Le bulletin de l'APMEP - N° 538

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2020

Mathématiques à l'oral

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

À ce numéro est joint le BGV nº 215

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Lise MALRIEU*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2020
Impression : Imprimerie Corlet.
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297

La verbalisation en classe de mathématiques : mission impossible ?

Manipuler – verbaliser – abstraire... explorons avec Thierry Dias les contours de la verbalisation en cours de maths, ses enjeux, ses pièges et ses préconisations.

Thierry Dias

Bien que très souvent exprimées par des écrits symboliques à l'école, les mathématiques donnent aussi lieu à des moments de verbalisation [1] en classe. Ces épisodes peuvent néanmoins paraître déséquilibrés sur le plan de la communication, tant émetteurs et récepteurs y jouent des rôles différents. Les mathématiques qui sont mises en mots sont en effet souvent des discours produits par un enseignant pour des auditeurs, des verbalisations qui ne laissent *in fine* que des temps de parole ou des espaces d'expression très contraints aux élèves. Bien heureusement, et ce dès les premières années scolaires, les situations d'apprentissage en mathématiques peuvent aussi provoquer de vrais moments d'échanges plus riches que de simples restitutions. Cependant, on peut regretter par exemple que l'expression dans sa dimension orale perdure peu au delà de la scolarité primaire, qu'elle perde en intensité au profit d'une expression écrite toujours plus contrainte au collège et qu'elle laisse quasiment toute sa place au symbolisme au lycée.

Quels types de pratiques langagières existent finalement à l'école au sein de la classe ? Sont-elles de fidèles expressions de la pensée des élèves ou plus simplement des échanges relativement stéréotypés entre des protagonistes qui pratiquent un jeu de questions-réponses ?

À l'école, le rapport authentique à sa pensée est-il soutenu par la verbalisation ? Les élèves ne se contentent-ils pas de répondre à la consigne de l'enseignant au lieu de creuser leur pensée ? Peut-être que de devoir tenir compte des contraintes grammaticales pour lesquelles on peut avoir plus d'aisance à l'oral qu'à l'écrit laisserait supposer que l'oralité est plus favorable que l'écriture pour exprimer son idée. L'urgence de dire et d'être le premier à répondre permet-elle à la pensée de se construire par l'oralité ? [1].

Nous le savons toutes et tous, une situation scolaire comporte une dimension artificielle qui la distingue irrémédiablement d'une expérience libre et individuelle d'apprentissage. Ce que Bernié [2] dénomme le *agir-penser-parler* scientifique dans la co-construction des savoirs y est fondamentalement différent. On n'apprend pas de la même manière lors d'une promenade en forêt ou au sein d'une salle de classe [2] pourrait-on affirmer un peu caricaturalement. Toujours en suivant Bernié [2], la *communauté discursive* construite dans l'institution école propose une forme de communication essentiellement fictive. Les dialogues, les interactions ou les débats relèvent de scénarios didactiques légitimés, voire conditionnés par un noble projet sociétal : celui de permettre d'apprendre. À l'école on organise des environnements qui sont propices à l'acquisition de connaissances et de compétences sur un support essentiellement langagier. Ces milieux

1. Dans ce texte, nous appelons verbalisation toute mise en mots des mathématiques, qu'elle soit écrite (textuelle) ou orale (parole). Ces mises en mots sont relatives aux spécificités du langage mathématiques, son lexique et sa syntaxe.
2. Les nombreux travaux conduits dans le cadre du concept d'*outdoor education* le montrent notamment. On peut lire par exemple : Harris, F. (2018). *Outdoor learning spaces : The case of forest school.* Area, 50(2), 222-231.

se caractérisent notamment par de fréquentes mises en mots nécessaires à la reconnaissance par l'enseignant des progrès de ses élèves, verbalisation qui peut également servir de repères objectifs d'apprentissages pour les élèves.

Ce faisant, cette pratique des activités mathématiques passant par la verbalisation, pour autant qu'elle soit largement partagée, soulève des questions didactiques légitimes quant aux acquisitions des élèves [3]. Qu'apprennent-ils vraiment dans ces situations d'interactions ? Les échanges portent-ils sur des objets de savoirs ou sont-ils surtout consacrés à des problématiques relationnelles ? Quelles sont les mathématiques dont il est question dans ces verbalisations ? À quels élèves profitent réellement ces échanges : ne serait-ce pas aux plus avancés sur le plan de la connaissance ? Une série de questions que j'ai explorées au fil de ma carrière d'enseignant puis en formation et dans des expérimentations de recherche. L'objectif de cet article est d'analyser quelques éléments de l'environnement d'une situation d'apprentissage mathématique, pour arriver à plusieurs propositions pour la classe. Un projet qui interroge même la possibilité d'une telle mission comme annoncé dans le titre de cet article. Les situations de communication comportent en effet des contraintes langagières notamment lorsqu'il s'agit de verbaliser des mathématiques. Tour à tour émetteurs et récepteurs, les élèves se confrontent en permanence à ces contraintes. Nous verrons ensuite que les compétences d'expression et d'écoute des locuteurs sont aussi à prendre en considération lorsque l'on souhaite que les élèves bénéficient d'un moment de mathématiques supporté par une mise en mots.

Des interactions nécessaires mais non suffisantes pour apprendre

Scène de classe ordinaire. La professeure sollicite la lecture de l'énoncé $3x^2 - 5x = 0$.

P : *Bon, qui veut lire la suivante ?*
E : *Trois x deux moins cinq x égal...*
P : *Stop, déjà tu devrais pas dire deux, mais au carré, sinon on te comprend pas !*
E : *Trois x au carré ?*
P : *Ouais ou même trois x carré si tu veux, bon après enchaîne quand même...*
E : *Je dois résoudre ou relire ?*
P : *Ben oui résoudre, alors tu fais comment ?*
E : *Ben je vois qu'y a deux x...*
P : *Comment ça « deux x » ? Tu veux dire deux fois x ?*
E : *Euh non, je voulais pas dire ça... c'est plutôt cinq x non ?*
P : *Mais tu parlais pas de ça, tu parlais pas des cinq x ?*
E : *x il est deux fois donc je peux le sortir non ?*
P : *Ah d'accord, alors tu dois dire « le mettre en facteur »*
E : *Donc ça fait ... x fois trois x moins cinq ?*
P : *Il vaut mieux dire « x facteur de » quand même*
E : *x facteur de trois x moins cinq ?*
P : *Voilà, exactement, c'est comme ça qu'on peut te comprendre*

En interrogeant impersonnellement la classe à cet instant, il s'agit pour l'enseignante de faire comprendre qu'on ne doit pas s'en tenir à la lecture de l'exercice bien entendu, mais qu'il s'agira ensuite de le résoudre.

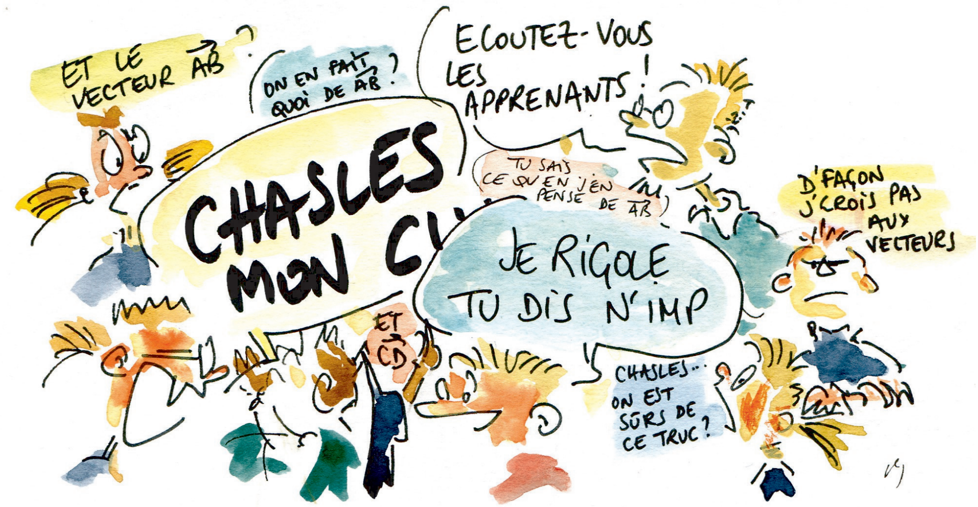
L'analyse rapide de cet extrait permet notamment d'interroger le caractère systématique des interventions de l'enseignante qui, dans cet échange, souhaite assurer une expression relativement correcte et respectueuse d'une certaine convention au nom, dit-elle, d'une bonne compréhension. Cependant, on peut douter très légitimement de la réussite de ces interactions vis-à-vis de l'apprentissage de l'élève. Les zones d'incompréhensions sont nombreuses et les corrections syntaxiques et lexicales proposées par la professeure ne sont pas de nature à faire avancer la résolution de l'équation. Le projet d'étayage langagier de la professeure vient heurter le processus d'apprentissage visé par la résolution de cette équation.

Proposition : lors de la mise en place de situations de communication (mise en commun par exemple), éviter les rétroactions verbales systématiques de l'enseignant qui ont tendance à imposer une normalisation peu propice à la co-construction des compétences et des connaissances.

Contraintes didactiques du modèle socio-constructiviste pour la verbalisation

Dans un modèle d'apprentissage de type socio-constructiviste [3], les interactions de toutes natures entre les pairs sont nécessaires à leur développement cognitif. Cependant, la réussite d'un tel processus est fortement corrélée à l'existence d'un conflit dit *sociocognitif*. Ce processus s'appuie sur une phase d'interaction créant un déséquilibre dans le système des connaissances acquises. En mathématiques, cette séquence pédagogique se manifeste notamment par un moment de débat, de confrontation et donc de désaccord. Raison pour laquelle, en termes d'environnement d'apprentissage et plus particulièrement de dispositif social, ce sont des groupes présentant une hétérogénéité des connaissances qui sont les plus favorables à la création de ce conflit sociocognitif. La condition pour qu'un débat ne soit pas fictif est de mettre en interaction des individus qui ne sont pas d'accord, ce qui, il faut bien le reconnaître ici, est un facteur très contraignant dans le cadre scolaire. De tels désaccords sont en effet difficiles à gérer pour un enseignant, qui doit les maîtriser afin qu'ils garantissent un projet d'apprentissage et qu'ils ne tournent ni au monologue ni à la foire d'empoigne.

Apprendre en participant à un débat contradictoire est très difficile en mathématiques. Cette discipline est très souvent associée à l'idée d'un dualisme entre le vrai et le faux pour les élèves : on sait ou on ne sait pas, donc à quoi bon discuter ? L'élève qui sait (ou qui croit savoir) peut certes accepter une forme de jeu de rôle imposé par la situation scolaire et argumenter son point de vue. Il n'est cependant pas forcément conscient de l'intérêt qu'il peut y avoir à défendre une idée, un point de vue, face à quelqu'un qui pense autrement et qui, par effet de dualité, a donc tort à ses yeux puisqu'il « fait faux ». Le positionnement n'est pas plus facile quant à l'élève qui doute en maths, tant le contexte scolaire est peu tolérant à l'expression publique de l'erreur dans une discipline comme les mathématiques.



CLASSE DONT LES LOCUTEURS NE DISPOSENT PAS DES COMPÉTENCES D'ÉCOUTE ATTENDUES

3. Un tel modèle postule notamment que l'apprentissage est un processus de développement d'une activité mentale de réorganisation du système de pensée et des connaissances existantes.

Lorsque l'interaction est constitutive de l'apprentissage, il y a une nécessité pédagogique de savoir gérer la dissymétrie [4] des interactions sociales chères à Vygotski. Un processus d'aide est alors nécessaire, il conditionne parfois l'adaptation au déséquilibre cognitif s'exprimant dans les débats. Il est cependant délicat et complexe d'assurer cet étayage au sein d'une situation de communication (de verbalisation). Si c'est l'enseignant qui aide avec son lexique, sa syntaxe, le jeu peut être biaisé par une communication apparaissant trop fictive aux yeux des élèves. L'idéal est que ce rôle soit tenu par d'autres élèves dans les échanges afin qu'ils donnent à voir (ou plutôt à entendre) ce qu'ils pensent, si tant est que cela soit possible.

Proposition : les interactions efficientes peuvent émerger de résolutions qui tolèrent une diversité de démarches, d'outils et de procédures. C'est une façon de proposer des échanges ne s'arrêtant pas à un seul point de vue permettant aussi l'expression d'idées incorrectes ou provisoirement invalides. Raison pour laquelle les activités dites de résolution de problèmes semblent particulièrement adaptées à de telles pratiques langagières notamment avec l'exemple des narrations de recherche [4].

Dimension langagière dans la verbalisation

Supposons que l'on vous dicte l'expression suivante : « Racine de cinq facteur de x sur trois plus y égale douze. » En tant qu'auditeur, vous serez immanquablement influencé par les pauses utilisées par le locuteur, des pauses auxquelles vous attribuerez une signification qui peut être distincte des siennes…

Du coup, comment l'écrirez-vous ? Et pour aller plus loin, quelles sont les expressions symboliques correctes qui correspondent à cet énoncé ? En voici quatre exemplaires, tous valides :

$$\sqrt{5}\left(\frac{x}{3}\right)+y=12 \qquad \sqrt{5}\left(\frac{x}{3}+y\right)=12$$

$$\sqrt{5\frac{x}{3}+y}=12 \qquad \sqrt{5}\left(\frac{x}{3+y}\right)=12$$

En contexte scolaire, verbaliser consiste à utiliser un support langagier pour exprimer des objets de savoirs. Qu'il s'agisse d'utiliser le lexique conventionnel ou d'en maîtriser la grammaire, s'exprimer est une compétence complexe pour les élèves qui se trouvent finalement en situation de dire en même temps qu'ils apprennent les mathématiques.

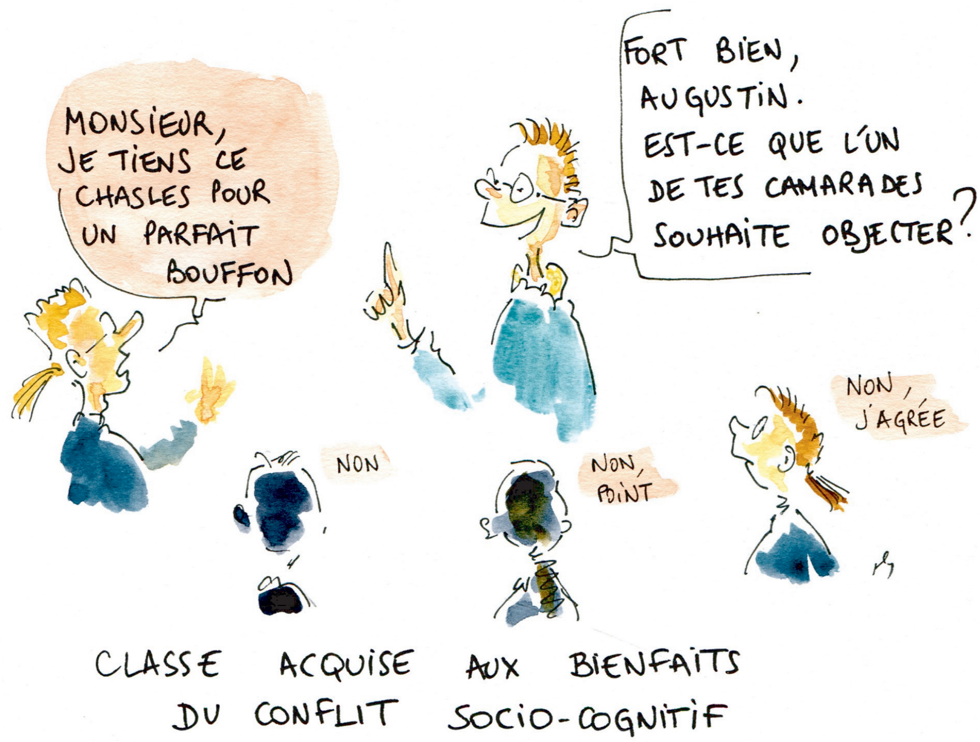
Les élèves découvrent en même temps les objets mathématiques (en général par un travail explicite avec l'enseignant) et la façon dont on en parle, sans que soit généralement interrogée explicitement et collectivement cette façon de dire les mathématiques (pourtant indissociable de la façon dont on les pense). [5]

Afin d'aller plus loin dans l'étude de cette problématique, il est important de distinguer les éléments constitutifs du langage de l'utilisation qui en est faite par les sujets en contexte d'interactions. Ce faisant nous distinguons trois entités :

- les signes et leurs règles de combinaison (syntaxe) ;
- les règles d'attribution d'une signification aux signes (sémantique) ;
- leur utilisation par les individus en tant qu'actes de langage (pragmatique).

Cette catégorisation permet de sérier les difficultés rencontrées par les élèves en contexte de verbalisation dans des situations mathématiques. Elles peuvent en effet révéler des éléments pertinents pour l'analyse didactique en vue de donner aux enseignants des pistes d'étayage.

4. La dissymétrie dont on parle ici est celle relative aux compétences des élèves. Dans le travail de Vygotski, ces relations dissymétriques de compétences dans des dyades d'apprentissage peuvent se comprendre comme des interactions entre un élève et un adulte, ou entre des élèves de niveaux de connaissances sensiblement différents.



Lexique et syntaxe

Dans toute pratique langagière, le locuteur utilise des mots (appartenant à un répertoire : le lexique) qu'il articule dans des phrases (selon des règles : la syntaxe) afin d'exprimer une idée, d'échanger avec quelqu'un directement ou indirectement, voire dans le but d'argumenter dans un débat. La question de la spécificité des dimensions syntaxique et lexicale dans le champ des mathématiques reste ouverte. Elle peut se traduire de la manière suivante : existe-t-il un lexique et une grammaire réellement spécifiques à l'expression du *langage des mathématiques* ? Il faut référer ici le mot *langage* à son acception ne le limitant pas à un système de signes mais à celle qui prend également en compte la faculté du locuteur à utiliser un tel système. Pour ma part, je suggère d'être prudent lorsque l'on parle de spécificités du langage en mathématiques qui ne doivent pas être réduites à leur seule expression langagière. Ainsi, une référence à la catégorie de situation didactique me paraît plus légitime [6]. Une situation dédiée à la formulation d'une idée ou un moment de validation sont par exemple des contextes très différents concernant les spécificités du langage qui y seront utilisées.

Comme pour tout apprentissage langagier, on sait qu'il ne suffit pas de maîtriser un bagage lexical important pour parler de manière intelligente. La construction d'un lexique passe par le cumul de nombreuses expériences variant les contextes d'énonciation : récitation, description, argumentation par exemple. C'est l'utilisation des mots en situation de communication qui va progressivement permettre au sujet de se forger un répertoire disponible. Il en va de même pour les mathématiques, il ne suffit pas de connaître le vocabulaire géométrique de base pour l'utiliser à bon escient.

Nous retrouvons le même procédé à l'œuvre pour la dimension syntaxique qui concerne les règles de combinaison des mots. La connaissance et l'utilisation efficiente de ces règles dépendent beaucoup des modalités d'apprentissage expérimentées par les élèves. Lorsque ces règles sont transmises de façon désincarnées (règles *a priori*) comme des objets d'apprentissage avant d'en être des outils, elles ne sont pas disponibles spontanément dans une situation d'interaction. Dans la scolarité secondaire de l'élève, la découverte de la syntaxe de l'algèbre vient par exemple bouleverser bon nombre de représentations et de conceptions construites dans l'arithmétique. Le signe = prend par exemple son véritable sens d'équivalence alors qu'il est souvent assimilé à une sorte d'opérateur en arithmétique (celui qui déclenche un résultat). L'utilisation des lettres pour les inconnues induit aussi de fortes perturbations syntaxiques. Alors que la règle de composition de deux nombres lorsqu'ils sont l'objet d'un produit implique l'utilisation d'un signe spécifique (on écrit 6×8), une nouvelle règle s'applique lorsque le produit est celui d'une lettre et d'un nombre : le produit de 3 et de y s'écrit $3y$ sans le signe qui représente la multiplication.

Relevons pour terminer ce paragraphe consacré aux difficultés lexicales et syntaxiques que la notion de polysémie peut venir elle aussi perturber les échanges entre sujets dans un contexte verbal. Les exemples ne manquent pas et concernent malheureusement souvent les apprentissages du début de la scolarité obligatoire. Les mots comme *côté, droit, arête* par exemple sont connus pour leur polysémie. La difficulté n'est pas qu'un même mot puisse servir à représenter plusieurs objets mais plutôt que ces significations sont construites chronologiquement dans le développement cognitif du sujet. On apprend très tôt dans sa vie que le sommet d'une montagne est orienté et unique, et plus tard à l'école qu'un triangle, (qui ressemble souvent à une montagne) a trois sommets quelle que soit l'orientation de la figure. La polysémie est un élément perturbateur des échanges oraux, surtout lorsqu'ils ne s'appuient pas sur des traces écrites simultanées pouvant lever les ambiguïtés notamment grâce à un changement de registre (voir à ce sujet le chapitre suivant).

Pragmatique

Lorsque l'on parle de verbalisation en situation de communication, il serait incomplet, voire même imprudent, de s'en tenir aux seules dimensions techniques de la langue (lexicale et syntaxique). En effet, les échanges en situation d'apprentissage mathématique sont parfois dédiés à des phases d'explication, d'argumentation, voire de preuve, qui s'éloignent alors souvent des normes correctes de l'expression pour aller vers plus de *couleurs locales*. Lorsque l'on s'intéresse aux contextes très singuliers des échanges, on doit prendre en compte la dimension pragmatique de la langue : ce que l'on nomme les actes de langage. Au sens de Searle [7], on parle d'action pour décrire les actes de langage qui sont tournés vers un but précis entre les interlocuteurs. Dans une interaction langagière, les locuteurs n'en restent en effet pas à une description ou une explication. Pour se convaincre, se contredire ou se prouver des choses, ils utilisent alors des formes du langage qui ont pour but de provoquer des effets entre eux. Les paroles échangées peuvent alors être analysées sous la forme d'actes de langage qui comportent au sens d'Austin [8] :

- des fonctions illocutoires portant une intention du locuteur de provoquer l'action du récepteur : exemple la première prise de parole du texte qui suit ;
- de fonctions perlocutoires qui sont les effets indirects sur le récepteur : exemple la deuxième intervention du professeur dans le même texte → *Ah ben bravo !*

Cette dimension pragmatique du langage constitue une réelle richesse lorsque l'on sait la mettre à profit didactiquement, mais peut au contraire provoquer des zones d'incompréhension entre les protagonistes. Scène de classe ordinaire : la professeure sollicite un élève dans le cadre de la résolution d'une équation comportant (entre autres) le nombre $\sqrt{12}$.

P : Alors qu'est-ce qu'on peut faire de ce racine de 12…
E : alors on sait que racine de 12 c'est 6
P : Ah ben bravo !
E : rire … je sais c'est une facile celle là
P : Donc racine de 12 c'est 6, ben première nouvelle dis donc…
E : … ? c'est pas ça ?
P : Peut être juste pour toi alors…

E : Mais 12 c'est bien 2 fois 6 non ?

P : Je ne vois pas le rapport, 12 c'est aussi 3 fois 4 si on veut

E : Mais m'dame, c'est pas 6 la racine de 12 du coup ?

P : Et ben, quelle découverte . . . il était temps

E : Du coup si 12 c'est 3 fois 4 la racine c'est 2 racine de 3 ?

P : Heureusement que je suis là finalement. . .

E : oui m'dame c'est sûr

P : . . .

On peut analyser à la lecture de cet extrait que les propos de l'enseignante sont interprétés de manière parfois inattendue par l'élève. Il ne comprend pas la fonction illocutoire de certains messages (qui devrait engendrer ce qu'il doit faire) ni les allusions indirectes (fonctions perlocutoires) comme « Ah ben bravo » ou « première nouvelle » par exemple. Ceci illustre cette dimension pragmatique de la langue, lorsqu'un locuteur souhaite engendrer une action de son interlocuteur sans lui dire de manière explicite plus directement. Il y a création d'une zone d'incompréhension qui peut tourner assez longtemps en défaveur de celui ou celle qui est censé apprendre de l'échange, et qui au contraire s'en trouve déstabilisé.

Ce sont les compétences professionnelles de l'enseignant qui permettront aux élèves de lever ces doutes et faire ainsi de ce moment de verbalisation une valeur ajoutée en termes d'apprentissage. L'écoute, la relance, la sollicitation des reformulations, la demande de clarification lexicale, sont autant de procédés qui sont susceptibles de faire réussir les moments d'échanges en classe. L'enjeu principal étant pour l'enseignant d'être le plus explicite possible chaque fois que cela est nécessaire, non pas en intervenant systématiquement avec la juste syntaxe, mais en interrogeant les élèves sur ce qu'ils ont compris et retenu de leurs échanges.

Proposition : mettre à disposition des élèves un étayage langagier adapté à leurs compétences de locuteurs : ressources externes, reformulations possibles, clarification lexicale.

Verbaliser c'est représenter. . .

Par manque des précisions nécessaires, la consigne « tracez un triangle rectangle ABC » donnée oralement ou par écrit ne conduit pas à une seule réponse figurative. Ce court énoncé engendre une diversité de représentations graphiques visuellement très différentes en conséquence du passage du registre de la langue naturelle à celui du dessin. Toutes ces traductions figuratives n'auront finalement en commun que le concept de triangle rectangle, concept qui reste *in fine* invisible aux yeux de tous.

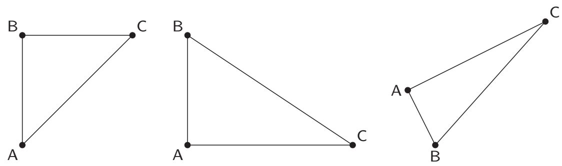


Figure 1. *Trois représentations différentes d'un même énoncé.*

Il en sera de même lors de l'opération inverse, celle qui consiste à mettre en mots une représentation graphique. Décrire par la verbalisation le premier triangle de la figure 1 consiste à sélectionner des mots, à choisir leur organisation en fonction de l'ordre que l'on priorise pour les différentes actions permettant de construire la figure. Cette suite de mots est une nouvelle représentation de la figure relevant d'une interprétation personnelle. Selon les expériences personnelles des élèves et de leurs connaissances, les propositions seront diverses.

En classe de mathématiques comme dans tout contexte d'interactions langagières, pour se comprendre il est préférable de parler la même langue, c'est-à-dire utiliser un registre de signes ayant du sens (et si possible le même) pour les interlocuteurs. Cependant, une des spécificités des mathématiques est que ses objets se prêtent à des représentations diverses lorsque l'on passe de l'oral à l'écrit et inversement, et que ces passages utilisent des règles souvent implicites qui mettent en difficulté les élèves. Cette problématique est celle des registres de représentation qui a été étudiée dans de nombreux travaux dont ceux de Duval [9]. Il insiste notamment sur les risques conséquents à ces difficultés qui peuvent conduire à la confusion entre le concept et sa représentation.

> [...] *les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. En effet, toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage* [9].

Dans les travaux de Duval, sont notamment distingués deux types de transformations d'une représentation : le traitement et la conversion. Le traitement consiste à transformer une expression mathématiques en une autre qui lui est équivalente en restant dans le même registre. Passer de $2x + 3 = y$ à $x = \dfrac{y-3}{2}$ est par exemple un traitement car la transformation s'effectue dans le registre symbolique. En revanche, si l'on trace le graphe de la fonction $y = 2x + 3$ on effectue une conversion : on passe du registre symbolique formel au registre graphique (figure 2).

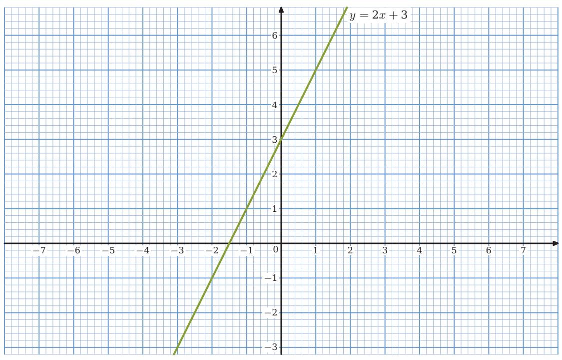


Figure 2. *Conversion de registres pour la fonction* $y = 2x + 3$.

Même si l'enseignant et ses élèves sont familiers de ces opérations de traitement ou de conversion de registres, il n'en reste pas moins que ces micro-évènements langagiers sont régulièrement sources de difficulté chez les élèves. Dans une situation de communication ordinaire en classe de mathématiques, ces phénomènes peuvent par ailleurs se répéter à de très nombreuses reprises dans un temps parfois très court. Comme ces changements sont rarement explicites, certains élèves peuvent décrocher dans l'enchaînement de ces différentes propositions.

Pour illustrer ce type d'implicite, on peut prendre l'exemple d'une identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

La connaissance de cette équivalence est un attendu de l'école, elle doit être mémorisée assez tôt dans la scolarité d'un élève. Cependant, en suivant Duval, transformer l'écriture $(a+b)^2$ en $a^2 + 2ab + b^2$ est une opération de traitement. On doit donc considérer que, pour utiliser avec efficience cette équivalence, elle doit être en quelque sorte automatisée pour servir dans une explication ou une preuve, tout comme on utiliserait des adjectifs ou des synonymes pour convaincre.

Le passage de la formulation orale à une représentation symbolique et écrite soulève de nombreuses surprises dans les interprétations qui sont possibles entre des locuteurs. Il existe ainsi plusieurs verbalisations différentes d'une même représentation symbolique comme on peut le voir dans les exemples suivants où quatre formulations orales différentes et deux représentations symboliques sont possibles pour un même concept (le nombre 36) :

- « six fois six » $\to 6 \times 6$
- « six multiplié par six » $\to 6 \times 6$
- « six au carré » $\to 6^2$
- « six exposant deux » $\to 6^2$

Verbaliser ne suffit pas à rendre compréhensible. On se heurte au phénomène de non-transparence du langage : des sujets en interactions orales sont constamment dans l'obligation de se faire les interprètes de la parole de l'autre. Lorsque ce sont les élèves qui parlent, l'enseignant est soumis lui aussi à la prudence des interprétations des énoncés qu'il entend. Pensée et langage sont distincts, donc la mise en mots par les élèves de leurs connaissances mathématiques ne suffit que très rarement à accéder à leur étendue.

« On ne peut pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celles de traitement » (Duval, 1993, p. 39).

Proposition : permettre l'expression dans différents registres mais assurer la compréhension des processus qui permettent de passer de l'un à l'autre.

Diversité des compétences langagières

De fortes disparités existent dans les compétences langagières des élèves quel que soit leur âge ou leur niveau de scolarité. Des disparités qui sont souvent constatées au sein d'une même classe d'élèves quant à leurs compétences en lecture, en expression écrite et dans la pratique de la langue orale. Or, comme pour la plupart des autres disciplines scolaires, les situations d'apprentissage en mathématiques s'appuient sur l'ensemble des compétences langagières, en faisant souvent le pari qu'elles sont bien là, *a priori*, et à disposition de tous les élèves. Ceux-ci doivent lire des consignes, rédiger des comptes rendus ou des conclusions, échanger à profusion, et dans toutes ces activités, la langue est le vecteur incontournable. Mais qu'en est-il des locuteurs en difficulté dans la maîtrise de ces compétences langagières ? Sont-ils privés des apports des moments d'échange en classe ?

Échanger ou débattre relève d'une pratique efficace de la langue notamment quand il faut défendre une idée, l'argumenter, voire contredire une proposition. Ces compétences langagières de haut niveau sont très discriminantes entre les sujets, certains les utilisant avec facilité et à bon escient, les autres en étant tout simplement dépourvus. Les jeux de langage [10] ne sont alors pas les mêmes pour tout le monde, et si l'on met la loupe sur les élèves présentant des difficultés langagières (voire plus grave encore, présentant des troubles), force est de constater que tout moment dédié au débat ou même plus modestement aux échanges, devient pénalisant pour eux sans une aide ou une adaptation spécifique. Cet étayage relève d'une compétence professionnelle experte car elle doit être ajustée à la fois aux besoins de l'élève tout en garantissant le respect de ses formulations, y compris quand elles sont hésitantes ou erronées. Il est très difficile de garder un cap sans négocier à la baisse ou aboutir à une trop grande segmentation de l'activité [11] conduisant progressivement à dénaturer la situation d'apprentissage en termes de signification pour l'élève.

Le choix du dispositif social adapté à ce type d'échanges entre enseignant et élève peut s'appuyer sur les éléments de réflexion suivants :

- privilégier un dialogue privé (sans interaction avec d'autres élèves) lorsqu'il s'agit de comprendre, d'évaluer ou de mettre en évidence les besoins lexicaux et syntaxiques mathématiques relatifs à un savoir bien identifié ;
- organiser des interactions au sein d'un petit groupe d'élèves ayant des compétences langagières de niveau homogène en s'assurant que les objets de savoirs sont identifiés par tous ; dans ce cas, la présence de l'enseignant peut être décroissante et remplacée progressivement par d'autres ressources ;
- instaurer des débats en classe entière proposant des échanges entre des binômes d'élèves (et non pas des individus isolés) afin de tutorer les prises de paroles plus fragiles.

La finalité de tels aménagements préventifs est la construction d'un climat de classe tolérant aux prises de parole des plus solides et argumentées aux plus hésitantes et fragiles. Le rôle de l'enseignant y est fondamental dans l'élaboration d'un environnement adapté à l'expression de la diversité des langages mathématiques, qu'ils relèvent de la langue naturelle ou d'un registre plus symbolique. C'est par l'expérimentation régulière de telles situations de communication que l'on peut progressivement construire le passage d'un *everyday language* à l'emploi de formulations plus conventionnelles [12].

Proposition : varier les dispositifs sociaux permettant l'expression des idées mathématiques dans différents contextes : en échange privé avec l'enseignant, dans de petits groupes d'élèves ayant le même niveau de pratique langagière par exemple.

Faire des maths pour dire des maths

Pour terminer, il parait essentiel de rappeler ici que, même si la verbalisation est une pratique fondamentale dans la construction des connaissances mathématiques, elle a besoin d'un substrat qui ne se limite pas à l'expression ou l'échange de signes langagiers. Une pratique des mathématiques exclusivement portée par le support langagier prive les élèves d'un rapport plus expérimental et peut être dénoncée légitimement comme trop abstraite par ses acteurs. En développant ce rapport d'expérience aux objets mathématiques, il s'agit de permettre aux élèves de faire *leurs mathématiques* par la découverte, l'exploration, la création, ou toute activité pendant laquelle les expressions ne se limitent pas aux contenus des échanges langagiers. Une forme du *constructionnisme* cher à Papert dans un projet qualifié de visionnaire [13].

Les contextes et les situations qui permettent aux élèves d'échanger et de débattre en appui sur des gestes permettent de donner du sens aux objets conceptuels de référence et servent aussi de catalyseurs à une participation de tous les acteurs. Les actes, les constructions constituent un matériau objectif et partagé comme nous l'avons montré à plusieurs reprises dans nos travaux notamment dans des contextes d'enseignement spécialisé [3], [14], [15] par exemple. Dans de tels contextes, les mises en mots des élèves vont de simples formulations descriptives des actes et des objets construits, à des tentatives d'explication ou de justification.

Comme nous l'avons cependant relevé dans certaines de nos expériences [3], les élèves montrent parfois d'importantes difficultés dans l'expression (lexique pauvre, syntaxe parfois limitée). Cela dit, les échanges et les interactions sont néanmoins fructueux et bien souvent, la collaboration aboutit à une compréhension suffisante entre les locuteurs. Nous sommes conscients que le recours à la manipulation, aux gestes, ou plus globalement à une forme d'*embodied cognition* ne fonctionne que si l'environnement d'apprentissage permet l'expression du doute, la liberté créative et cultive la découverte sans *a priori*.

Proposition : faciliter la verbalisation des élèves dans des situations d'apprentissage faisant la part belle à la découverte et la créativité, aux expériences, aux manipulations et aux constructions afin de donner un support et une référence partagée au langage.

Exemples :

- construction de polyèdres en grande dimension comme décrit dans un article récent de cette revue [16] ;
- organiser des recherches au sein d'un laboratoire de mathématiques comportant de nombreuses ressources matérielles susceptibles de fournir des représentations variées des objets mathématiques ;
- faire construire des étalons d'unités de mesure pour différentes grandeurs.

Conclusion

Dans cet article, je me suis permis d'attirer votre attention sur les contraintes qui jalonnent les pratiques de verbalisation dans une classe lorsqu'on enseigne les mathématiques. Cela ne signifie pas qu'il faille renoncer face à la difficulté bien entendu. La verbalisation n'est pas à proprement parler une mission impossible comme annoncé dans le titre de manière un peu provocatrice. Elle est légitime et bénéfique, mais reste néanmoins une pratique nécessitant l'aménagement d'environnements didactiques adaptés. Il s'agit de tout mettre en œuvre pour donner aux élèves les ressources nécessaires à ces *jeux de langage* [10] pour qu'ils soient convaincus de leur valeur ajoutée dans leurs apprentissages. Ils ne doivent pas les assimiler à des exercices de communication stériles destinés à faire passer le temps bon an mal an. À nous enseignants de les convaincre que les mathématiques sont un magnifique terrain de jeu du fait de leurs objets qui peuvent être exprimés sous des formes diverses et variées légitimant les échanges et les débats en classe.

Mais pour devenir expert dans le maniement de ces formes d'expression, il faut en connaître la grammaire et le lexique. Il est également nécessaire de les expérimenter dans des contextes différents et notamment dans des situations où le langage comporte une dimension en acte c'est à dire lorsqu'ils s'agit d'expliquer, de convaincre ou de prouver. On le voit une fois encore, notre rôle d'enseignant est ici capital, il peut faire réussir ou échouer ce projet notamment par notre capacité à prendre en compte l'extraordinaire hétérogénéité des compétences langagières des élèves de chaque classe.

Le triptyque *agir-penser-parler* de Bernié [2] que j'ai cité en tout début de cet article est selon moi propre à fonder une communauté discursive, à construire dans chacune de nos classes, avec chacun de nos élèves. C'est un objectif ambitieux relevant de compétences professionnelles complexes, mais le jeu en vaut la chandelle.

Références

[1] E. Runtz-Christant et J-F. Coen. « Parler pour former et se former ou se former à parler ». In : *Formation et pratiques d'enseignement en questions* Hors-série nº 2 (2017), pp. 7-12.

[2] Jean-Paul Bernié. « L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de communauté discursive : un apport à la didactique comparée ? » In : *Revue française de pédagogie* (2002), pp. 77-88.

[3] T. Dias. « La place de la verbalisation dans les situations didactiques en mathématiques ». In : *Formation et pratiques d'enseignement en questions* Hors-série nº 2 (2017), pp. 91-103.

[4] M. Chanudet. « La place de la verbalisation dans l'activité de résolution de problèmes en mathématiques : le cas du problème des portes de prison ». In : *Raisons éducatives* nº 23 (1) (2019), pp. 125-151.

[5] Christophe Hache et Emmanuelle Forgeoux. « Vrai ou faux ? Parlons-en ! » In : *Au fil des maths* nº 528 (juillet 2018). , pp. 49-54.

[6] Thierry Dias. *Enseigner les mathématiques à l'école : Une démarche positive pour des apprentissages réussis*. Paris : Magnard, 2018.

[7] J. R. Searle. *Speech acts : An essay in the philosophy of language*. Londres : Cambridge university press, 1969.

[8] John Langshaw Austin. *Quand Dire, C'est Faire*. Paris : Le Seuil, 1991.

[9] R. Duval. « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». In : *Annales de didactique et de sciences cognitives* nº 5.1 (1993), pp. 37-65.

[10] J-L. Heraud et J-P. Errera. « Sémantique et didactique des jeux de langage ». In : *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*. Sous la dir. de V. Durand-Guerrier, J-L. Heraud et C. Tisseron. Lyon : Presse Universitaire de Lyon, 2006, pp. 15-39.

[11] Martine Champagne et Lalina Coulange. « Pratiques langagières et difficulté scolaire : des questions didactiques ou pédagogiques ». In : *Éducation et formation* nº 312 (2019), pp. 65-79.

[12] Richard Barwell. « Formal and informal mathematical discourses : Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic ». In : *Educational Studies in Mathematics* nº 92.3 (2016), pp. 331-345.

[13] Geneviève Barbare et Jérome Proulx. « Révolutionner l'enseignement des mathématiques : le projet visionnaire de Seymour Papert ». In : *For the Learning of Mathematics* nº 37.2 (2017). , pp. 25-29. issn : 02280671.

[14] Thierry Dias et Jimmy Serment. « Formation à la géométrie dans l'espace par la construction de polyèdres ». In : *43e colloque de la COPIRELEM*. Le Puy en Velay : ARPEME, 2016.

[15] Thierry Dias. « Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves ». In : *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation* 1 (2014), pp. 151-161.

[16] T. Dias et J. Serment. « Faire de la géométrie en grand ». In : *Au fil des maths* nº 535 (2020), pp. 37-41.

Thierry Dias est professeur au sein de la Haute École pédagogique du canton de Vaud (UER Mathématiques et Sciences). Il travaille entre autres sur la place de la manipulation et de la verbalisation dans la construction des connaissances mathématiques.

thierry.dias@hepl.ch

Sommaire du nº 538

Mathématiques à l'oral

APMEP

www.apmep.fr