l'énoncé du problème par l'utilisation de la fonction « historique ».

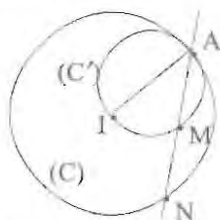
Cette situation permet de faire prendre conscience que ce qui se voit sur un dessin prend en géométrie différents statuts au sein d'un problème.

Déroulement d'un débat

Première étape

Un dessin est projeté.

Consigne : Dites ce qui vous semble des énoncés vrais en observant ce dessin



Les élèves proposent des énoncés qui leur semblent vrais sur le dessin. Chaque énoncé est écrit sur une feuille de papier et affiché dans la classe.

La première étape de propositions n'est pas sujette à débat puisque chacun doit pouvoir dire ce qui lui semble vrai. Dans cette phase, un travail important est fait sur les énoncés qui restent implicites dans les textes originaux des problèmes et qui sont ici explicités par les élèves. Cette différenciation est très difficile pour les débutants en géométrie.

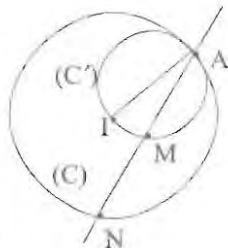
Par exemple :

- Est-il nécessaire d'écrire : « (C) est un cercle » ?
- Vaut-il mieux écrire : « N est un point de la droite (AM) » ou « A, M, N sont alignés » ?
- Ne rien n'écrire, « car ça se voit bien » ?

Comprendre ce qui doit rester ou non au niveau de l'implicite demande donc un apprentissage spécifique.

Dans une deuxième étape le dessin est modifié en bougeant un ou plusieurs points (on a une classe de dessins).

Un tri va alors s'effectuer dans les propositions : certaines sont éliminées, celles qui ne résistent pas au déplacement de certains points, c'est-à-dire qui



correspondent à un cas particulier de la figure.

Dans une troisième étape, le texte associé au dessin est donné.

Tracer un cercle (C) de centre I, puis placer un point A sur ce cercle.
Tracer le cercle (C') de diamètre [IA].
Tracer une droite passant par A et ne passant pas par I qui coupe (C') en M et (C) en N.

Les élèves choisissent, parmi les énoncés restants, ceux qu'ils estiment retrouver dans le texte fourni. Chacun vient expliquer où se retrouve l'énoncé choisi dans le texte. Les élèves sont ou non convaincus par les explications de leur camarade et sont, à ce moment, invités à voter pour ou contre le déplacement de cet énoncé. L'affichage des feuilles est alors modifié : elles se ventilent en deux colonnes. Une colonne, à laquelle on donnera ultérieurement le nom « d'hypothèse », est constituée des énoncés qui ont été déplacés. Une autre colonne est constituée par les énoncés restants qui seront l'objet des démonstrations.

Plusieurs questions annexes se posent telles que :

- Tous les énoncés proposés qui prennent le statut d'hypothèses sont-ils nécessaires ?
- En oublie-t-on ? Comment s'en assurer ? (la fonction « historique » de CABRI permet de vérifier si la liste est suffisante pour obtenir le dessin proposé au départ).

À la fin de ces trois étapes, deux listes sont donc constituées qui représentent les hypothèses et les conclusions. On peut montrer aux élèves que les questions qui étaient posées à l'origine dans le problème correspondent à ce qu'ils ont choisi de démontrer au cours du débat et sont donc situées dans la conclusion.

IV. Aider dans l'enchaînement des ATS avec un objet de transition : le tableau

La recherche d'une démonstration est difficile à comprendre pour les élèves à partir du moment où il faut enchaîner plusieurs pas de démonstration. Les élèves ne savent pas, en général, par quel bout commencer et restent souvent totalement muets. Or, lorsqu'on les questionne, ils expliquent qu'ils pensent à des « bouts » de démonstration, mais qu'ils n'osent pas les proposer, car ils ne trouvent pas les pas intermédiaires qui permettraient un enchaînement complet : « la découverte de ce qu'est

l'organisation déductive du discours ne peut véritablement se faire que dans un autre registre que celui de la langue naturelle »⁽⁷⁾.

Pour cela nous proposons de travailler avec un tableau en trois colonnes qui va permettre :

- de visualiser les changements de statuts des énoncés,
- d'écrire un pas de démonstration intermédiaire sans qu'il soit inséré dans un enchaînement,
- de commencer, dans un pas, indifféremment par les hypothèses, par la propriété ou par la conclusion,
- d'éviter « l'effet catalogue » en ne laissant la place que pour une seule propriété,
- de mettre en relation, de façon explicite, les hypothèses et les clés de la propriété (ou le fait nouveau cherché et la conclusion de la propriété).

Tableau en trois colonnes

je sais (les données sont)	énoncé-propriété	donc (ce que j'ai trouvé de nouveau)

Comment faire fonctionner ce tableau ?

Chaque ligne correspond à un pas de démonstration comportant les trois parties explicitées ci-dessus dans le paragraphe sur l'ATS.

Les lignes ne vont pas être forcément écrites de la gauche vers la droite, c'est-à-dire de l'hypothèse vers la conclusion. Ce qui permettra aux élèves de travailler par raisonnement inductif ou déductif à l'intérieur même d'un pas, ou encore d'entrer par l'énoncé d'une propriété. Les trois parties d'une ligne n'ont pas d'ordre hiérarchique.

La mise en relation des trois colonnes d'une même ligne va provoquer des questionnements, des remises en cause, des abandons de piste.

D'autre part, le changement de statut des énoncés (hypothèse/conclusion) est rendu visible par leur positionnement dans des colonnes différentes du tableau, au cours de l'évolution de la recherche de la démonstration. La compréhension du changement de statut est renforcée chez les élèves par l'utilisation de fléchage.

De plus, une ligne ou un groupe de lignes enchaînées peuvent être proposées par les élèves dans un ordre qui ne correspond pas forcément à

(7) Duval Raymond, Sémiosis et pensée humaine, Berne, Peter Lang, 1995.

l'organisation déductive définitive de la démonstration.

La mise en relation des lignes provoquera, elle aussi, d'autres questionnements, d'autres remises en cause, d'autres abandons. Elle aboutit à une réorganisation finale du tableau.

Exemple de recherche élève :

Texte de l'exercice.
 ABC est un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = 10$. Soit O le milieu de [BC]. On trace le cercle de centre O passant par B. Démontrer que ce cercle passe par le point A.
 Soit I le milieu de [AC]. Calculer OI.

The student's work is organized into a table with three main columns:

- Column 1 (Left):** Contains the problem statement and key elements:
 - AB = 8, AC = 6, BC = 10
 - O milieu de BC
 - C - Cercle de diamètre BC
 - I milieu de AC
- Column 2 (Middle):** Contains the student's reasoning steps:
 - Soit le triangle ABC rectangle en A
 - Soit le triangle ABC rectangle en A, alors A appartient au cercle de diamètre BC
 - donc le cercle de diamètre BC passe par A
 - donc le triangle ABC est rectangle en A
 - donc I et J (milieu de AC) et (K) sont parallèles au triangle ABC
 - le triangle IJK est rectangle en I
 - donc un triangle rectangle en O
 - OI = 4
- Column 3 (Right):** Contains conclusions and annotations:
 - ABC triangle rectangle
 - le cercle de diamètre BC
 - (OI) ⊥ (AC)
 - OI = 4

Arrows indicate the logical flow from the problem statement to the final conclusion.

Que montre ce tableau ?

- Le changement de statut des énoncés est bien compris par l'élève et est indiqué par des flèches. L'élève n'éprouve pas le besoin de répéter, dans la première colonne, l'énoncé nouveau qu'il vient de démontrer et qu'il réutilise (lignes 1 et 2).
- L'élève, se rendant compte qu'il lui manque une clé d'entrée à une propriété, l'abandonne (ligne 3).
- L'élève peut commencer un pas de démonstration par l'écriture d'une propriété dans la case centrale et chercher les hypothèses ou les faits nouveaux qui peuvent être mis en relation avec les clés ou la conclusion de cette propriété (ligne 3).

- Si certains pas manquent dans la démonstration, l'étude avec les élèves d'un tel tableau permet de mettre en évidence ces oublis et d'organiser la recherche pour la compléter (ligne 3).
- L'élève peut poursuivre sa recherche et la démonstration même si une phase intermédiaire est incomplète (ligne 4).

Après cette phase de recherche, l'élève réorganise le tableau en suivant une démarche de type déductif.

Exemple d'un tableau organisé après une recherche :

Texte de l'exercice.
 ABCD est un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD) et que $AB = 3 CD$. I est le milieu de [AD], J est le milieu de [AC], K est le milieu de [BD], L est le milieu de [BC]. Démontrer que I, J, K, L sont alignés.

Données		
I milieu de [AD]	AD est un segment	
J milieu de [AC]	AC est un segment	
K milieu de [BD]	BD est un segment	
$AB = 3CD$		
à prouver		Donc
I milieu de AD, J milieu de AC qui sont les milieux de [AD] et [AC]		I, J, K, L
AD est un segment, AC est un segment		
K milieu de [BD]		
L milieu de [BC]	BC est un segment	I, J, K, L
BC est un segment		
I, J, K, L	Si 2 droites sont // à une même 3 ^{ème} droite	I, J, K, L
I, J, K, L	elles se coupent en un même point	donc

Conclusion

Pendant l'atelier nous n'avons pas eu le temps d'aborder le passage du tableau à la rédaction classique d'une démonstration. Ceci sera décrit dans un article reprenant différentes parties et publié dans une brochure inter IREM pour la Quatrième.

Proposer des activités qui font évoluer les compétences des élèves à prouver, puis à démontrer est possible, mais cette évolution est lente et progressive. Elle s'effectue de la Sixième à la Troisième.

Les différents outils, que nous venons de décrire, ont été élaborés pour répondre aux difficultés des élèves et ont été longuement expérimentés. Ils sont considérés par les élèves comme une aide précieuse pour organiser la recherche d'une démonstration. Certains d'entre eux « bloqués » dans une telle recherche y font encore appel en Seconde.

Nous constatons que nos élèves s'engagent plus volontiers dans l'heuristique (recherche, compréhension) d'un problème. Ils comprennent mieux la distinction entre dessin et figure. Ils se construisent une meilleure représentation du statut des énoncés (hypothèse, conclusion, propriétés) et des structures locales et globales de la démonstration.

Néanmoins, des démonstrations qui comportent trop de pas de démonstration restent difficiles à élaborer individuellement par une partie des élèves. Un travail en groupes allège sensiblement la charge de travail et place la démonstration dans son rôle d'échange d'idées et de respect des « règles mathématiques ».

Nous n'avons abordé ici que la recherche de l'organisation déductive de la démonstration.

Le travail de rédaction paraît encore rebutant pour beaucoup d'élèves et est à l'origine du rejet manifesté devant ce type de tâche. Nous avons commencé à y remédier en utilisant, à partir du tableau, la fonction « copier-coller » d'un traitement de textes. Cette étape est encore à affiner.

Bibliographie

BALACHEFF Nicolas, Preuves et démonstrations au collège, R.D.M n° 3/3, Grenoble, 1982, p. 261-304.

BKOUCHE Rudolf, Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie, Repères-IREM, n° 26, 1997, p. 49-71.

DUVAL Raymond et ÉGRET Marie-Christine, L'organisation déductive du discours, Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, n° 2, IREM de Strasbourg, 1989, p. 25-40.

DUVAL Raymond, Pour une approche cognitive de l'argumentation, Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, n° 3, IREM de Strasbourg, 1990, p. 195-221.

GUICHARD Jacqueline, Statut et fonction de la démonstration en Mathématiques : quelques repères, IREM de Poitiers, 1993.

HOUBEINE Jean & al., La démonstration en seconde, IREM de Rennes, 1995.