

Le bulletin de l'APMEP - N° 538

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2020

Mathématiques à l'oral



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 215

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : Sébastien PLANCHENAU.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Lise MALRIEU.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2020

Impression : Imprimerie Corlet.

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau ISSN : 2608-9297



Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré

La géométrie enseignée, de l'enseignement primaire à l'université, se construit comme une modélisation de l'espace physique et évolue d'une « géométrie de l'observation » à une « géométrie de la démonstration ». Bernard Parzysz développe ce point de vue dans le cas d'une tâche de modélisation d'un objet matériel, et plus précisément d'un décor de type « géométrique », mettant en œuvre le méso-espace.

Bernard Parzysz

Travaillant depuis plusieurs années en collaboration avec des archéologues spécialistes du décor antique, j'ai pensé que ma démarche dans ce domaine pouvait être transposée dans l'enseignement, et pour la présenter je prendrai comme exemple un panneau de mosaïque romaine¹. Mais il va sans dire que, dans une classe, on peut utiliser bien d'autres types de supports : fresque murale, tissu, tapis, papier peint, etc.

Mais tout d'abord, dans quelles géométries les élèves évoluent-ils au long de leur scolarité obligatoire ? Les enfants sont d'abord confrontés aux objets matériels, dont ils ne retiennent progressivement que certains éléments, jugés pertinents pour résoudre les problèmes qui leur sont posés. Dans cette première géométrie (paradigme G1 de Houdement et Kuzniak [1]) les objets d'étude sont physiques et la validation est de type perceptif, éventuellement instrumentée. Mais un objectif important de l'enseignement obligatoire est d'amener les élèves à travailler dans une géométrie euclidienne (paradigme G2 de Houdement et Kuzniak [1]), dans laquelle les objets d'étude sont théoriques et la validation hypothético-déductive. **La difficulté principale dans l'accès à ce second paradigme est le fait que G1 comme G2 utilisent des « figures »,**

sous la forme de dessins ou d'images d'ordinateur, mais les deux géométries le font de façons totalement différentes qui risquent de rester implicites sauf en cas de blocage : dans G1 les figures sont l'objet d'étude, et l'élève y apprend à utiliser les instruments usuels de tracé, notamment pour réaliser des tâches de construction ou de reproduction ; dans G2, au contraire, l'objet d'étude est théorique et la figure n'en est qu'une représentation physique qui est utilisée dans un but heuristique. Mathé et al. [2] indiquent à ce propos qu'« un autre rapport [que la géométrie physique] mérite d'être développé dans l'enseignement, celui d'une théorie physique de l'espace qui correspond dans ses grandes lignes au paradigme G1 d'Houdement et Kuzniak, mais avec des reports de grandeurs sans les mesures » [2, p. 29]. L'objectif de cette « géométrie des tracés » est de créer un lien entre un usage raisonné des instruments (hormis la règle graduée et le rapporteur) et les concepts géométriques. L'exclusion de la mesure est justifiée par l'idée que, « quand des valeurs numériques sont données, les nombres sont prégnants pour les élèves et les détournent des notions géométriques » [2, p. 44].

La géométrie des tracés sans recours à la mesure est exactement celle du maître d'œuvre mosaïste antique (le pictor). D'une

1. Dans la mosaïque romaine, les décors « géométriques » sont de loin les plus abondants, même si ce sont les décors figurés qui sont le plus représentés dans les publications. On dispose ici d'une masse considérable de documents exploitables en classe.



part, étant donné la complexité, tant du système de mesures que du système de numération romains, toute opération numérique était de fait quasi impossible. D'autre part, son instrument de tracé principal était le cordeau, éventuellement complété par une règle (non graduée) et une équerre. Le cordeau était véritablement le « couteau suisse » du mosaïste : il pouvait notamment lui servir à tracer des lignes droites, des cercles et à reporter des longueurs, et on peut véritablement parler ici d'une *géométrie du cordeau*. La tâche du *pictor* consistait tout d'abord à concevoir un décor issu de ses connaissances géométriques et tenant compte de diverses contraintes de faisabilité (matériaux, instruments, outils, etc.). Il devait ensuite — soit directement, soit par l'intermédiaire d'une représentation graphique auxiliaire — implémenter *in situ* les lignes directrices de ce décor, puis confier à des artisans spécialistes la tâche de le réaliser sur cette base, supervisant leur travail pour parer à une dérive éventuelle. **Pour illustrer mon propos je prendrai maintenant l'exemple d'un pavement de mosaïque gallo-romaine du deuxième siècle de notre ère** [3] dont 17 m² furent découverts en novembre 1994 au centre-ville de Metz, rue de la Pierre Hardie (fig. 1).



Figure 1. Metz, vue de la mosaïque in situ (cl. L. Gébus, SRA).

Il s'agit d'un panneau noir et blanc² qui se compose de deux parties distinctes, séparées par un double filet noir. Cette mosaïque est aujourd'hui exposée au musée de la Cour d'Or de Metz (fig. 2).

Sur la base de ces deux documents, on peut commencer par proposer à la classe de décrire les

éléments géométriques qu'ils y repèrent.

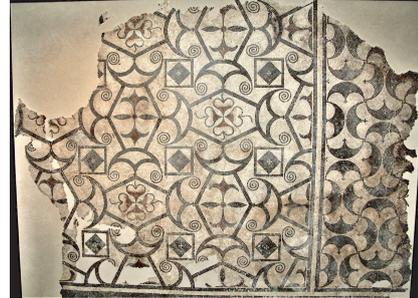


Figure 2. Metz. Mosaïque exposée au musée de la Cour d'Or de Metz (cl. B.P.).

Apparaîtront alors les termes *droite*, *segment*, *carré*, sans doute *cercle* (et *demi-cercle*), et peut-être même *losange*. Cette identification des éléments étant faite, on peut demander de déterminer, pour chacune des deux parties du panneau, un *réseau carré* permettant de dessiner son décor sans l'avoir sous les yeux³ (en excluant, pour l'instant du moins, les motifs végétaux).

Les premiers réseaux qui apparaîtront sont sans doute en premier (fig. 3) :

- pour la partie A (à droite sur la figure 2) : un réseau dont chaque maille renferme deux peltes⁴ adossées (fig. 4) ;
- pour la partie B (à gauche sur la figure 2) : un réseau dont les lignes correspondent aux grands axes des « losanges tronqués ».

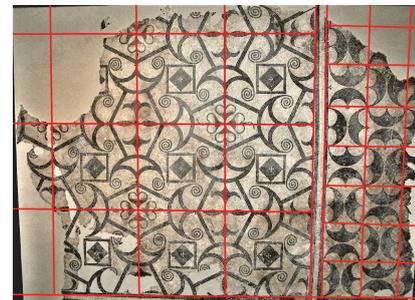


Figure 3. Les deux réseaux primaires.

Mais ces réseaux sont insuffisants pour reconstituer l'un comme l'autre des deux décors.

2. Avec quelques touches de rouge dans les motifs végétaux.

3. Le recours à un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra ou Cabri, permettant d'insérer une image dans un fichier et de lui superposer des tracés, s'avère ici extrêmement utile.

4. L'assemblage de trois demi-cercles qu'on trouve ici en nombre est appelé *pelte* ; il passe pour représenter, vu de profil, le bouclier des légendaires Amazones.



Pour le panneau A, il suffit de subdiviser le module en deux (fig. 5, à droite); chaque paire de peltes correspond alors à un carré de 2×2 (fig. 4). On quitte alors l'espace physique pour l'espace graphique. Dans cet espace, on peut demander aux élèves de rédiger un programme de construction d'une pelte à partir de la donnée d'un segment.

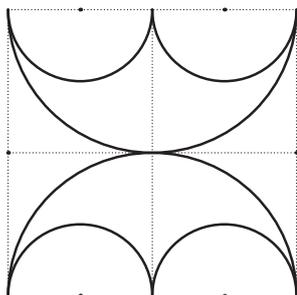


Figure 4. Panneau A : peltes adossées.

De même, pour le panneau B, on cherche une subdivision du réseau primaire qui rende compte des points et lignes « importants » du décor; les côtés des petits carrés fournissent la réponse (fig. 5, à gauche), et on admet que ce nouveau réseau s'obtient en divisant le module initial en trois.

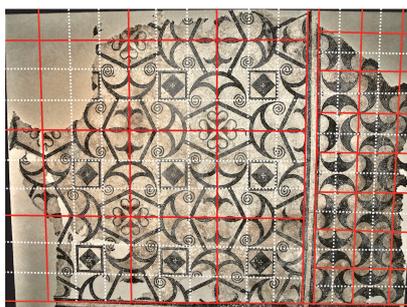


Figure 5. Les deux réseaux secondaires.

On voit alors apparaître, sous deux orientations, un motif répétitif dans des carrés de 4×4 , constitué d'un losange à chaque sommet duquel vient se placer une pelte identique à celles du panneau A; ces peltes sont orientées vers l'extérieur aux angles obtus et vers l'intérieur aux angles aigus, ces dernières recouvrant partiellement le losange. Enfin, les mailles situées aux angles du carré constituent les petits carrés du décor (fig. 6).

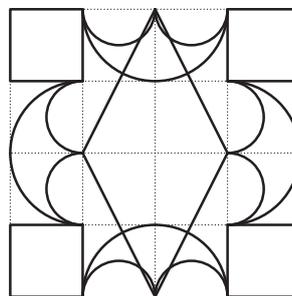


Figure 6. Panneau B : schéma du motif unitaire.

On peut alors demander la rédaction d'un programme de construction, ce qui va nécessiter un codage des « nœuds » du réseau, sous la forme de lettres et/ou d'un proto-système de coordonnées. On sera ainsi à même de reconstituer — et peut-être même de mémoire — un schéma complet des deux panneaux... à condition de connaître leur extension. Heureusement, en réponse à cette interrogation un archéologue a publié un relevé d'ensemble de la mosaïque (fig. 7) qui va nous être bien utile.

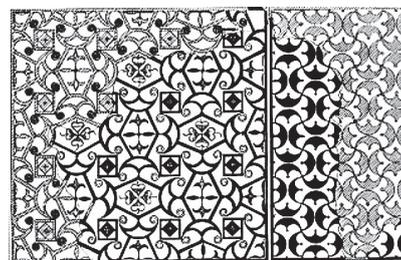


Figure 7. Relevé de l'ensemble de la mosaïque [4].

La comparaison avec nos documents montre que le panneau A est construit sur un réseau de 18×10 et le panneau B sur un réseau⁵ de 12×12 .

Pour le panneau B, on peut également remarquer (fig. 3) que, abstraction faite des peltes, chaque maille du réseau primaire contient un carré penché, alternativement vers la droite, et vers la gauche. Mais au fait, s'agit-il bien d'un carré? On peut alors le vérifier aux instruments sur un dessin (G1) ou, si les connaissances des élèves le permettent, passer dans la géométrie théorique (G2) et chercher une démonstration, en utilisant,

5. Les deux panneaux ayant même hauteur, il en résulte que le module du panneau B vaut une fois et demie celui du panneau A.





selon le cas, triangles égaux, théorème de Pythagore, angles alternes internes etc. (fig. 8)

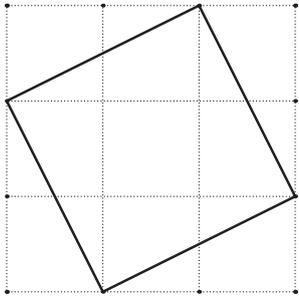


Figure 8. « Carré penché » du panneau B.

Il résulte en tout cas de la remarque faite plus haut qu'il est sans doute plus facile de restituer le décor du panneau B en commençant par les carrés penchés, c'est-à-dire en se basant sur le réseau primaire, complété par le réseau secondaire. D'où une première étape de la reconstitution (fig. 9a), sur laquelle il ne restera plus qu'à placer les peltes aux sommets des losanges apparus miraculeusement (fig. 9b), munis éventuellement de leurs volutes.

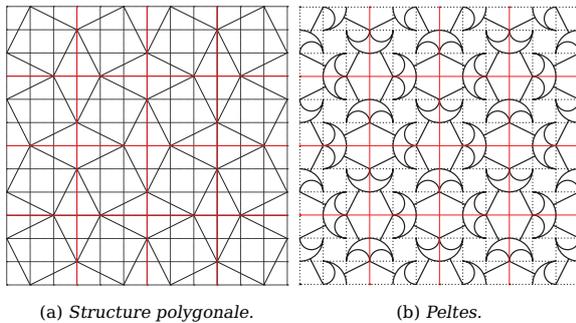


Figure 9. Panneau B : schéma global.

Sur deux feuilles de papier quadrillé, les élèves peuvent maintenant reproduire les deux schémas directeurs, d'une part celui du panneau A (éventuellement à main levée), et d'autre part celui du panneau B. Ils sont pour cela amenés à faire agir diverses transformations sur les éléments de base (carré penché pour le panneau B, demi-cercles pour les deux panneaux). Ils ont donc maintenant à leur disposition un schéma complet du décor de

la mosaïque de Metz (fig. 10), qui leur permettra de le reproduire de mémoire à partir d'un unique élément de départ (carré penché ou pelté), une fois installés les deux réseaux.

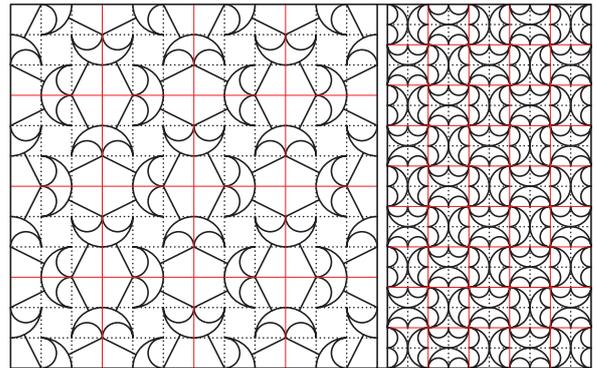


Figure 10. Schéma d'ensemble de la mosaïque.

Enfin, si l'on souhaite préciser ce schéma, et ainsi pénétrer plus avant dans l'univers des mosaïstes, on peut encore s'intéresser à la façon dont les tesselles⁶ ont été posées, une fois les tracés directeurs réalisés. Des gros plans sur les documents nous fournissent des renseignements fort intéressants.

Pour le panneau A (fig. 11), on s'aperçoit par exemple que les nœuds du réseau primaire (rouge) sont matérialisés par une tesselle blanche, tandis que les intersections des lignes des deux réseaux (rouge / blanc) sont figurées par une croisette noire, deux éléments qui, outre leur apport esthétique, sont destinés à faciliter ensuite la mise en place des peltes. On voit ici clairement la distinction entre l'objet physique et le modèle graphique, puisque dans celui-ci les tesselles sont réduites à un point⁷.



Figure 11. Implantation des peltes du panneau A.

6. Les tesselles sont les petits dés de pierre, de céramique ou de verre, d'environ 1 cm de côté, à l'aide desquels est réalisée la mosaïque.

7. On peut à cette occasion évoquer le parallèle avec la géométrie des pixels.



Pour le panneau B (fig. 12), on constate que les losanges et les peltes sont figurés par un triple rang de tesselles noires posé à l'intérieur du tracé directeur, alors qu'on n'a qu'un double rang de tesselles pour les petits carrés. Les volutes, quant à elles, sont composées d'un simple rang de tesselles noires séparé par un rang de tesselles blanches.

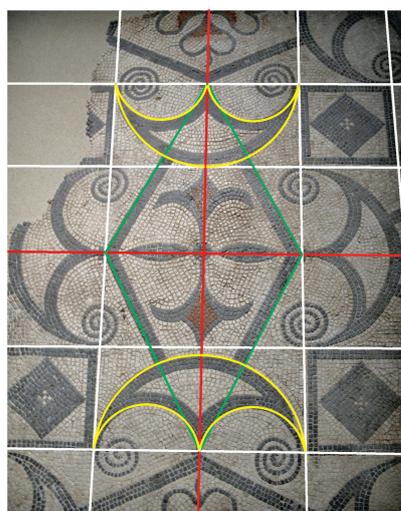


Figure 12. Implantation du motif du panneau B.

Cette démarche collective de modélisation nous aura donc fait passer de l'espace sensible (la mosaïque) à l'espace graphique (les documents photographiques, le dessin sur papier quadrillé ou sur écran d'ordinateur), et éventuellement à la géométrie théorique (la démonstration du « carré penché »), avec un retour sur les clichés pour préciser la façon dont le décor a été posé. Un schéma de Mathé *et al.* [2, fig. 4 p. 32], que j'ai adapté à l'étude du décor, illustre l'articulation de ces trois espaces (fig. 13).

Dans la scolarité obligatoire, l'enseignement de la géométrie ne fait que très (trop) rarement intervenir d'autres espaces de travail que le micro-espace⁸. Pourtant, lorsque l'on a besoin de connaissances géométriques pour résoudre un problème de la vie courante, c'est le plus souvent dans un autre espace qu'on est plongé. Dans cet espace, le sujet n'est pas extérieur à

l'espace mais y est inclus, et pour entreprendre une résolution géométrique — c'est-à-dire une modélisation de la situation — il se trouve en général amené à réaliser une représentation graphique des objets en jeu (croquis, schéma, dessin à l'échelle, épure, ...). Initier les élèves à ce type de démarche associant situation matérielle, espace graphique et géométrie théorique n'est donc pas sans intérêt dans la formation de l'individu.

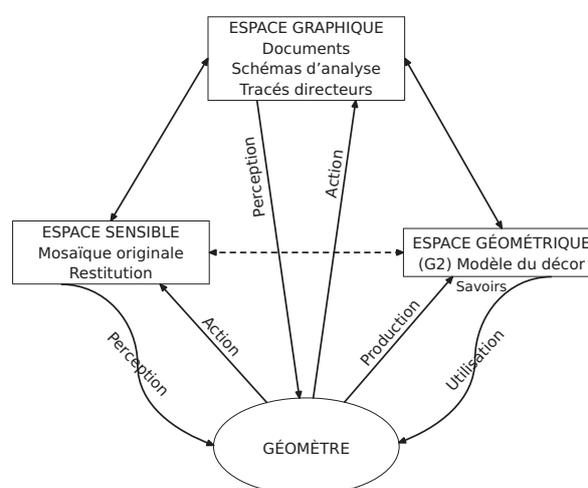


Figure 13. Articulation des trois espaces au cours de la démarche.

Pour l'instant notre démarche s'est déroulée entièrement dans le micro-espace, tandis que la « vraie » mosaïque se situe dans le méso-espace, celui « des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, (où) les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet » [5]. Le sujet, qui se situe à l'intérieur du méso-espace, et non à l'extérieur comme dans le micro-espace, peut encore avoir une vision globale de l'objet étudié, mais les changements de point de vue sont plus difficiles, et par conséquent les contrôles également. Reconstituer le décor de la mosaïque en vraie grandeur au sol relève du méso-espace, et réaliser le schéma directeur « comme le mosaïste romain », avec les mêmes instruments, va permettre de tester le modèle élaboré et, *via* des procédures de construction et de contrôle spécifiques, de faire évoluer les

8. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter le site personnel de Jean-Luc Brégeon [▶](#) ou celui de l'académie de Reims [▶](#).





conceptions géométriques des élèves [6]. C'est la raison pour laquelle je crois qu'il peut s'avérer intéressant de proposer à une classe de collège un travail d'équipe consistant à reproduire en vraie grandeur, aussi précisément que possible, par exemple sur le sol cimenté de la cour de récréation ou sur un mur, le dessin d'un panneau de mosaïque romaine. On n'utiliserait pour cela que des craies de couleur et les instruments en usage à l'époque, c'est-à-dire au premier chef un bout de ficelle (le cordeau)⁹, permettant non seulement de tracer des droites et des cercles mais aussi de reporter des longueurs. Ce travail serait bien entendu précédé d'un travail à petite échelle visant à déterminer le modèle géométrique du décor et à étudier ses propriétés.

Prenons l'exemple du panneau B : la première difficulté — dont dépendra le reste de la réalisation — va être de délimiter un grand carré qui contiendra la totalité du décor, et donc de déterminer une procédure permettant de l'obtenir : va-t-on commencer par les côtés ou par les diagonales ? Comment vérifier le résultat ? Ces procédures renvoient à des définitions différentes du carré (rectangle aux diagonales perpendiculaires, losange aux diagonales égales, ...) sur lesquelles on pourra ensuite travailler en classe. La seconde difficulté est la mise en place du réseau primaire, qui s'obtiendra en divisant en quatre les côtés du carré : une ficelle repliée deux fois fournira la solution. Il s'agira ensuite de diviser en trois chacune des quatre longueurs des côtés. Deux méthodes sont alors possibles pour partager en trois une longueur AB :

- la méthode « artisanale » (très certainement celle du mosaïste), dite « par balancement » : « Prenez une ouverture de compas qui vous semblera être le tiers de AB, et portez-la trois fois aux points c, d, e. Le point e ou la troisième division tombant au-delà du point B, il est évident que l'ouverture du compas est trop grande. Fermez alors les branches du compas, d'une quantité qui vous paraîtra être le tiers de la différence, et recommencez la division ; opérez ainsi,

jusqu'à ce que la troisième division tombe au point B. » [7, p. 10]

- la méthode « savante », qui repose sur le théorème de Thalès : sur une demi-droite $[Ax)$ on porte un point M, puis le symétrique N de A par rapport à M et le symétrique P de M par rapport à N. On trace ensuite la droite (BP) et on mène par M et N les parallèles à (BP). Leurs points d'intersection avec $[AB]$ partagent ce segment en trois longueurs égales.

Ceci fournit, en fin de collège, une occasion de revenir sur la différence entre une construction « exacte » et une construction « précise », c'est-à-dire entre géométrie pratique et géométrie théorique : la première méthode peut être très précise si on y apporte beaucoup de soin, mais elle nécessite de faire des essais ; la seconde donne le résultat du premier coup, mais elle nécessite de tracer des parallèles, ce qui, sur le terrain, est toujours délicat.

Une fois la grille installée, la mise en place fera intervenir les transformations de figures (symétries, translations) ... et fera peut-être entrevoir les effets de composées de transformations sur une figure.

Ce que j'ai ici exposé sur un seul exemple peut bien sûr être réalisé à partir de bien d'autres supports, en adaptant la difficulté de la tâche aux élèves, à des mosaïques, bien sûr, notamment avec la base de données Henri Stern , mais pas seulement. Je suis persuadé qu'il s'y trouve non seulement une source d'activités motivantes pour la classe, mais aussi une voie d'accès particulièrement bien adaptée vers la géométrie théorique. Et pour conclure, je ne saurais mieux faire que de citer un extrait de la conclusion de la thèse de Berthelot et Salin, qui me semble plus que jamais d'actualité : « Nous avons proposé de référer clairement ces activités à une problématique de modélisation de la réalité spatiale. Ceci pose la question de la pertinence de l'extension de cette réalité hors de la feuille de papier, et de l'étude du rôle de la taille de l'espace dans l'établissement

9. On peut bien sûr autoriser, ou faire fabriquer, une grande équerre.



du sens de la modélisation. L'étude de ce type de problèmes, permet d'en montrer la richesse sur le plan du développement de méthodes et de raisonnements dont certains formeront la base de compétences nécessaires à la géométrie strictement mathématique. [...] La question de l'initiation des élèves à la géométrie se trouve ainsi transformée : ce n'est plus seulement un saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique qui peut être envisagé ; on peut aussi concevoir d'aménager l'entrée dans la problématique de modélisation, puis des aller-retours entre cette problématique, où les concepts de la géométrie ont un statut d'outil et commencent à figurer dans des raisonnements, et la problématique de la géométrie, où ils sont considérés comme des objets. » [6, p. 362]

Références

- [1] C. Houdement et A. Kuzniak. « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie ». In : *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* n° 11 (2006), pp. 175-195.
- [2] A.-C. Mathé, T. Barrier et M.-J. Perrin-Glorian. « Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités ». In : *Les sciences de l'éducation aujourd'hui*. Louvain-la-Neuve : Academia – L'Harmattan, janvier 2020. ISBN : 978-2-8061-0500-4.
- [3] B. Parzys. « À propos d'une mosaïque découverte à Metz ». In : *Maths et Arts*. Régionale APMEP de Lorraine (2008).
- [4] P. Flotté. *Carte archéologique de la Gaule. 57/2 Metz*. Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 2005.
- [5] G. Brousseau. « Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie ». In : *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Université Joseph Fourier, laboratoire LSD IMAG. Grenoble, 1983.
- [6] R. Berthelot et M.-H. Salin. « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. » Thèse. Université Bordeaux I, 1992.
- [7] A. Bouillon. *Principes de dessin linéaire*. Paris : Hachette, 1839.

Note : les fichiers GeoGebra évoqués dans l'article sont disponibles dans la version numérique de l'article. B. Parzys tient les fichiers Cabri à la disposition des collègues intéressés.



Bernard Parzys est professeur émérite de l'université d'Orléans, membre du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz) de l'université Paris-Diderot, et animateur à l'IREM de Paris-Diderot. Il collabore avec fidélité aux publications de l'APMEP.

parzys.bernard@wanadoo.fr

© APMEP Décembre 2020



Clin d'œil n° 1.



Sommaire du n° 538

Mathématiques à l'oral

Éditorial

Opinions

Entrée dans le supérieur en septembre 2021 : que sait-on ? — Alice Ernoult, pour la commission « Enseignement supérieur »

La verbalisation en classe de mathématiques : mission impossible ? — Thierry Dias

Avec les élèves

Des murs pédagogiques pour travailler l'oral en classe — Luca Agostino

Loyd vs Dudeney — Emmanuelle Pernot & Fatih Pinar

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré — Bernard Parzysz

Quel oral pour un élève porteur d'une déficience visuelle ? — Nathalie Schalk

Démontrer en vidéo — Christophe Hache & Étienne Quinchon

1 **Ouvertures** 51

3 Partage d'un secret — Fabien Herbaut & Pascal Véron 51

Mathématiques contées — Marie Lhuissier 59

3 Mathématiques et systèmes de retraite — Pierre Carriquiry 66

17 **Récréations** 75

Géométrie des pizzas — Jean-Pierre Friedelmeyer 75

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 81

Au fil du temps 84

Matériaux pour une documentation 84

La « méthode des coordonnées » de Descartes — Martine Bühler 90

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 94



Culture**MATH**



APMEP

www.apmep.fr