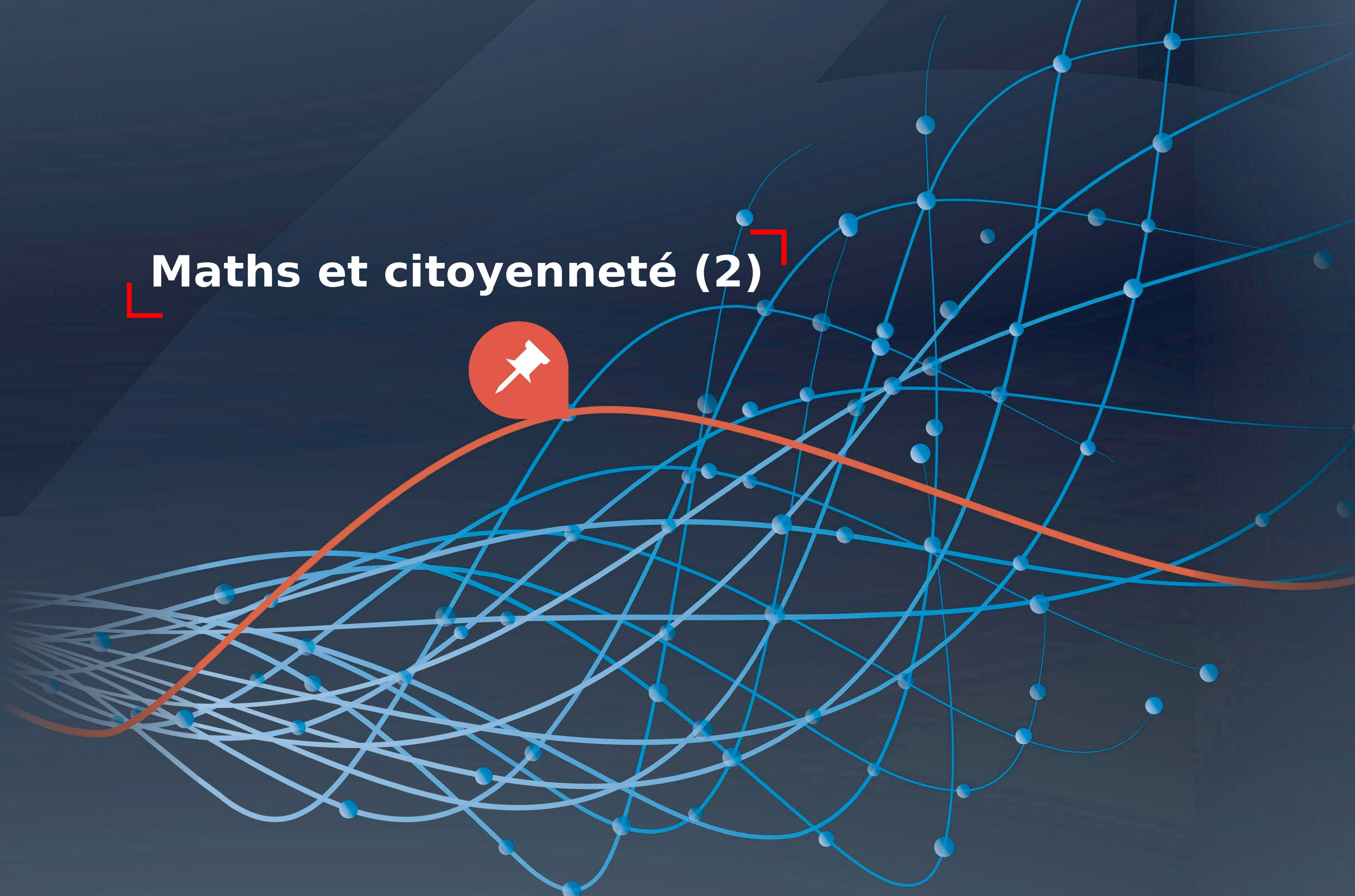
Le bulletin de l'APMEP - N° 542

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2021

Maths et citoyenneté (2)



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien PLANCHENAULT*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *François BOUYER, Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Yann JEANRENAUD, Céline MONLUC, Christophe ROMERO, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Anne HÉAM, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2021. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Quand l'analyse cherchait ses mots

Si les mots géométrie, algèbre, arithmétique *ou* probabilités *sont relativement bien compris dans la société, il n'en est pas de même pour le mot* analyse. *Pierre Legrand nous expose l'évolution, au fil des siècles, de ce terme en mathématiques.*

« De toutes les grandes conceptions qui honorent l'esprit humain, l'analyse infinitésimale est peut-être la plus remarquable ».
Charles Bossut, *Histoire des mathématiques* (1810)

Pierre Legrand

Nul, de nos jours, ne s'étonne d'entendre un ministre annoncer une mesure prise *« en fonction de l'évolution des variables économiques »* : chacun comprend aussitôt qu'il va falloir se serrer la ceinture. Nul ne s'étonne non plus de voir un journal évoquer *« la croissance exponentielle de la population »* de tel pays africain, ou de lire qu'un patron de choc entend *« maximiser le* ratio *chiffre d'affaires/masse salariale »*. On serait tenté d'en conclure que les concepts de l'analyse mathématique ont miraculeusement pénétré la France de nos élites. Mais faut-il vraiment le croire ?

Parlez à un non-scientifique de géométrie, d'algèbre, d'arithmétique ou de probabilités : il saura vaguement de quoi il s'agit. Prononcez devant lui le mot analyse : il pensera au laboratoire qui teste son cholestérol, au psycho-divan sur lequel il étale ses complexes ou, s'il est porté sur les choses de l'esprit, au tandem analyse-synthèse cher à son professeur de philosophie ; il est peu probable, en revanche, qu'il pense aux mathématiques.

Un tel paradoxe vaut d'être analysé.

Deux millénaires de mathématiques sans analyse ?

Le mot *analyse* vient de la Grèce antique. Aristote oppose αναλυσις (*ana* : en remontant ; *lysis* : décomposition) et συνθεσις (*syn* : avec ; *thesis* : action de poser) comme l'ont fait à sa suite tous les philosophes.

Le terme est dès le début du XVII^e^ siècle passé dans la langue française. Le dictionnaire de Furetière (1690), qui fit longtemps autorité, le définit comme « examen de quelque discours ou proposition, en recherchant ses principes, sa construction », mais n'évoque aucunement un sens mathématique. Le mot figure pourtant dans son contemporain le *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam (1691), premier du genre [1], mais avec une bien curieuse définition, qui l'apparente à la fois à l'induction et au raisonnement par l'absurde.

> L'*Analyſe*, ou *Reſolution*, que l'on peut auſſi apeller *Methode d'invention*, eſt l'art de découvrir la verité, ou la fauſſeté ; la poſſibilité ou l'impoſſibilité d'une Propoſition par un ordre contraire à celuy de la Compoſition, ſçavoir en ſuppoſant la Propoſition telle qu'elle eſt, & en examinant ce qui s'enſuit de là, juſqu'à ce que l'on ſoit venu à quelque verité claire, ou à quelque impoſſibilité, dont ce qui a été propoſé ſoit une ſuite neceſſaire, pour conclure de là la verité ou l'impoſſibilité de la propoſition, que l'on peut démontrer enſuite par la compoſition, en reprenant ſes raiſonnemens par où l'on a fini.

Figure 1. *Extrait du* Dictionnaire mathématique *d'Ozanam (1691), p. 15.*

1. C'est en fait plus une encyclopédie qu'un dictionnaire au sens moderne.

Ce dictionnaire d’Ozanam est un intéressant témoignage de la situation à la fin du XVIIe siècle. Il se termine par une énorme « Table alphabétique des termes expliquez [2] dans ce livre », qui comporte quelque six-mille rubriques. Il y a par exemple quatre-vingt-trois entrées correspondant au mot *nombre* assorti d’une variété de qualificatifs. Mais le mot *fonction* est absent, tout comme des termes aussi familiers à nos lycéens que *constant(e)*, *croissant(e)*, *décroissant(e)*, *dérivée*, *intégrale*, *limite* [3], *maximum*, *minimum*, *série*, *suite*, *variable*.

Il serait léger d’en conclure qu’au XVIIe siècle l’analyse mathématique n’existait pas encore. Ce serait faire bon marché d’une pléiade de savants illustres, de Cavalieri à Barrow en passant par Descartes, Fermat, Pascal et bien d’autres… sans oublier le grand précurseur, Archimède. Ils ont résolu au coup par coup quantité de problèmes relevant de l’analyse ; mais la plupart du temps ce n’était pour eux qu’un outil pour traiter une question de géométrie, de mécanique ou d’optique. Comme monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, ils faisaient de la théorie des fonctions sans le savoir.

Les pères fondateurs : Leibniz et Newton

Ce n’est qu’à l’extrême fin du XVIIe siècle que Newton et Leibniz, chacun de leur côté, fondèrent l’analyse mathématique au sens où nous l’entendons. Mais aucun des deux n’employait ce terme. Newton parlait de *method of fluxions*, Leibniz de *calculus differentialis*. Il est assez plaisant, d’ailleurs, de constater que les Anglais, qui à l’époque traînaient Leibniz dans la boue en l’accusant de plagiat, ont finalement adopté le terme *calculus* là où maintenant les continentaux parlent d’analyse.

Il est piquant également de voir Newton, pionnier de l’analyse, qualifié de géomètre dans le dictionnaire de Littré (1873), qui fut jusqu’au milieu du XXe siècle la référence suprême en matière de langage.

GÉOMÈTRE (jé-o-mè-tr’), *s. m.* ‖ **1°** Celui qui sait la géométrie. Arpenteur-géomètre. ‖ **2°** Dans une acception plus étendue. Celui qui est versé dans les mathématiques. Newton fut un grand géomètre. Il

Figure 2. *Définition du terme* géomètre *dans le dictionnaire de Littré (1873).*

Le « *calculus* » de Leibniz

La terminologie de Newton étant restée sans lendemain, c’est celle de Leibniz qui est à l’origine de la nôtre. Elle a été ébauchée dans deux articles des *Acta eruditorum*, rédigés en latin. Dans le premier (*Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, 1684), Leibniz introduit la différentielle, considérée comme un accroissement instantané (en un sens non précisé). Il l’appelle *differentia* et, comme nous, la note $\mathrm{d}x$ ou $\mathrm{d}y$. Le second article (*De Geometria Recondita* [4] *et Analysi indivisibilium atque infinitorum*, 1686) introduit l’intégration comme opération inverse de la différentiation et la note par le symbole $\int$. Dans l’un et l’autre texte, les démonstrations sont absentes ou remplacées par de simples analogies, comme dans l’extrait ci-dessous :

> […] *méthodo tangentium exposui, patet esse* $\mathrm{d}\frac{1}{2}xx = x\,\mathrm{d}x$ *; ergo contra* $\frac{1}{2}xx = \int x\,\mathrm{d}x$ *(ve enim potestates & radices in vulgaribus calculis, sic nobis summae et differentiae seu* $\int$ *et* d*, reciprocae sunt). Habemus ergo …*

> […] j’ai exposé par la méthode des tangentes, il est évident que $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}xx\right) = x\,\mathrm{d}x$; donc inversement $\frac{1}{2}xx = \int x\,\mathrm{d}x$ (car, comme les puissances et les radicaux dans le calcul ordinaire, ainsi pour nous somme et différence, autrement dit $\int$ et d, sont réciproques). Nous avons donc…

2. NDLR : orthographe d’origine.
3. En fait les mots *croissant* et *limite* figurent dans la liste, le premier au sens de croissant de lune, le second dans le cadre de la géographie.
4. *Recondita* : approfondie.

Notons que Leibniz introduit en outre les mots *maximum* et *minimum* que la langue française ignore encore : ils sont absents de l'édition 1740 du *Dictionnaire de l'Académie française*, mais ils figurent dans l'édition suivante (1762) avec l'indication « Terme de Mathématique emprunté du latin ».

L'*« Analyse des infiniment petits »*

Le terme *« analyse »*, entendu dans un sens proprement mathématique, est pour la première fois apparu au grand jour en 1696, avec l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de Guillaume de l'Hôpital[5]. Le livre, qui eut un large succès, voulait mettre à la portée d'un public plus étendu que le petit cercle des chercheurs les principes du calcul différentiel de Leibniz.

Le titre même de l'ouvrage montre que l'analyse n'y est pas considérée comme une discipline indépendante, mais comme un instrument au service de la géométrie. Guillaume de l'Hôpital y considère une courbe comme *« l'assemblage d'une infinité de lignes droites* [nous dirions maintenant : segments], *chacune infiniment petite »*. Le point de vue est donc bien celui d'un *raisonnement par décomposition* et justifie l'usage par l'auteur du mot « analyse », qu'il n'emploie d'ailleurs jamais isolément mais muni d'un qualificatif : « analyse des infiniment petits » et non « analyse » tout court.

Vers l'*« analyse »* tout court

Un pas supplémentaire fut franchi par l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, publiée de 1751 à 1772 :

> *L'Analyse des quantités infinies ou des infinis, appelée aussi la nouvelle Analyse, est celle qui calcule les rapports des quantités qu'on prend pour infinies, ou infiniment petites.*

Il n'empêche que les deux cours d'analyse les plus répandus du XVIIIe siècle finissant, publiés l'un et l'autre en 1797, ne font pas référence à ce terme. Celui de Lagrange s'intitule *Leçons sur le calcul des fonctions* et celui de Lacroix s'appelle *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*.

Il fallut attendre Cauchy et son *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique* (1821), pour voir entrer définitivement le sens moderne du mot *analyse* dans le vocabulaire mathématique courant.

Les dictionnaires de langue mirent du temps à l'accepter. Dans le *Littré* de 1873, on lit ceci :

> En termes de mathématiques, *l'analyse est l'algèbre. L'analyse transcendante est le calcul différentiel et intégral. On appelle aussi quelquefois analyse l'application de l'algèbre à la géométrie, ou géométrie générale.*

Un siècle plus tard, l'article « analyse » du *Grand Larousse encyclopédique* de 1967 marque même une régression par rapport au *Littré*… et un retour au point de vue d'Ozanam :

> *Manière de résoudre les problèmes en supposant connues les quantités que l'on cherche, pour développer ensuite les conséquences de cette hypothèse* […]

Heureusement, l'actuel *Petit Robert* sauve l'honneur des lexicographes et parle d'*étude de fonctions.*

Les débuts du vocabulaire des fonctions

Pendant les décennies qui ont suivi sa naissance, le nouveau calcul a cruellement manqué d'un langage précis qui lui soit propre.

L'ouvrage *Analyse des infiniment petits* de Guillaume de l'Hôpital, déjà cité, est un bon point de repère. Si l'on voit apparaître dans la préface les expressions « calcul différentiel » et, bien que l'auteur n'en traite pas, « calcul intégral », les termes « fonction », « variation », « limite » sont absents du livre, même dans la seconde édition datée de 1716.

En revanche le mot « variable » se retrouve plusieurs fois, soit comme adjectif accolé à « quantité » soit indépendamment : « les données & variables ».

5. Le livre a été publié sans nom d'auteur, mais c'était un secret de Polichinelle.

Il lui arrive cependant de mettre « inconnue » là où nous mettrions « variable », comme ici : « faire évanouir[6] les inconnues ». Et il ne parle jamais de « constantes », mais de « données ». Comme Leibniz, il écrit « différence » pour « différentielle ».

Il fallut attendre le milieu du XVIIIe siècle pour voir apparaître dans un traité de mathématiques le mot « fonction ». Il s'agissait d'un gros ouvrage d'Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse des infinis), publié en 1748.

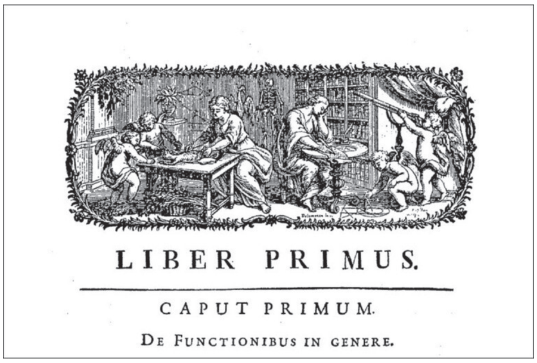


Figure 3. Introductio in analysin infinitorum *(1748).*

Dans le chapitre 1 (dont l'en-tête est reproduit ci-dessus) sont définis pour la première fois les termes « fonction » et « constante » :

> *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*[7]

Euler reprend aussi une convention de Descartes dont nous avons hérité : réserver les premières lettres de l'alphabet aux constantes, les dernières aux variables (si ce n'est que pour Descartes il s'agissait de distinguer les données des inconnues).

C'est à Euler encore que nous devons la première apparition de $f(\ldots)$ pour désigner une fonction, dans un article[8] de 1734 : « si $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ désigne une fonction quelconque de ce même $\frac{x}{a}+c$ … ». L'idée était dans l'air : à la même époque, Clairaut écrivait une fonction de x sous la forme Φx ou Πx, sans utiliser de parenthèses.

Cette notation qui nous est devenue familière mit quelque temps à s'imposer. Lagrange, en 1806 dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, écrit bien $f(x+a)$, mais il abrège systématiquement $f(x)$ en fx. Il fallut attendre Cauchy et son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (1821) pour régler définitivement la question (encadré ci-dessous).

> Lorsqu'on veut désigner une fonction explicite d'une seule variable x ou de plusieurs variables x, y, z …, sans déterminer la nature de cette fonction, on emploie l'une des notations
>
> $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, $\varpi(x)$, … &c.....
>
> $f(x, y, z\ldots)$, $F(x, y, z\ldots)$, $\varphi(x, y, z\ldots)$, &c...

Trois arrivées tardives

La dérivée

Les mathématiciens du XVIIIe siècle ont abondamment utilisé les différentielles mais, curieusement, sans jamais parler de dérivée. L'introduction de celle-ci est due à Lagrange, avec déjà la notation f', mais avec une définition plus restrictive que la nôtre. Dans son ouvrage *Leçons sur la théorie des fonctions* (1806) déjà cité[9], il présente en effet les dérivées successives en un point x comme coefficients du développement en série entière au voisinage de ce point (je respecte ses notations) :

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}f'''x + \cdots$$

Le problème, évidemment, est que toute fonction dérivable (au sens moderne) n'est pas ainsi développable[10], ce qu'on lui fit assez vite observer.

6. Faire évanouir : donner la valeur zéro.
7. *Une fonction d'une quantité variable est l'expression analytique, composée de quelque manière que ce soit, de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constants.*
8. En latin.
9. Dans la seconde édition de son *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, qui date aussi de 1806, Lacroix ne parle pas de dérivée mais de *coefficient différentiel* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
10. Ainsi la fonction $x \longmapsto |x|^{\frac{3}{2}}$ est dérivable à l'origine (au sens moderne), mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 (et donc n'est pas dérivable à l'origine au sens de Lagrange).

La notation $\sum$

Jusqu'au début du XIXe siècle, aucune notation spécifique n'existait pour désigner une somme infinie ou de longueur arbitraire. C'est ainsi que, dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, qui donne une place importante aux séries entières, Euler écrit celles-ci sous la forme $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$

Ce fut pourtant Euler qui, quelques années plus tard, en 1755, introduisit le symbole $\sum$: « *summam indicabimus signo* $\sum$ »[11]. Il le fit en passant, sans insister, et il fallut près d'un siècle pour que cette nouveauté pourtant bien commode passe dans l'usage courant. Le *Cours d'analyse* de Cauchy (1820), par exemple, ne l'utilise pas. Mais, en 1841, Weierstrass écrit déjà des choses comme $F(x) = \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$.

La notation u_n

On vient de voir ci-dessus Weierstrass utiliser la notation indicielle A_ν. L'indexation des termes d'une suite (écriture u_n) semble postérieure à 1770. La référence la plus ancienne que je connaisse figure dans un mémoire de Lagrange, *Recherche sur les suites récurrentes*, daté de 1775 (cf. encadré ci-dessous[12]).

> 1. Soit la série
>
> $$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots,\ y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2},\ldots,$$

Un enrichissement progressif

Au fil des XIXe et XXe siècles, il y eut enrichissement et uniformisation progressifs d'un langage de plus en plus proche de celui qu'utilisent nos classes et nos universités. Donnons quelques jalons.

En 1822, Fourier introduisit la notation $\int_a^b$ qui fut très vite adoptée. En revanche, l'écriture des limites mit longtemps à se fixer. Si, dès 1786, Simon Lhuilier utilisait déjà dans son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* la notation « lim », celle-ci a connu divers avatars au cours du XIXe siècle. La forme la plus courante à l'époque, « $\lim\limits_{x=a} f(x)$ » n'a cédé la place au « $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ » qui nous est familier qu'au début des années 1900. Et les notations de Landau $f = o(g)$ et $f = O(g)$ datent des années 1920.

L'idée d'attribuer un nom aux principaux ensembles de nombres est, elle aussi, tardive. Le plus ancien est $\mathbb{N}$, qui apparut en 1888 dans un écrit de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?*[13] et fut repris en 1889 dans les fameux *Arithmetices Principia* de Peano (mais tous deux appelaient $\mathbb{N}$ ce que nous appelons $\mathbb{N}^*$). Détail pittoresque : pour le premier, $\mathbb{N}$ signifiait *Nummer* (*numéro* en allemand), mais pour le second, $\mathbb{N}$ signifiait *Numerus* (*nombre* en latin).

Les notations $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ semblent dater de la période 1930-1950, car elles figurent déjà à cette époque dans les *Éléments de mathématique* de Bourbaki, qui ont joué un rôle important dans la normalisation des écritures (ils ont par exemple systématisé l'usage des « crochets expressifs » [...],]...[,]...] et [...[). Plus précisément, les écritures $\mathbb{Z}$, pour *Zahl*, (*nombre* en allemand) et $\mathbb{Q}$ pour *Quotient* émanent très vraisemblablement du traité de Bourbaki, mais son antériorité est moins sûre pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Notons enfin qu'il écrivait ces symboles en caractères gras sans la double barre, apparue plus tard.

La situation actuelle

De nos jours, la diffusion mondiale de l'enseignement des mathématiques et l'usage majoritaire de l'anglais dans les publications scientifiques ont conduit à une standardisation poussée. Si chaque langue garde sa terminologie mathématique propre, on peut passer de l'une à l'autre sans ambiguïté : ainsi *série entière* se dit *power series* en anglais et *Potenzreihe* en allemand, mais ces termes recouvrent exactement la même notion.

11. « Nous indiquerons la somme par le signe $\sum$ ».
12. On notera que Lagrange emploie ici le mot *série* là où nous dirions *suite*.
13. En français : *Que sont les nombres et que doivent-ils être ?*

Et surtout équations et formules (écrites de gauche à droite en caractères latins et à l’occasion grecs) sont à peu près totalement internationalisées.

Pour un Européen de l’Ouest ou un Américain, il s’agit là d’une situation fort agréable. Pour un Européen de l’Est habitué aux caractères cyrilliques, c’est déjà un peu moins plaisant.

Pour un Chinois ou un Japonais, formé à une écriture idéographique disposée de haut en bas, cela représente une laborieuse gymnastique ; mais un étudiant qui a dû mémoriser quelques milliers de caractères n’a sans doute pas grand mal à avaler une ou deux centaines de symboles supplémentaires et une disposition différente !

À titre de curiosité, vous pouvez voir ci-contre un extrait de l’examen d’entrée dans les universités publiques japonaises en 2019.

Le principal îlot de résistance se situe dans les pays arabes, dont la langue s’écrit de droite à gauche avec des lettres liées (en omettant la plupart du temps les voyelles), ce qui ne facilite évidemment pas les choses. Leur enseignement supérieur s’est adapté bon gré mal gré aux normes internationales, mais la situation est beaucoup moins nette dans l’enseignement secondaire, où l’usage mathématique se heurte à l’usage courant. On peut le regretter, mais n’oublions pas, avant de critiquer, que la nation qui, à tort ou à raison, s’estime la plus évoluée de toutes, les États-Unis, persiste à rechigner devant le système métrique [14]… et impose de fait au reste du monde de mesurer en pouces les diagonales des écrans et en pieds les altitudes des avions.

5 以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

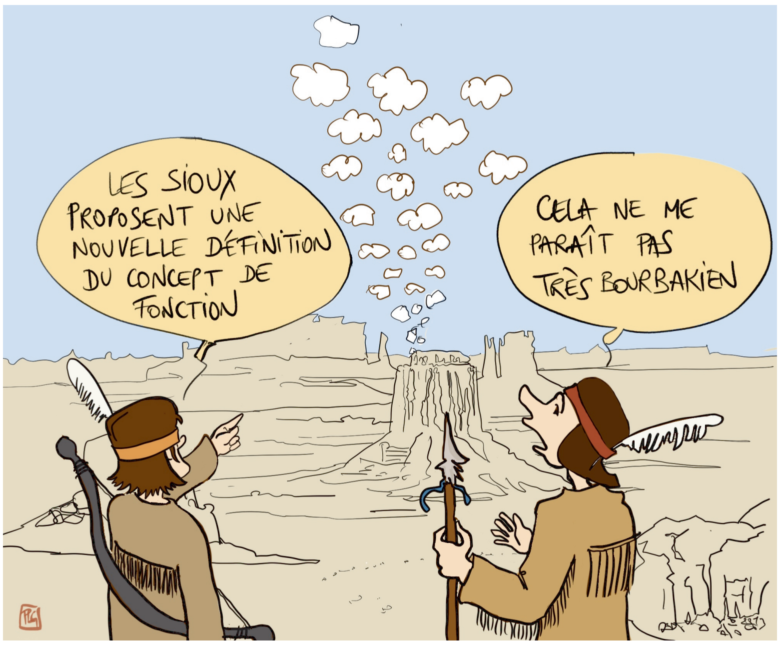
(3) (1) で定まる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ。

Pierre Legrand a depuis longtemps un rôle actif au sein de l’APMEP. Il a écrit de nombreux articles dans le bulletin de l’association.

pierre.legrand078@orange.fr



14. Il n’y a que deux autres pays à ne pas l’avoir officialisé : la Birmanie et le Liberia.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Abonnement 2022 à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP

Abonnez-vous de préférence en ligne sur https://www.apmep.fr

NOM (établissement ou personne) : ....
Adresse : ....
Code Postal : .... *Ville :* .... *Pays :* ....
Téléphone : .... *Adresse courriel :* ....
Numéro de TVA intracommunautaire (s'il y a lieu) : ....
Adresse de livraison : ....
Adresse de facturation : ....

Catégorie professionnelle : ☐ étudiant ☐ stagiaire ☐ 1er degré ☐ 2e degré
☐ service partiel ☐ contractuel ☐ enseignant dans le supérieur, inspecteur

Pour toute question concernant la confidentialité des données, écrire à : `contactrgpd@apmep.fr`.

Abonnement à *Au fil des maths* – le bulletin de l'APMEP pour les établissements et les personnes qui n'adhèrent pas à l'APMEP. **L'abonnement seul ne donne ni la qualité d'adhérent, ni l'accès à la revue numérique** et ne donne pas lieu à une réduction fiscale. Cependant, les abonnés non adhérents bénéficient du tarif adhérent ou abonné pour l'achat de brochures de l'APMEP (réduction de 30 % sur le prix public). L'abonnement et l'adhésion peuvent être souscrits sur https://www.apmep.fr.

☐ **60 € TTC** pour la France, Andorre, Monaco, particuliers de l'Union Européenne, établissements européens qui n'ont pas de numéro de TVA intracommunautaire,
☐ **56,87 € TTC** pour les établissements européens ayant un numéro de TVA intracommunautaire,
☐ **65 € TTC** pour les DOM-TOM sauf Guyane et Mayotte (frais de port compris),
☐ **64 € TTC** pour la Guyane, Mayotte et les pays hors Union Européenne (frais de port compris).

Règlement : à l'ordre de l'APMEP (Crédit Mutuel Enseignant - IBAN : FR76 1027 8065 0000 0206 2000 151)

☐ par chèque ☐ par mandat administratif ☐ par virement postal

Nous pouvons déposer les factures sur `Chorus.pro`*; indiquez le numéro d'engagement si nécessaire :* ....

Date : .... *Signature :* .... Cachet de l'établissement

Bulletin d'abonnement et règlement à renvoyer à : APMEP, 26 rue Duméril 75013 PARIS

secretariat-apmep@orange.fr SIRET : 784-262-552-000-36 / TVA : FR 94 — 784 262 552

Sommaire du nº 542

Maths et citoyenneté (2)

CultureMATH

APMEP

www.apmep.fr