BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION
sur L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des Instituteurs et des Professeurs

Tome I

brochure 1974

Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)
N° 8

SOMMAIRE

Préface

Neuf rubriques: EGALITE
EXEMPLE et CONTRE–EXEMPLE
COUPLE
RELATION BINAIRE
NOMBRE NATUREL
ENTIERS et RATIONNELS
NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE
FRACTION
ENSEMBLES de NOMBRES

Index terminologique.

Chaque rubrique forme un tout, mais comporte des renvois à d'autres rubriques. Il n'y a pas d'ordre logique entre les rubriques. Cependant, si quatre d'entre elles (EGALITE, EXEMPLE et CONTRE–EXEMPLE, COUPLE, RELATION BINAIRE) sont relativement indépendantes, les cinq autres sont liées; on peut commencer par NATUREL et terminer par ENSEMBLES de NOMBRES, sans que ce soit impératif. ENTIERS et RATIONNELS, par son importance, est plus difficile à lire que les autres rubriques. Mais d'une part (colonne de droite, relative aux RATIONNELS) elle éclaire les autres, en particulier FRACTION et NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE; d'autre part (colonne de gauche, relative aux ENTIERS), elle donne une bonne idée d'une présentation possible des entiers en sixième et en cinquième. On peut donc ne pas l'approfondir en première lecture, et y revenir ultérieurement.

Dans le texte d'une rubrique, un mot entre crochets, par exemple [COUPLE], signifie: voir la rubrique COUPLE.

La "Brochure 75", en préparation, contiendra *probablement*:

RELATION D'EQUIVALENCE,
RELATION D'ORDRE,
NUMERATION,
DIVISION,
...etc...

PREFACE

L'A.P.M.E.P. a pensé aider les instituteurs et d'autres enseignants dans leur enseignement de la mathématique en rédigeant la présente brochure.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*★ .

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire: l'A.P.M.E.P. ne le peut pas et ne le veut pas. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique. Les formateurs (I.D.E.N., professeurs d'E.N., animateurs des I.R.E.M., ...) trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour

---

★ Pour se le procurer, s'adresser à

M. BLONDEL
154, avenue Marcel Cachin
92 CHATILLON—SOUS—BAGNEUX

un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les instituteurs isolés.

●
● ●

La présente brochure ne contient qu'un nombre limité de rubriques, qui ont été proposées à quelques instituteurs groupés ou isolés; leurs critiques, leurs suggestions ont été soigneusement prises en considération dans la mise au point. Cette brochure sera suivie, si son utilité est confirmée par ses lecteurs, par d'autres brochures analogues, au rythme lent qu'exige ce genre de travail. Nous demandons un peu de patience à ceux qui s'étonneraient des renvois à des rubriques ... qui ne sont pas encore rédigées.

Le choix des rubriques déjà rédigées n'est pas totalement arbitraire et reflète un certain souci de priorité; mais il a été contrebalancé par des contraintes diverses, en particulier par le volume de cette première brochure. Il n'y a donc pas lieu de tirer une conclusion définitive, quant à une certaine "philosophie de l'enseignement", de la présence ou de l'absence de tel ou tel mot.

Un index terminologique donne la liste des mots mathématiques qui figurent dans la brochure.

A l'occasion des notions abordées, nous avons essayé d'indiquer les principaux termes rencontrés le plus souvent dans les ouvrages de mathématique et les manuels.

Certains termes relevant de la technique mathématique ne se trouvent pas dans les dictionnaires de la langue française; ils n'en sont pas moins commodes (*contre-exemple*, entre autres).

●
● ●

Nous insistons beaucoup sur le fait que cet ouvrage s'adresse *aux maîtres*, et nullement aux élèves.

Quant à l'utilisation de ces mots en classe, nous pensons que la question "Faut-il utiliser tel mot ? " pose mal le problème, et n'a pas de réponse générale. L'essentiel est de mettre les enfants en situation de construire les notions; la nécessité de les nommer ne viendra que du besoin de communiquer et surtout dans les cas où ces notions se révèleront d'usage fréquent. Les mots ou les signes choisis pour les désigner ont en fait une importance secondaire, et les choix peuvent évoluer dans le temps.

Une preuve de cette importance relative du vocabulaire et de l'impossibilité d'une normalisation en ce domaine est fournie par les variations qui peuvent exister d'une rubrique à l'autre de la présente brochure (exemple: nombre octal, octaire, huital, huitaire, ...).

Nous sommes persuadés qu'on peut faire, dans les classes élémentaires, un excellent travail mathématique avec un nombre très limité (pratiquement nul au début de la scolarité) de termes purement mathématiques. Et nous regretterions amèrement notre entreprise si ces quelques mots-clés ouvraient la porte encore davantage au déferlement, néfaste à notre avis, du vocabulaire technique infligé aux jeunes enfants.

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à Louis DUVERT
10, avenue du Point du Jour — 69005 LYON

Avril 1 974
La Commission "Mots"

EGALITE

I. Définition
II. Exemples et contre-exemples d'emploi du signe "="
III. Commentaires sur ces emplois
IV. Remarques diverses
V. Propriétés qui se dégagent des commentaires précédents.

I. Définition

Dans toute activité mathématique, on a besoin de désigner les objets dont on veut parler.

L'*égalité* $a = b$
apporte l'information suivante:

"a" désigne le même objet que "b".

En d'autres termes, "a" et "b" sont deux noms différents d'un objet unique.

Exemple: $7 = 3 + 4$
(On lit: "sept *est égal à* trois plus quatre"
ou "sept *égale* trois plus quatre"
égale est l'indicatif présent du verbe "égaler")

II. Exemples et contre-exemples d'emploi du signe "="

Cette liste contient les principaux types d'emplois que l'on peut trouver dans les livres. Un commentaire critique en est fait en III.

(1) Le Roi-Soleil = Louis XIV

(2) $8_{(dix)} = 13_{(cinq)}$

(3) $8 = 8$

(4) $8 = \text{HUIT}$

(5) $6 + 2 = 10$

(6) $7 = 3 + 4$ $\qquad$ $3 + 4 = 7$

(7) $13 \times 8 = 26 \times 4 = 52 \times 2$

(8) $3 + 4 = 7 \times 2 = 14$

(9) 1 dm = 10 cm

(10) $2 + 3 = 5$ cm

(11) $15 : 2 = 7$

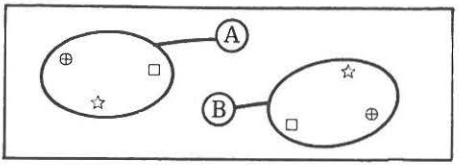
(12) $22 + 5 = 3$

(13) $4 + a = 7$ $\qquad$ $4 + \ldots = 7$

(14) $x = 3$

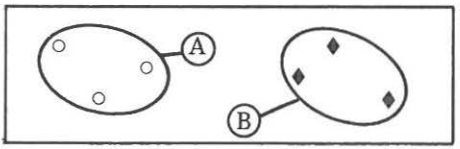
(15) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{20}{4} = \frac{30}{6}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

(16)



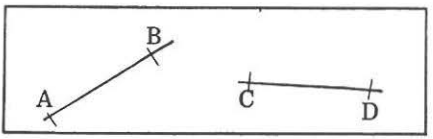
A = B

(17)



A = B

(18)



AB = CD

(19) ⁑ + ⁂ = 3

(20) ⁑ + ⁂ = ⁂⁂

(21) "Les quatre côtés d'un carré sont égaux".

III. Commentaires sur ces emplois

(1) Le Roi-Soleil = Louis XIV

Cette égalité n'est ni une phrase de la langue française, ni une phrase du langage mathématique. Toutefois, c'est un bon exemple pédagogique, car il n'y a d'ambiguïté ni sur le personnage historique dont il s'agit, ni sur ses désignations.

(2) $8_{(\text{dix})} = 13_{(\text{cinq})}$

(3) 8 = 8

(4) 8 = HUIT

Le même naturel se désigne par:

HUIT en français

EIGHT en anglais

8 dans le système de numération à base dix

13 dans le système de numération à base cinq.

Donc les égalités ci-dessus sont vraies, mais leur intérêt est limité à leur rôle de traduction.

L'égalité 8 = 8

est vraie, même en l'absence de tout contexte; en conséquence, elle n'apporte aucune information. C'est pourquoi il serait maladroit de l'utiliser pour introduire la notion d'égalité.

(5) 6 + 2 = 10

A priori, on ne peut dire si cette égalité est vraie ou si elle est fausse. Si les nombres sont écrits en base huit, l'égalité est vraie. Elle est fausse si ces nombres sont écrits en une autre base.

Par convention tacite, quand on ne précise pas la base de numération dans l'écriture d'un nombre, c'est que ce nombre est écrit en base dix. En l'absence de contexte, l'égalité (5) est fausse.

$$(6) \qquad 7 = 3 + 4 \qquad\qquad 3 + 4 = 7$$

Ces égalités sont l'une et l'autre correctement écrites et vraies, puisque 7 d'une part, 3 + 4 d'autre part, désignent le même nombre.

Il faut proscrire la lecture "3 et 4 font 7" qui privilégie l'une des égalités($3 + 4 = 7$) par rapport à l'autre ($7 = 3 + 4$), masquant par là une propriété essentielle,à savoir que

$$a = b \qquad \text{et} \qquad b = a$$

apportent la même information.

$$(7) \qquad 13 \times 8 = 26 \times 4 = 52 \times 2$$

On peut tolérer parfois (7) comme une écriture condensée de

" $13 \times 8 = 26 \times 4$ et $26 \times 4 = 52 \times 2$ "

$$(8) \qquad 3 + 4 = 7 \times 2 = 14$$

Le souci de condenser l'écriture (voir (7)) n'est pas tolérable ici, parce que " $3 + 4 = 7 \times 2$ " est faux.

Une telle faute d'écriture traduit en fait, mais de façon incorrecte, le déroulement des calculs.

Voici des écritures correctes:

$$3 + 4 = 7 \qquad \text{et} \qquad 7 \times 2 = 14$$

$$(3 + 4) \times 2 = 14$$

ou, selon la tolérance signalée en (7) :

$$(3 + 4) \times 2 = 7 \times 2 = 14$$

$$(9) \qquad 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

Cette égalité est admissible, mais sa justification exige la mise en oeuvre d'une théorie difficile pour l'école élémentaire.

$$(10) \qquad 2 + 3 = 5 \text{ cm}$$

De toutes façons, cette égalité est injustifiable.

(11) $15 : 2 = 7$

Cette égalité est fausse. En effet:

$$q = a : b$$

signifie $a = bq$

Exemple:

$$14 : 2 = 7$$

est vraie; l'égalité $14 : 7 = 2$
est vraie aussi.

A propos de:

$15 \div 2 = 2$ $\quad 14 / 2 = 7$ $\quad \frac{14}{2} = 7$

[voir DIVISION]

(12) $22 + 5 = 3$

Cette égalité est fausse si on se place dans le système de numération usuel à base dix (voir (5)).

Pour exprimer que, cinq heures après l'instant "vingt-deux heures", l'horloge marque "trois heures", l'usage est plutôt d'écrire:

$$22 + 5 \equiv 3 \qquad \text{(modulo 24)}$$

[voir CONGRUENCE]

(13) $4 + a = 7$ $\quad 4 + \ldots = 7$

Une fois de plus, le contexte intervient:

α) Si "a" désigne un nombre déterminé, qu'on a introduit auparavant, cette égalité est vraie si a désigne 3; elle est fausse si a désigne un nombre autre que 3.

β) Si a est inconnu

$$4 + a = 7$$

est une *équation*, que l'on préfère souvent présenter aux enfants sous l'une des formes suivantes:

$$4 + \square = 7$$
$$4 + \bullet = 7$$
$$4 + \ldots = 7$$

etc...

(14) $x = 3$

Même commentaire que pour (13).

(15) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{20}{4} = \frac{30}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Ces égalités sont vraies car

$\frac{20}{4}$ et $\frac{30}{6}$ désignent le même nombre

$\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ désignent le même nombre

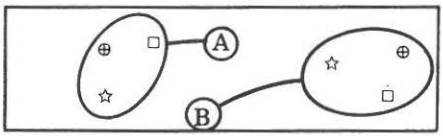
$\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{6}$ désignent le même nombre.

On ne confondra pas les couples (20 ; 4) et (30 ; 6) qui sont équivalents selon une relation d'équivalence précise (voir COUPLE et RATIONNEL) avec $\frac{20}{4}$ et $\frac{30}{6}$, qui désignent le même nombre, à savoir le naturel 5.

De même les couples équivalents (1 ; 2) et (2 ; 4) ne seront pas confondus avec $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$, qui désignent le même nombre, à savoir le décimal 0,5 .

(1 ; 3) et (2 ; 6), couples équivalents, ne seront pas confondus avec $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{6}$, qui désignent le même rationnel; ce rationnel n'est pas un décimal.

(16)

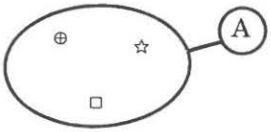


A = B

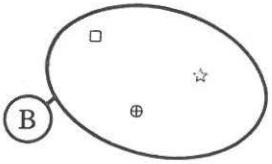
α) Voici une première situation

On met deux enfants en présence d'*un* ensemble à trois éléments, et on leur demande de le représenter et de le baptiser à leur guise.

L'un d'eux le baptise A et fait le dessin ci-dessous:



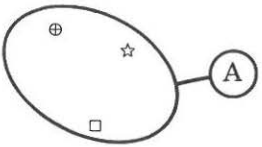
L'autre enfant le baptise B et fait le dessin ci-dessous:



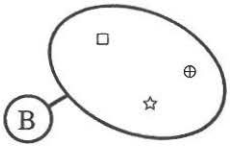
Alors $A = B$

β) Voici une autre situation:

On met un enfant devant une table où sont posés un jeton, une étoile et un carré. Il dessine ceci:



On met un autre enfant devant une autre table où sont posés un autre jeton, une autre étoile et un autre carré. Il dessine ceci:



Alors $A \neq B$

et cela, même s'il s'agit de deux jetons de téléphone, de deux étoiles de même modèle et de même couleur, de deux carrés de carton de la même taille, ...

Car il y a six objets distincts.

Remarque 1

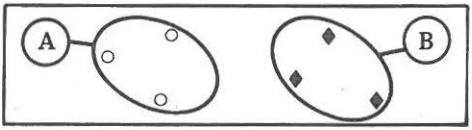
Dans les deux situations, A et B ont le même nombre d'éléments.

Remarque 2

La situation ambiguë par excellence est celle où les enfants sont mis en présence de dessins (fiches par exemple) sans qu'on leur donne aucun moyen de savoir s'ils doivent considérer ces dessins

comme des objets distincts, des schémas représentant des collections (distinctes ou non ?) ou des étiquettes.

(17)



A = B

— Si les deux dessins sont présentés dans les conditions α) ci-dessus, il s'agit de deux dessins du même modèle, et donc A = B .

— Si les deux dessins sont présentés dans les conditions β) :

. si, par convention, A et B désignent les ensembles, alors

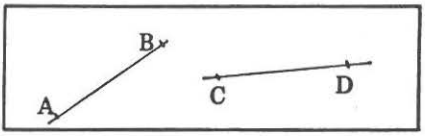
$$A \neq B$$

. si, par convention, A et B désignent les nombres d'éléments des ensembles, alors

$$A = B$$

. Dans les conditions β) , il est donc clair que les deux systèmes de convention sont incompatibles dans une même activité.

(18)



AB = CD

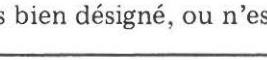
— Si AB et CD désignent les segments de droite du dessin, alors AB $\neq$ CD.

— Si AB désigne le nombre mesurant (avec une certaine unité) le segment AB, si CD désigne le nombre mesurant (avec la même unité) le segment CD, et si, après mesurage, on obtient le même nombre, alors AB = CD .

— Si AB désigne la droite passant par A et B et CD la droite passant par C et D, alors AB $\neq$ CD .

Dans ces trois derniers exemples (16), (17) et (18), on ne peut pas répondre à la question posée tant qu'on ne connaît pas le contexte avec suffisamment de précision.

> D'une façon générale, beaucoup d'abus dans l'emploi de l'égalité proviennent de ce que l'objet représenté par un symbole n'est pas bien désigné, ou n'est pas bien défini.

(19) 

(20)

En l'absence de tout contexte, ces écritures n'ont aucun sens.
Il semble qu'elles veuillent, chacune, résumer l'information suivante:
On a au départ un bouquet de deux fleurs. Si on y met une fleur de plus, on obtient un bouquet de trois fleurs ...

Une manière de traduire correctement cette information est d'écrire:

$$2 + 1 = 3$$

(21) "Les quatre côtés d'un carré sont égaux"

Le mot "côté" (comme bien d'autres mots en géométrie) a au moins quatre sens différents, selon qu'il désigne:

- un segment de droite
- une droite
- une longueur
- un nombre (mesure)

Ici, "côté" est pris soit au sens de "longueur", soit au sens de "nombre" (l'unité de longueur étant bien entendu la même pour les quatre mesures !).

IV. Remarques diverses

1. Ainsi, les erreurs que l'on rencontre dans l'emploi du signe " = " sont dues généralement aux faits suivants:

— On n'a pas donné une définition claire du "même objet" dont il s'agit .
(Exemples: (11), (16), (17), (18)).

— L'une au moins des désignations de ce même objet est ambiguë.
(Exemples: (5), (20), (21)).

— On voudrait charger l'égalité de transmettre des informations supplémentaires incompatibles avec l'emploi que l'on veut faire d'elle lors des calculs.
(Exemple: (8)).

2. On voit aussi le rôle important que joue la connaissance du *contexte* d'une égalité.

3. La notion d'égalité suppose que, *pour l'activité considérée*, la distinction entre objets d'une part et symboles (ou noms) d'autre part est exempte de toute ambiguïté. L'information apportée peut alors s'interpréter soit au niveau de l'objet comme une identité, soit au niveau des symboles comme une synonymie. A cet égard, on doit être conscient que l'énonciation "a et b sont égaux", quoique courante, ne résiste pas à une analyse serrée: en effet, s'il s'agit des noms a et b, elle est fausse puisqu'ils sont *différents*, et s'il s'agit de l'objet unique nommé a ou b, le pluriel "égaux" est injustifiable.

4. La distinction qu'on a introduite entre objets et symboles est *relative* à une activité donnée. Pour d'autres activités les symboles précédents peuvent devenir des objets (ils sont même certainement des objets du langage utilisé), de même que les objets précédents peuvent devenir les symboles d'autres objets. La confusion entre ces divers niveaux est une source fréquente d'obscurité dans le maniement de l'égalité.

V. Propriétés qui se dégagent des commentaires précédents

1. Quel que soit x,

$$x = x$$

(Propriété de "réflexivité")
Voir III, 3.

2. Quel que soit x et quel que soit y,

$$\text{si} \quad x = y \quad , \quad \text{alors} \quad y = x$$

(Propriété de "symétrie")
Voir III, 6.

3. Quels que soient x, y et z

$$\text{si} \quad x = y \quad \text{et} \quad y = z \quad , \quad \text{alors} \quad x = z$$

(Propriété de "transitivité")
Voir III, 7 et 8.

4. L'intérêt essentiel de la notion d'égalité est le suivant:

   Si $a = b$, on peut, dans toute phrase mathématique, remplacer indifféremment "a" par "b" et "b" par "a" sans modifier le sens de la phrase.

EXEMPLE – CONTRE–EXEMPLE

I. Introduction
II. Définition
III. Utilisation à des fins d'illustration ou de démonstration
  a) Etude de quelques phrases
  b) Tableau récapitulatif
  c) Remarque importante
  d) Analyse du procédé de démonstration
IV. Quelques aspects didactiques

I. Introduction

Partons de l'usage courant. On s'intéresse aux noms féminins; le mot "douceur" constitue un exemple de ceux qui se terminent en *eur* ; par contre les mots "table" et "heure" n'en sont pas des exemples.

La situation mathématique ne diffère de la précédente que par la formulation. On se donne d'une part un ensemble E dit "ensemble de référence," d'autre part une propriété P qui peut être vérifiée ou non par tels ou tels éléments de cet ensemble.

(Dans le cas ci-dessus, il s'agissait de l'ensemble des noms féminins et de la propriété "se terminer par *eur*").

II. Définitions

Relativement à l'ensemble de référence E et à la propriété P,

est un *exemple*

tout élément de E pour lequel P est vérifiée;

est un *contre–exemple*

tout élément de E pour lequel P n'est pas vérifiée.

Illustration de ces définitions

Dans l'ensemble des naturels, pour la propriété "être multiple de 3", 6 est un exemple, 5 est un contre—exemple.

III. Utilisation à des fins d'illustration ou de démonstration

a) *Voici quelques phrases:*

(1) Tout naturel impair plus grand que 1 est premier.
(2) Tout naturel impair compris entre 2 et 6 est premier.
(3) Si x est un naturel multiple de 6, alors x est multiple de 2.
(4) Tous les noms français se terminant en *ou* ont leur pluriel en *oux*.
(5) Il existe au moins un naturel n tel que $n^2 - n + 41$ soit premier.
(6) Il existe au moins un naturel n tel que $n^2 - n + 41$ ne soit pas premier.

Pour chacune de ces phrases, il convient d'abord de préciser un ensemble dans lequel elle prend un sens et qui sera appelé "ensemble de référence".

Nous choisirons:

Pour la phrase (1) , l'ensemble des naturels impairs plus grands que 1

Pour la phrase (2) , $\{3 ; 5\}$

Pour la phrase (3) , l'ensemble des naturels multiples de 6.

Pour la phrase (4) , l'ensemble des noms français se terminant en

ou qui figurent dans une édition donnée d'un dictionnaire donné.

Pour la phrase (5) , l'ensemble **N** des naturels.

Pour la phrase (6) , l'ensemble **N** des naturels.

On peut alors dire, pour chaque élément de l'ensemble de référence, s'il vérifie ou non la propriété évoquée par la phrase; à savoir:

Pour la phrase (1) , être premier.

Pour la phrase (2) , être premier.

Pour la phrase (3) , être multiple de 2.

Pour la phrase (4) , avoir un pluriel en *oux*.

Pour la phrase (5) , être un naturel n tel que $n^2 - n + 41$ soit premier.

Pour la phrase (6) , être un naturel n tel que $n^2 - n + 41$ ne soit pas premier.

Les phrases (1), (2), (3) et (4) affirment que *tous* les éléments de l'ensemble de référence ont la propriété indiquée (ce sont des *énoncés universels*).

Les phrases (5) et (6) affirment que la propriété indiquée est vérifiée par *au moins un* élément de l'ensemble de référence (ce sont des *énoncés existentiels*).

On veut savoir pour chacune de ces phrases si elle est vraie ou si elle est fausse; à cet effet on peut essayer un *test systématique* des éléments de l'ensemble de référence.

Phrase (1) :

3, 5, 7 sont premiers; 9 n'est pas premier; ce nombre 9 à lui seul suffit à prouver que cet énoncé universel est faux (malgré l'existence d'une infinité de naturels impairs premiers).

Phrase (2) :

3 et 5 sont premiers; comme il n'y a pas d'autres éléments à tester, on a prouvé que cet énoncé universel est vrai.

Phrase (3) :
Envisageons quelques multiples de 6: 0, 6, 12 ; ce sont des multiples de 2; aussi patient que l'on soit, on n'est pas capable d'exhiber un multiple de 6 qui ne soit pas multiple de 2; on ne peut pas affirmer pour autant que cet énoncé universel est vrai; pour trancher la question, une démonstration est nécessaire.

Phrase (4) :
Toutes les grammaires scolaires françaises citent "les 7 noms en *ou* dont le pluriel est en *oux*". Le mot *matou* n'en est pas; à lui seul, il suffit à prouver que cet énoncé universel est faux.

Phrase (5) :
Si on donne à n la valeur 0, on obtient 41 qui est premier. Ce nombre 0 à lui seul suffit à prouver que cet énoncé existentiel est vrai.

Phrase (6) :
En testant successivement les nombres 0, 1, 2, ..., 40, on obtient les résultats suivants:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	... 40
41	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	... 1601

Tous les nombres de la deuxième ligne sont premiers; on est tenté de croire que l'énoncé existentiel est faux. Mais, en testant 41, on obtient 41^2 qui n'est pas premier. Ce nombre 41, à lui seul, suffit à prouver que cet énoncé existentiel est vrai.

b) *Tableau récapitulatif*

Phrases	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Exemples	3 ; 5 ; 7	3 ; 5	0 ; 6 ; 12 ; 18	chou	0	41
Contre-exemples	9			matou		
	★	★★	★★★	★	★	★
L'énoncé est	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai

★ un seul suffit

★★ démonstration de type exhaustif

★★★ démonstration de type déductif.

c) *Remarque importante*

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$
$$15 \times 37 = 37 \times 15$$

.....

Ces égalités *illustrent* la commutativité de la multiplication; mais, si nombreuses soient-elles, elles ne la démontrent pas.

En revanche, l'inégalité

$$2^3 \neq 3^2$$

démontre à elle seule que l'on a affaire à une opération non-commutative.

d) *Analyse du procédé de démonstration*

Suivant la nature de l'énoncé, les exemples et contre-exemples peuvent avoir valeur de *démonstration* ou seulement d'*illustration*.

α) Le cas le plus usuel est celui des énoncés universels; alors un seul contre-exemple suffit pour établir la fausseté de l'énoncé.

Ainsi, "9" est un contre-exemple pour la phrase (1) et "matou" pour la phrase (4).

Ni l'incapacité d'exhiber un contre-exemple, ni la mise en évidence d'exemples, même nombreux, ne suffisent en général à établir la vérité de l'énoncé *.

Cependant, si l'ensemble de référence est fini, on peut obtenir une démonstration de type exhaustif en s'assurant que la propriété est vérifiée par tous les éléments de l'ensemble (ce qui n'exclut pas la possibilité d'une autre démonstration, de type déductif). C'est une question de courage, de tempérament, et de cardinal !

β) Dans le cas d'un énoncé existentiel vrai, la mise en évidence d'un exemple suffit à démontrer la vérité de cet énoncé.

Ainsi, 0 est un exemple pour la phrase (5) et 41 est un exemple pour la phrase (6).

Dans le cas d'un énoncé existentiel faux, on remplace généralement cet énoncé par un énoncé universel vrai.

Ainsi, à l'énoncé existentiel: "Il y a une consonne dans l'ensemble de lettres {a, e, i, u}", qui est faux, on préfère "Aucune lettre de l'ensemble {a, e, i, u} n'est une consonne", ou "Toutes les lettres de l'ensemble {a, e, i, u} sont des voyelles"; ce sont deux énoncés universels vrais.

IV. Quelques aspects didactiques

A propos des exemples et contre-exemples utilisés comme illustrations, on peut distinguer:

— des exemples illustrant une définition;

. ils permettent de justifier la définition (c'est-à-dire de mon-

* La situation rencontrée dans la phrase (3) entre dans ce cas; une démonstration est indispensable *logiquement*; en voici une:

N'importe quel multiple de 6 s'écrit sous la forme 6k ($k \in \mathbb{N}$), soit encore (en utilisant l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{N}$) $2 \times (3k)$; ce qui prouve que c'est un multiple de 2.

trer qu'il existe des êtres mathématiques qui répondent à la définition) ;

. ils constituent un support à la pensée.

Bien entendu, certains de ces exemples peuvent précéder la définition, et d'autres la suivre.

— des exemples utilisés comme tests de compréhension; on demande aux élèves de construire eux-mêmes des exemples et des contre-exemples d'une notion donnée.

COUPLE

I. Exemples et contre-exemples permettant de dégager l'idée de n-uplet
II. Notion de n-uplet. Composants d'un n-uplet. Couple, triplet, quadruplet
III. Notation mathématique usuelle
IV. Egalité de deux couples

I. Exemples et contre-exemples permettant de dégager l'idée de n-uplet

(lire ènuplè) (n désigne un naturel)

I.1. Voici un numéro d'immatriculation présenté comme sur les feuilles de maladie:

2	47	11	75	051	060

La lecture se fait de gauche à droite et chacune des six cases a une signification:

- La première contient une indication du sexe (1 ou 2) .
- La deuxième contient les deux chiffres de droite de l'année de naissance.
- La troisième contient le numéro du mois de naissance dans l'année.
- La quatrième contient le numéro du département de naissance.
- La cinquième contient le numéro de la commune de naissance, dans le département.
- La sixième contient le numéro d'ordre sur le registre.

Peut-on, par exemple, permuter les contenus des deux cases de droite ?

Si on le fait, on obtient un autre numéro qui, s'il est attribué, ne l'est sûrement pas à la même personne.

I.2. Considérons le numéro de téléphone d'un abonné de province. Il est formé de 8 chiffres.

Exemple:

35	98	0025

- La première case contient un nombre de deux chiffres caractérisant le département
- La deuxième contient le numéro du standard
- La troisième contient un nombre de 4 chiffres indiquant le numéro d'ordre au standard

Si l'on échange les contenus de deux cases, on est sûr de ne pas joindre le même correspondant.

I.3. On indique couramment une date de la façon suivante:

12—3—1973 ou 12/3/1973 correspond au 12 mars 1973 ;

tandis que

3—12—1973 ou 3/12/1973 correspond au 3 décembre 1973 .

9—9—1973 ou 9/9/1973 correspond au 9 septembre 1973 .

Pour les dates, encore, l'*ordre* dans lequel on cite les nombres joue un rôle essentiel.

I.4. a) On lance une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat "pile" ou "face" après chaque lancer.

On convient:

- de gagner 5 points si l'on obtient face puis pile,
- de gagner 4 points si l'on obtient pile puis face,
- de gagner 3 points si l'on obtient deux fois pile, ou deux fois face.

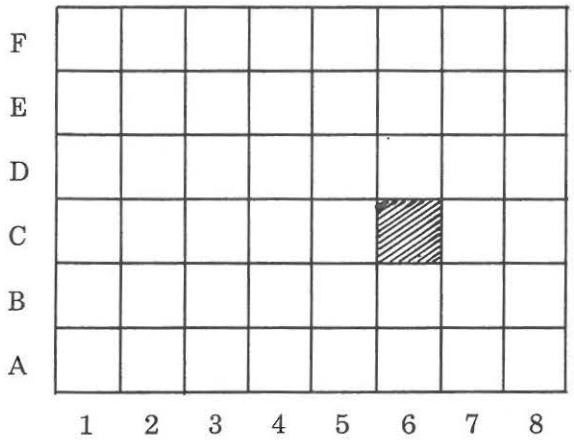
Les scores donnés par pile-face et face-pile sont alors distincts.

I.4. b) On lance ensemble deux pièces de monnaie et on convient maintenant:

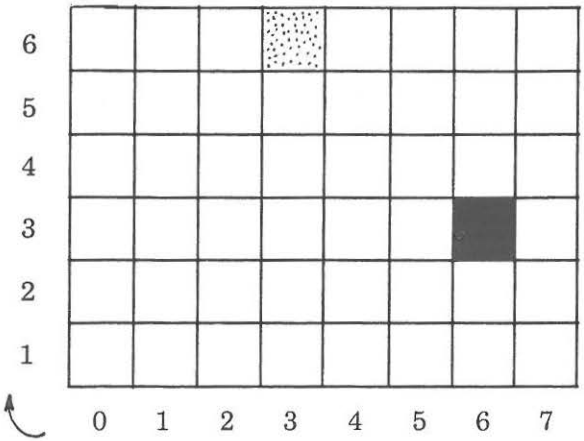
- de gagner 5 points si l'une des pièces marque pile, l'autre marquant face
- de gagner 4 points si les deux pièces marquent pile
- de gagner 3 points si les deux pièces marquent face

I.5. *Mots croisés, bataille navale, repérage*

a) On repère la case noire aussi bien par 6 — C que par C — 6 , autrement dit on la repère par la *paire* {6 ; C}, qui s'écrit aussi bien {C ; 6}.



b)
Le *sens de lecture* étant déterminé par la flèche, la donnée, dans cet ordre, de 6 puis de 3, permet de repérer une case sans ambiguïté (case noircie de la figure ci-après); la donnée de 3 puis de 6 repère une case différente (indiquée par des points).



II. Notion de n-uplet. Composants d'un n-uplet. Couple, triplet, quadruplet

Plusieurs exemples ont fait apparaître la nécessité d'un ordre dans le choix des éléments qui remplissent les cases.

Un *couple* peut être représenté par un tableau à deux cases, chacune contenant un *composant* (nombre, lettre, ...), ce tableau devant être lu dans un ordre déterminé (ordre indiqué par exemple par une flèche). De même, un *triplet* peut être représenté par un tableau à trois cases, un *quadruplet* par un tableau à quatre cases.

On peut ainsi parler du premier composant, du deuxième composant, etc...
On rencontre aussi "terme", "coordonnée", au lieu de "composant", mais "composant" semble préférable, parce que plus spécifique.

Plus généralement, n désignant un naturel, on parle de *n-uplet* et des n composants d'un n-uplet.

Exemples de couples:

On reprend l'exemple du paragraphe I.4. a) :

pile	face

ou encore

pile
face

Pour l'exemple du paragraphe I.5. b) :

6	3

ou encore

6
3

Pratiquement, l'habitude est prise de supprimer la flèche et de lire de gauche à droite ou de haut en bas.

Dans l'exemple du paragraphe I.5. b) le premier composant est un élément de l'ensemble

$$\{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \} ,$$

le second est un élément de l'ensemble

$$\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$$

On remarque que, l'intersection de ces deux ensembles n'étant pas vide, il existe dans ce cas des couples dont les deux composants sont égaux, par exemple

5	5

Pour le cas du paragraphe I.4. b) il est inutile de parler de couples.

De même pour le cas du paragraphe I.5. a) , la case noire du quadrillage peut par exemple être désignée par

C	6

d'autres cases par

A	4

,

D	1

, ...

Le premier composant (écrit à gauche) est un élément de l'ensemble

$$\{A, B, C, D, E, F\} \quad ,$$

et le deuxième composant (écrit à droite) est un élément de l'ensemble

$$\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\} \quad .$$

III. Notation mathématique usuelle

Pour des raisons de commodité typographique, le tableau est remplacé par des signes usuels et on écrit

$(6, 5)$ ou $(6 ; 5)$ ou $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ pour

6	5

Remarque importante:

$\{a, b\}$ et (a, b) représentent deux êtres mathématiques différents.

$\{a, b\}$ est un ensemble; on peut énumérer ses éléments dans n'importe quel ordre, et par conséquent

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

De plus, si $a = b$, cet ensemble se réduit à l'ensemble à un seul élément noté indifféremment $\{a\}$ ou $\{b\}$.

Il en va tout autrement pour un couple; on a vu plus haut que l'ordre dans lequel on a écrit ses composants est fondamental; nous allons préciser.

IV. Egalité de deux couples

"Les couples (a, b) et (c, d) sont égaux"

signifie

" $a = c$ et $b = d$ "

Il en résulte que:

1) Si $a \neq b$, alors $(a, b) \neq (b, a)$.

2) Si $a = b$, alors $(a, b) = (b, a)$

   Réciproquement,

   si $(a, b) = (b, a)$, alors $a = b$.

   Dans ce cas, la notation (a, a) continue à désigner un couple, qui ne se réduit aucunement à l'élément a.

   Exemples: voir les paragraphes I.4. a) et I.5. b).

RELATION BINAIRE

I. Première approche

II. Comment déterminer une relation ?

III. Définition de *relation binaire*

IV. Graphe et lien verbal

V. Relation binaire dans un ensemble

VI. Relations numériques

VII. Relation réciproque d'une relation

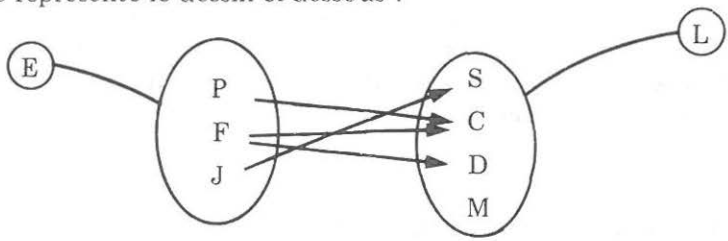
VIII. Remarque

I. Première approche

Trois enfants: Pierre, François, Jacques (nous les désignerons par P, F, J respectivement), ont à leur disposition quatre livres: "Les malheurs de Sophie", "Les Contes de Perrault", "Les derniers jours de Pompéi", "Le Tour du Monde en 80 jours"; désignons-les respectivement par S, C, D, M.

Désignons par E l'ensemble des trois enfants.
Désignons par L l'ensemble des quatre livres.

Que représente le dessin ci-dessous ?



Plusieurs réponses sont possibles:

1. Il peut représenter la situation suivante:

   Pierre n'a pas lu "Les Contes de Perrault"
   François n'a lu ni "les Contes de Perrault"
   ni "Les derniers jours de Pompéi"
   Jacques n'a pas lu "Les malheurs de Sophie".

2. Il peut représenter la situation suivante:

   Pierre a aimé "Les Contes de Perrault"
   François a aimé "Les Contes de Perrault"
   et "Les derniers jours de Pompéi"
   Jacques a aimé "Les malheurs de Sophie".

3. etc...

Plusieurs situations peuvent être représentées par le même dessin.

Dans tous les cas, nous lions des éléments d'un premier ensemble (ici, E) à des éléments d'un second ensemble (ici, L). Dans le dessin, la liaison est assurée par des flèches; dans les réponses possibles, la liaison est assurée par un *lien verbal* (dans la première situation, c'est: "... n'a pas lu ..."; dans la deuxième, c'est: "... a aimé ...", etc ...).

Dans chacun des cas, nous avons fabriqué une *relation* de l'ensemble E vers l'ensemble L. Cette relation est dite *binaire* parce qu'elle fait intervenir deux ensembles. Il existe des relations plus générales; nous n'en parlerons pas ici, et dirons la plupart du temps "relation" tout court en sous-entendant "binaire".

II. Comment déterminer une relation ?

Une relation d'un ensemble S, appelé *source* ou *ensemble de départ*, vers un ensemble B, appelé *but* ou *ensemble d'arrivée*, est déterminée à l'aide d'une procédure qui permet d'associer, à certains éléments de S, certains éléments de B.

Voici quelques procédures:

a) On peut se donner un lien verbal et deux places vides:

... (lien verbal) ...

de telle sorte qu'en mettant dans la place de gauche un élément de S et dans celle de droite un élément de B, on obtienne une phrase telle qu'on puisse décider si elle est vraie ou si elle est fausse. On ne retient que les phrases vraies.

Exemple:

S = {Février, Juillet, Avril} B = {Automne, Eté}

Lien verbal: "... est un mois d' ..."

Pour la place de gauche, nous disposons de trois éléments; pour celle de droite, de deux. Nous pouvons donc écrire six phrases:

"Février est un mois d'Automne"	elle est fausse
"Avril est un mois d'Automne"	elle est fausse
"Juillet est un mois d'Automne"	elle est fausse
"Février est un mois d'Eté"	elle est fausse
"Avril est un mois d'Eté"	elle est fausse
"Juillet est un mois d'Eté"	elle est vraie.

b) On peut se donner explicitement et arbitrairement les couples (voir COUPLE) d'éléments associés, sans faire référence à un quelconque lien verbal.

Il existe, pour ce faire, plusieurs moyens:

α) Ecrire explicitement l'ensemble des couples en question; cet ensemble s'appelle le *graphe* de la relation.

Exemple:

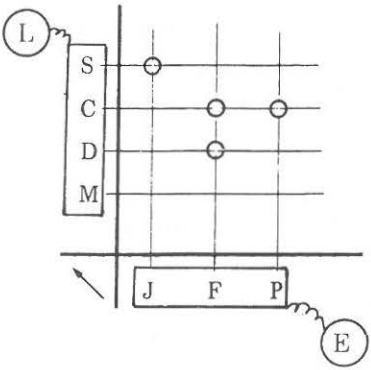
Le graphe de la relation représentée par le dessin du I est l'ensemble $\mathcal{G}$ suivant:

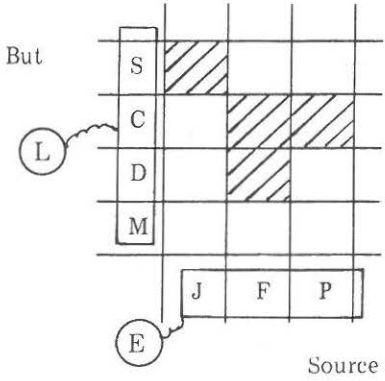
$$\{(P, C), (F, C), (F, D), (J, S)\}$$

β) Dessiner des flèches (comme il a été fait au I).

Le dessin obtenu est souvent appelé *schéma sagittal* ou *schéma fléché.*

γ) Représenter les couples par un *schéma cartésien*, sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes:





Cette liste n'est pas limitative. Tout procédé permettant de visualiser le fait que certains couples sont des couples d'éléments associés et que d'autres couples ne le sont pas est valable dès lors qu'il ne prête pas à confusion; en particulier, le schéma cartésien resterait ambigu en l'absence des indications *source* et *but* (dessin de droite) ou de la flèche (dessin de gauche); et, dans un dessin fléché tel que celui de I, on convient tacitement que les flèches vont de la source vers le but.

III. Définition de "relation binaire"

a) Dans l'exemple du I, on se donne un premier ensemble E et un second ensemble L.

L'ensemble de tous les couples dont le premier terme est élément de E et dont le second terme est élément de L s'appelle *produit cartésien* de E par L, et se note

$$E \times L \qquad \text{(qui se lit "E croix L")}$$

$$E \times L = \{(P,S), (P,C), (P,D), (P,M), (F,S), (F,C), (F,D), (F,M), (J,S), (J,C), (J,D), (J,M)\}$$

Le graphe $\mathcal{G}$ de la relation dont il est question en II, b), α), est le sous-ensemble suivant de $E \times L$:

$$\{(P, C), (F, C), (F, D), (J, S)\}.$$

De même, pour la relation de II, a), à partir des ensembles S et B on a construit $S \times B$:

$S \times B$ = { (Février, Automne), (Février, Eté), (Juillet, Automne), (Juillet, Eté), (Avril, Eté), (Avril, Automne) }

Le graphe de la relation est l'ensemble

{ (Juillet, Eté) }

qui est une partie de $S \times B$.

b) Ce qui précède amène à la définition suivante:

On appelle "relation binaire de K vers F" la donnée de trois ensembles K, F, $\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $K \times F$.
On la note parfois (K, F, $\mathcal{G}$).

Pour cette relation:

K	s'appelle la *source* ou *l'ensemble de départ*
F	s'appelle le *but* ou *l'ensemble d'arrivée*
$\mathcal{G}$	s'appelle le *graphe* .

Exemple
La relation (E, L, $\mathcal{T}$). Son schéma sagittal est le dessin du I.

c) Les descriptions données en a) sont lourdes. On utilise volontiers des représentations graphiques (schémas fléchés ou autres dessins). Mais il est essentiel de ne pas confondre:

1) une telle représentation et la relation elle-même;
2) une représentation graphique (qui est un dessin) et le graphe (qui est un ensemble).

IV. Graphe et lien verbal

1. Voici deux ensembles de mots:

A = {alerte, te, mare} B = {jauge, pie}

a) Appelons $\mathcal{R}$ la relation déterminée par:

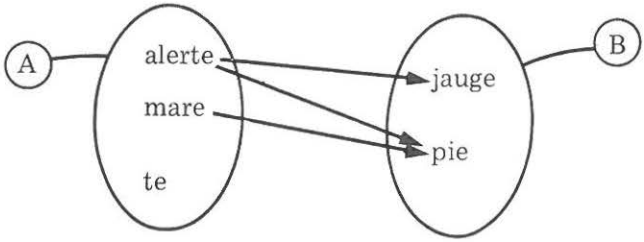
la source A
le but B
le graphe $\mathcal{H}$ suivant:

$\mathcal{H}$ = { (alerte, jauge), (alerte, pie), (mare, pie) }

Autrement dit,

$\mathcal{R} = (A, B, \mathcal{H})$

Voici un schéma sagittal de $\mathcal{R}$:



b) Etudions la relation de source A, de but B, de lien verbal "... a plus de lettres que ...".

Le graphe de cette relation, c'est-à-dire l'ensemble des couples de $A \times B$ qui donnent des phrases vraies, est $\mathcal{H}$ (on s'en aperçoit par exemple en cherchant d'abord son schéma sagittal).

Cette relation *est* donc la relation $\mathcal{R}$.

c) Etudions la relation de source A, de but B, de lien verbal "... précède dans l'ordre alphabétique ...".

On s'aperçoit que le graphe de cette relation, c'est-à-dire l'ensemble des couples de $A \times B$ qui donnent des phrases vraies, est $\mathcal{H}$.

Cette relation *est* donc la relation $\mathcal{R}$.

Deux liens verbaux différents
peuvent donc être affectés à *la même* relation.

2. Plusieurs relations différentes peuvent avoir même lien verbal; ainsi la relation

de source {savon, tarte}
de but {catastrophe, cheval, tour}
de lien verbal "... a plus de lettres que ..."

est évidemment différente de la relation $\mathcal{R}$ vue en 1.

3. Voici deux autres relations: (A et B sont les ensembles vus en 1.)

— $\mathcal{S}$ a pour source A, pour but B, pour lien verbal "... commence par la même lettre que ... " .
Son graphe est l'ensemble vide.

$$\mathcal{S} = (A, B, \phi)$$

— $\mathcal{U}$ a pour source A, pour but B, pour lien verbal "... finit par la même lettre que ...".
Le graphe de $\mathcal{U}$ est le produit cartésien $A \times B$:

$$\mathcal{U} = (A, B, A \times B)$$

V. Relation binaire dans un ensemble

Il peut se faire que le même ensemble E joue à la fois le rôle de source et le rôle de but.
Au lieu de "relation de E vers E", on peut dire aussi "relation dans E".
Le graphe d'une telle relation est une partie de $E \times E$, produit cartésien de E et de E lui-même.

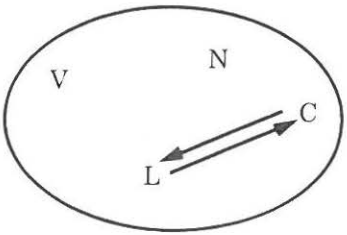
Exemple 1:

Source et but:

{Vercingétorix, Louis XIV, Colbert, Napoléon I }

Lien verbal "... a rencontré ..."

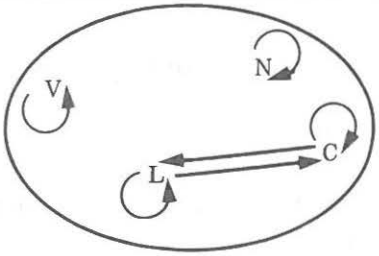
Schéma sagittal:



Ici, le lien verbal seul comporte un degré d'imprécision: doit-on dire que:

"Vercingétorix a rencontré Vercingétorix" ?

Si oui, tous les éléments sont alors *bouclés* et il faut dessiner:



Si non, c'est le dessin précédent qui convient.

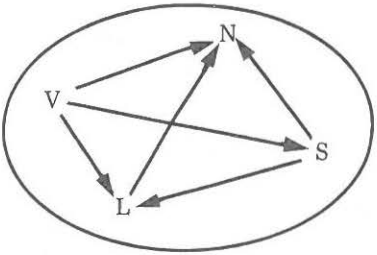
Une fois de plus, il apparaît que le lien verbal n'est pas toujours le moyen le plus simple de bien se faire comprendre. Avec le seul schéma sagittal on risque de ne pas être compris du tout, avec le lien verbal on risque de ne pas être bien compris (ce qui est peut-être plus grave !).

Exemple 2:

Source et but:

{Vercingétorix, Louis XIV, Saint Louis, Napoléon I}

Graphe: {(V, L), (V, S), (V, N), (L, N), (S, N), (S, L)}



Voici un lien verbal possible: "... est né avant ...".

VI. Relations numériques

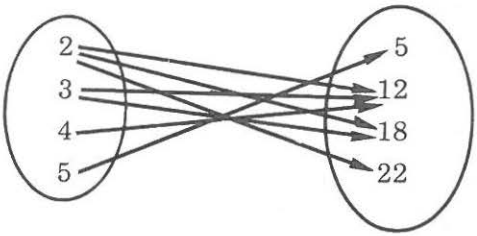
Les relations présentées jusqu'ici étaient liées à la littérature, à la grammaire, à la géographie ou à l'histoire, mais comme la mathématique étudie entre autres les ensembles de nombres, il convient de donner quelques exemples numériques.

Exemple 1:

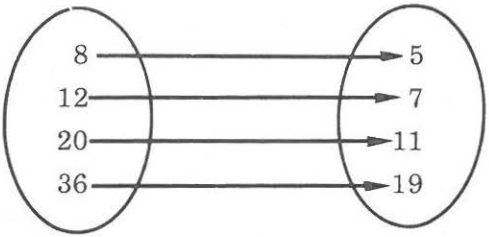
Source **N** , ensemble des naturels
But **N**
Lien verbal "... est la moitié de ..."

Exemple 2:

Source: {2 ; 3 ; 4 ; 5}
But: {5 ; 12 ; 18 ; 22}
Lien verbal "... est diviseur de ..."



Exemple 3:



Le lien verbal "... est le double de ... diminué de 1" est ambigu. Est-ce le double qui est diminué de 1, ou bien est-ce le double d'un nombre qu'on a auparavant diminué de 1 ? Ce lien verbal est à proscrire.

Le lien verbal "... est le double du naturel qui précède ..." est précis, bien qu'un peu lourd.

VII. Relation réciproque d'une relation

a) Imaginons une bibliothèque de classe. On dispose d'un fichier ainsi constitué:
Chaque fiche porte, en titre le nom d'un livre, puis la liste des élèves qui l'ont emprunté depuis la rentrée.

Exemple :

Les malheurs de Sophie
Denise Colette Robert

Les Contes de Perrault
Colette

Les derniers jours de Pompéi
Suzanne Robert Denise

Le Tour du Monde en 80 jours
Jeanne Véronique Francis Colette

Blanche-Neige et les sept nains
Patrick Francis Denise

Sans Famille
Brigitte Patrick Jeanne Colette

Michaël chien de cirque
Jeanne Robert Francis

La case de l'Oncle Tom
Robert Véronique Colette Francis

Le maître veut savoir quelles ont été les lectures de chaque élève . Il peut constituer un autre fichier, dans lequel chaque fiche porte en titre le nom d'un élève, puis la liste des livres qu'il a empruntés.

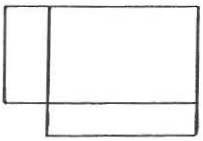
Nous laissons au lecteur le soin de construire ce second fichier.

Le maître peut aussi dresser un tableau à double entrée (voir ci-après); en lisant ce tableau ligne par ligne, on retrouve le premier fichier; en le lisant colonne par colonne, on retrouve le second fichier.

	Denise	Brigitte	Colette	Patrick	Jeanne	Suzanne	Robert	Véronique	Alain	Francis
Les malheurs de Sophie	X		X				X			
Les Contes de Perrault			X							
Les derniers jours de Pompéi	X					X	X			
Le Tour du Monde en 80 jours			X		X			X		X
Blanche-Neige et les sept nains	X			X						X
Sans famille		X	X	X	X					
Michaël chien de cirque					X		X			X
La Case de l'oncle Tom			X				X	X		X

b) En complétant ce tableau par les mots SOURCE et BUT ainsi placés:

SOURCE

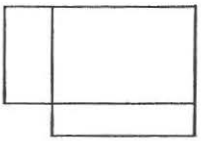


BUT

on obtient le schéma cartésien d'une relation $\mathcal{R}$.

En complétant ce tableau par les mots SOURCE et BUT ainsi placés:

BUT



SOURCE

on obtient le schéma cartésien d'une relation $\mathcal{R}'$.

$\mathcal{R}'$ est la *relation réciproque* de la relation $\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$ est la *relation réciproque* de la relation $\mathcal{R}'$
$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux *relations réciproques.*

Bien que ces deux relations traduisent les mêmes renseignements, elles sont *distinctes*. Les confondre, ce serait méconnaître la distinction essentielle entre la source et le but dans la définition d'une relation.

Dans le tableau ci-dessus, la même case représente:

Le couple (Sans famille, Jeanne) si on considère la relation $\mathcal{R}$ ("Jeanne" figure sur la fiche "Sans famille" du premier fichier).	Le couple (Jeanne, Sans famille) si on considère la relation $\mathcal{R}'$ ("Sans famille" figure sur la fiche "Jeanne" du second fichier).

c) *Définition mathématique*

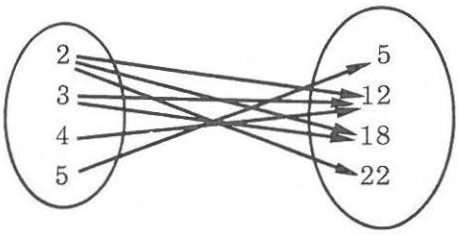
A toute relation (K, F, $\mathcal{G}$), on associe sa *relation réciproque*, qui est la relation (F, K, $\mathcal{G}'$), dont le graphe $\mathcal{G}'$ est l'ensemble des couples (y, x) tels que (x, y) soit élément de $\mathcal{G}$.

La source de chacune de ces deux relations est le but de l'autre.

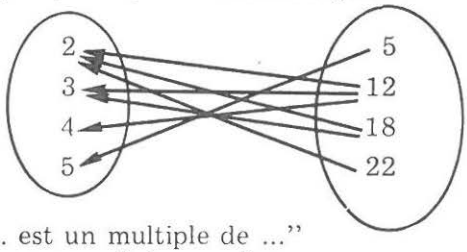
Sauf cas particulier (Voir RELATION SYMETRIQUE), ces deux relations sont distinctes.

d) *Remarque 1:*
Pour passer du schéma sagittal d'une relation à celui de la relation réciproque, il suffit d'inverser le sens des flèches.

Exemple:
Reprenons la relation de l'exemple 2 du VI.



Sa relation réciproque a pour schéma sagittal :



Lien verbal "... est un multiple de ..."
ou encore "... a pour diviseur ..."

e) *Remarque 2:*
Si on dispose d'un lien verbal pour une relation, on obtient souvent un lien verbal pour la relation réciproque en remplaçant la voix active du verbe par la voix passive, ou vice-versa (dans l'exemple vu plus haut, "... a été emprunté par ..." pour la relation $\mathcal{R}$, "... a emprunté ..." pour la relation $\mathcal{R}'$).

Parfois aussi on profite de l'existence de mots appariés, comme "double" et "moitié" ("... est double de ..." pour une relation, "... est moitié de ..." pour la relation réciproque).

VII. Remarque

Au niveau du premier cycle, on utilise souvent les mots *image* et *antécédent* avec les sens suivants:

Pour la relation considérée dans I :

J a pour image S	S a pour antécédent J
Les images de F sont C et D	Les antécédents de C sont P et F

NOMBRE NATUREL

I. Comparaison de deux "tas" d'objets par manipulation
   a) Autant que
   b) Naturel
   c) Plus que, moins que
      Plus petit que, plus grand que

II. Ensemble des naturels
   a) Successeur, prédécesseur
   b) Naturels *un* et *zéro*. Ensemble vide
   c) Ensemble **N**

III. Ensembles finis; ensembles infinis

IV. Cardinal et nombre d'éléments

I. Comparaison de deux tas d'objets par manipulation (tas, collection, ensemble, ...)

a) Deux tas d'objets étant donnés, on prend simultanément un objet dans chaque tas et on répète ce geste jusqu'à épuisement de l'un des tas au moins. C'est ce qu'on appelle établir une *correspondance un-à-un* (ou *correspondance terme à terme*). On ne peut généralement pas savoir à l'avance ce qui va se passer.

Supposons que les deux tas soient épuisés simultanément. Si on recommence la manipulation précédente de toute autre manière, c'est-à-dire en appariant autrement les objets, on constate que, chaque fois, les deux tas sont épuisés simultanément. On dit alors qu'il y a *autant* d'objets dans le premier tas *que* dans le second et qu'il y a *autant* d'objets dans le second *que* dans le premier.

Si l'on considère à présent trois tas, et si par la manipulation on a vérifié que le premier a autant d'éléments que le second, et le second autant que le troisième, on peut prévoir, et vérifier par la manipulation, que le premier a autant d'éléments que le troisième.

b) En multipliant de tels travaux sur des collections variées, on est amené à *classer* ces collections d'après le critère "... avoir autant d'éléments que ..." ; on peut matérialiser cette classification à l'aide de "boîtes" (ou autres "récipients") de telle façon qu'en tirant deux collections quelconques d'une même boîte, on soit assuré qu'elles ont autant d'éléments l'une que l'autre.

Cette classification a mis en évidence une propriété commune à toutes les collections d'une même boîte. C'est cette propriété qu'on appelle *nombre naturel* ou *naturel* (tant que les enfants ne connaissent pas d'autres nombres, on peut aussi dire "nombre"). Chaque boîte définit un *nombre naturel.*

c) Si, par contre, les deux tas ne sont pas épuisés simultanément, on dit qu'il n'y a pas autant d'objets dans l'un que dans l'autre: ils seront placés dans des boîtes différentes. Les nombres naturels associés à ces boîtes sont distincts.

Exemple:

$$17 \neq 23$$

(On lit: 17 n'est pas égal à 23). (En ce qui concerne l'écriture chiffrée des naturels, voir NUMERATION).

Supposons que le tas π (lire "tas pi") soit épuisé avant le tas ρ (lire "tas rhô"). Si on recommence la manipulation précédente de toute autre manière, on constate que, chaque fois, le tas π est épuisé avant le tas ρ. On dit qu'il y a *moins* d'objets dans le tas π *que* dans le tas ρ . On dit aussi qu'il y a *plus* d'objets dans le tas ρ *que* dans le tas π .

Si on place le tas π dans la boîte A et le tas ρ dans la boîte B, toute collection extraite de la boîte A a moins d'objets que toute collection extraite de la boîte B, toute collection extraite de la boîte B a plus d'objets que toute collection extraite de la boîte A. Le naturel associé à la boîte A est plus petit que le naturel associé à la boîte B, le naturel associé à la boîte B est plus grand que le naturel associé à la boîte A.

Exemple:

$$17 < 23$$

(se lit "17 est plus petit que 23" ou "23 est plus grand que 17")
[on peut de même écrire $23 > 17$, qui donne lieu aux deux lectures ci-dessus]

$$17 < 23$$

se lit aussi "17 est inférieur à 23" ou "23 est supérieur à 17"

Considérons à présent trois boîtes, A, B, C. Si le naturel associé à la boîte C est plus petit que le naturel associé à la boîte B, et si le naturel associé à la boîte B est plus petit que le naturel associé à la boîte A, on peut prévoir, et vérifier par des manipulations, que le naturel associé à la boîte C est plus petit que le naturel associé à la boîte A.

II. Ensemble des naturels

a) Il arrive que, après épuisement du tas π, il reste un seul objet dans le tas ρ. On dit indifféremment que le naturel associé à la boîte B est le *successeur* du (ou le *suivant* du, ou le *naturel qui vient après* le ,...)★ naturel associé à la boîte A, ou que le naturel associé à la boîte A est le *prédécesseur* du (ou le *précédent* du, ou le *naturel qui vient avant* le, ...)★ naturel associé à la boîte B.

Plus généralement, chaque naturel a un successeur. Ce successeur a lui-même un successeur. ... De proche en proche, on obtient une suite de naturels, et l'on constate qu'ils sont tous distincts.

b) Revenons aux collections de la boîte B. On retire un objet de chacune d'elles. Les collections obtenues ne vont plus dans la boîte B; elles vont toutes dans la boîte A.

Si l'on recommence de proche en proche la manipulation, on arrive nécessairement à la boîte dont les collections comportent chacune un seul objet (la boîte qui définit le naturel *un*).

On recommence une dernière fois: il n'y a plus de collection ! Le mathématicien a alors créé une notion nouvelle qu'il appelle *l'ensemble vide*. A l'ensemble vide est associé le nouveau naturel

★ Vocabulaire au choix, suivant la classe.

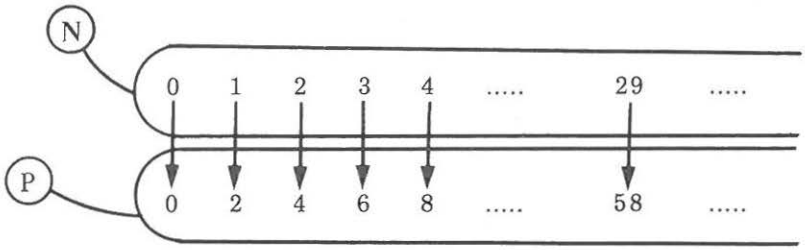
zéro qui est le seul naturel à ne pas avoir de prédécesseur. C'est le plus petit des naturels.

c) L'ensemble des naturels est usuellement noté **N** .

III. Ensembles finis ; ensembles infinis

a) *Premier exemple*
Appelons P l'ensemble des naturels pairs.
Considérons la bijection (voir BIJECTION) de **N** vers P ainsi définie:

A tout naturel on associe son double:



Cette bijection évoque les correspondances un-à-un du paragraphe I.
Mais elle en diffère par le fait que P est une partie de **N** (autre que **N** lui-même).

Deuxième exemple
Considérons l'ensemble Φ des lettres de l'alphabet; quel que soit le sous-ensemble Ω de Φ , *autre que* Φ *lui-même*, il est impossible de trouver une bijection de Φ vers Ω .

b) Cette différence entre les deux situations conduit aux définitions suivantes :

1. "L'ensemble E est infini"
signifie
"Il existe une bijection de E vers une partie de E autre que E"

Exemples:
N est un ensemble infini .
L'ensemble des naturels pairs, l'ensemble des naturels plus

grands que 20, l'ensemble des puissances de 10, ... sont aussi des ensembles infinis.

2. Un *ensemble fini* est un ensemble qui n'est pas infini.

Exemples:

L'ensemble des lettres de l'alphabet.
Toutes les collections qu'on manipule.

IV. Cardinal et nombre d'éléments

S'il existe une bijection de l'ensemble E vers l'ensemble F, on dit que E et F ont même *cardinal*. Ce mot nouveau a l'intérêt de couvrir à la fois le cas de deux ensembles finis et le cas de deux ensembles infinis.

Dans le cas d'ensembles finis, "cardinal" est synonyme de "nombre d'éléments".

Remarques

1. La "comparaison" d'ensembles infinis, plus délicate, ne peut être abordée dans cet article; on notera seulement que les ensembles infinis n'ont pas tous le même cardinal.
2. L'usage des mots techniques: *cardinal*, *ensemble fini*, *ensemble infini*, *ensemble vide*, introduits dans la présente rubrique, est loin de s'imposer à l'école élémentaire.

ENTIERS ET RATIONNELS

I. Introduction
II. Quelques équations
III. Préparation des deux constructions
IV. Principe des deux constructions
V. Les édifices proprement dits
VI. Notations
VII. Enrichissement des structures de Z et de Q_*^+
VIII. L'ensemble Q

I. Introduction

Que penser des égalités suivantes:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{3}{1} = 3 \qquad ?$$

$\frac{6}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont-elles des fractions égales ? des fractions équivalentes ? $\frac{6}{4}$ est-il le quotient de 6 par 4 ?

Qu'est-ce qu'une fraction ? Est-ce un couple de naturels ? Est-ce un nombre ?

Pour aider le lecteur:

1) nous lui proposons ci-dessous un cheminement mathématique long mais efficace pour lequel il est prié d'oublier (provisoirement) tout ce que le mot "fraction" peut évoquer pour lui.
2) nous le renvoyons à FRACTION.

Nous supposerons connus: l'ensemble des naturels noté **N**, l'addition et la multiplication dans **N**. L'ensemble des naturels privé de zéro sera noté N_* .

Nous proposons ci-dessous en parallèle une présentation de l'ensemble **Z** des entiers (colonne de gauche) et une présentation de l'ensemble $\mathbf{Q}^+$ des rationnels positifs (colonne de droite). Dans une première étude, on peut lire d'abord la colonne de gauche, puis celle de droite.
La colonne de gauche décrit une démarche qui est souvent utilisée dans les classes de sixième et de cinquième.

II. Quelques équations

Nous prendrons comme point de départ le fait que:

a et b étant choisis dans N, l'équation dans N

$$a + x = b$$

n'a de solution que sous réserve d'un choix convenable de a et de b. (On rappelle qu'une solution d'une équation dans N est un naturel tel que, si on le substitue à x, l'égalité obtenue soit vraie).

Exemples

(1) L'équation dans N

$$5 + x = 8$$

a une solution unique 3 ; on peut la désigner par $8 - 5$.

a et b étant choisis dans N_*, l'équation dans N_* du type

$$a \times x = b$$

n'a de solution que sous réserve d'un choix convenable de a et de b. (On rappelle qu'une solution d'une équation dans N_* est un naturel différent de 0 tel que, si on le substitue à x, l'égalité obtenue soit vraie).

(*zéro* est temporairement exclu, compte tenu de son rôle particulier vis-à-vis de la multiplication et de la division)

Exemples

(1) L'équation dans N_*

$$3 \times x = 21$$

a une solution unique 7 ; on peut la désigner par $21 : 3$.

(2) L'équation dans N

$$7 + x = 2$$

n'a pas de solution. L'écriture $2 - 7$ ne désigne donc aucun naturel.

Intentions

C'est pourquoi on va montrer comment construire un ensemble d'êtres mathématiques "contenant" N et dans lequel toute équation du type

$$a + x = b$$

aura une solution unique.

(2) L'équation dans N_*

$$11 \times x = 8$$

n'a pas de solution. L'écriture $8 : 11$ ne désigne donc aucun naturel.

Intentions

C'est pourquoi on va montrer comment construire un ensemble d'êtres mathématiques "contenant" N_* et dans lequel toute équation du type

$$a \times x = b$$

aura une solution unique.

Les deux constructions présentées en parallèle ci-dessous pourront paraître lourdes à première vue. Il en va souvent ainsi dans une construction: à une étape donnée, l'observateur voit l'échafaudage mieux que l'édifice.

Les notations adoptées sont adéquates à la construction choisie, mais ne seraient pas commodes dans les calculs pratiques.A la fin de la construction, nous reviendrons aux notations usuelles, dont le sens aura ainsi été précisé, et dont on verra apparaître la simplicité d'utilisation:

Dans l'ensemble Z des *entiers*, l'équation

$$5 + x = 8$$

aura une solution unique notée 3 ou $8 - 5$;

l'équation

$$7 + x = 2$$

aura une solution unique notée $2 - 7$, ou -5, ou $\overline{5}$, ou 5^{-}, ou ...

Dans l'ensemble Q_*^+ des *rationnels strictement positifs*, l'équation

$$3x = 21$$

aura une solution unique notée 7 ou $21 : 3$ ou $21/3$ ou $\frac{21}{3}$;

l'équation

$$11 \times x = 8$$

aura une solution unique, notée $8 : 11$, ou $8/11$, ou $\frac{8}{11}$, ou ...

III. Préparation des deux constructions

Première étape

$$5 + x = 8$$

a pour solution $8 - 5$;
nous associons à cette équation le couple de naturels (8,5) (voir COUPLE).

Au couple (13, 2) associons l'équation

$$2 + x = 13 \quad ,$$

au couple (2, 7) associons l'équation

$$7 + x = 2$$

Deuxième étape

$$5 + x = 8$$

a pour solution 3.

D'autres équations dans N ont aussi 3 pour solution, par exemple:

(3) $1 + x = 4$

(4) $10 + x = 13$

Par contre:

(5) $2 + x = 6$

a une solution unique qui n'est pas 3.

(6) $7 + x = 2$

n'a pas de solution dans N.

Nous pouvons traduire que

$$5 + x = 8 \quad \text{et} \quad 1 + x = 4$$

ont même solution par l'égalité portant sur les naturels:

$$8 - 5 = 4 - 1$$

Mais cette écriture ne peut être étendue (du moins pour l'instant) à des cas comme

$$2 - 7 = 4 - 9$$

Première étape

$$3 \times x = 21$$

a pour solution $21 : 3$;
nous associons à cette équation le couple de naturels (21, 3) (voir COUPLE).

Au couple (4, 12) associons l'équation

$$12 \times x = 4 \quad ,$$

au couple (8, 11) associons l'équation

$$11 \times x = 8$$

Deuxième étape

$$3 \times x = 21$$

a pour solution 7.

D'autres équations dans N_* ont aussi 7 pour solution, par exemple:

(3) $2 \times x = 14$

(4) $15 \times x = 105$

Par contre:

(5) $4 \times x = 12$

a une solution unique qui n'est pas 7.

(6) $7 \times x = 3$

n'a pas de solution dans N_* .

Nous pouvons traduire que

$$3 \times x = 21 \quad \text{et} \quad 15 \times x = 105$$

ont même solution par l'égalité portant sur les naturels:

$$21 : 3 = 105 : 15$$

Mais cette écriture ne peut être étendue (du moins pour l'instant) à des cas comme

$$4 : 6 = 18 : 27$$

puisque ni $2-7$ ni $4-9$ ne désignent des naturels.

Pour surmonter cette difficulté, on constate que, par exemple,

$$8-5 = 4-1$$

peut se remplacer par

$$8+1 = 4+5$$

où ne figurent plus que des sommes désignant *des éléments de* N.

On décide alors que

$$(a, b)\ \mathcal{A}\ (c, d)$$

signifie dans tous les cas

$$a+d = b+c$$

introduisant ainsi une relation notée $\mathcal{A}$ dans l'ensemble des couples de naturels.

Dès lors,

$$(2, 7)\ \mathcal{A}\ (3, 5)$$

est faux, puisque

$$2+5 = 7+3$$

l'est; par contre

$$(2, 7)\ \mathcal{A}\ (4, 9)$$

est vrai car

$$2+9 = 7+4$$

l'est.

Troisième étape

$5+x=8$ a pour solution 3.
$2+y=11$ a pour solution 9.
Or, il existe des équations ayant pour solution $3+9$:

$$1+u=13 \quad ; \quad 4+v=16$$
$$23+w=35 \quad ; \quad \text{etc...}$$

en particulier,

$$7+t=19$$

ou $(5+2)+t=(8+11)$

puisque ni $4:6$ ni $18:27$ ne désignent des naturels.

Pour surmonter cette difficulté, on constate que, par exemple,

$$21:3 = 105:15$$

peut se remplacer par

$$21 \times 15 = 105 \times 3$$

où ne figurent plus que des produits, désignant *des éléments de* N_*.

On décide alors que

$$(a, b)\ \mathcal{M}\ (c, d)$$

signifie dans tous les cas

$$a \times d = b \times c$$

introduisant ainsi une relation notée $\mathcal{M}$ dans l'ensemble des couples de naturels différents de 0.

Dès lors,

$$(7, 3)\ \mathcal{M}\ (2, 5)$$

est faux, puisque

$$7 \times 5 = 3 \times 2$$

l'est; par contre

$$(7, 3)\ \mathcal{M}\ (42, 18)$$

est vrai car

$$7 \times 18 = 3 \times 42$$

l'est.

Troisième étape

$3 \times x = 21$ a pour solution 7.
$2 \times y = 6$ a pour solution 3.
Or, il existe des équations ayant pour solution 7×3 :

$$2 \times u = 42 \quad ; \quad 7 \times v = 147$$
$$11 \times w = 231 \quad ; \quad \text{etc...}$$

en particulier,

$$6 \times t = 126$$

ou $(3 \times 2) \times t = (21 \times 6)$

Cela nous conduit à introduire l'"addition" des couples de naturels, que nous noterons ++

Exemples (7)

$(8, 5) ++ (11, 2) = (19, 7)$
$(3, 7) ++ (5, 12) = (8, 19)$
$(4, 0) ++ (31, 0) = (35, 0)$
$(3, 0) ++ (0, 8) = (3, 8)$
...etc...

Cela nous conduit à introduire la "multiplication" des couples de naturels non nuls, que nous noterons $\times\times$

Exemples (7)

$(21, 3) \times\times (6, 2) = (126, 6)$
$(3, 7) \times\times (5, 12) = (15, 84)$
$(4, 1) \times\times (31, 1) = (124, 1)$
$(3, 1) \times\times (1, 8) = (3, 8)$
...etc...

IV. Principe des deux constructions

Les étapes précédentes nous fournissent la trame des constructions présentées ci-dessous. A l'issue de ces constructions, il faudra savoir si nous avons résolu le problème posé (résolution d'équations), situer les ensembles introduits par rapport à N (colonne de gauche), à N_* (colonne de droite), enfin améliorer les notations conformément à l'usage établi.

Une opération sur les couples

Nous définissons dans $N \times N$ une loi de composition notée ++ , de la manière suivante :

$(a, b) ++ (c, d) = (a + c, b + d)$

Une relation dans $N \times N$

On définit la relation notée $\mathcal{A}$ de $N \times N$ vers $N \times N$ de la manière suivante:

$(a, b)\ \mathcal{A}\ (c, d)$ signifie $a + d = b + c$

Le lecteur est invité à prouver que $\mathcal{A}$ est une relation d'équivalence dans $N \times N$.

Une opération sur les couples

Nous définissons dans $N_* \times N_*$ une loi de composition notée $\times\times$, de la manière suivante:

$(a, b) \times\times (c, d) = (a \times c, b \times d)$

Une relation dans $N_* \times N_*$

On définit la relation notée $\mathcal{M}$ de $N_* \times N_*$ vers $N_* \times N_*$ de la manière suivante:

$(a, b)\ \mathcal{M}\ (c, d)$ signifie $a \times d = b \times c$

Le lecteur est invité à prouver que $\mathcal{M}$ est une relation d'équivalence dans $N_* \times N_*$.

(voir RELATION D'EQUIVALENCE)

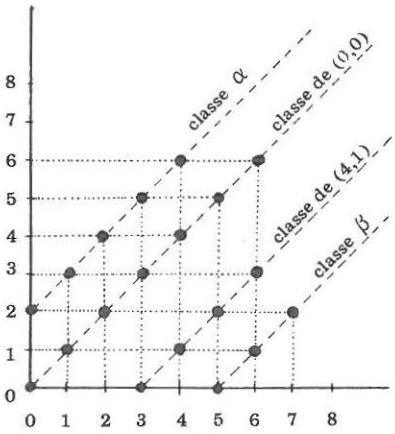
Des classes de couples

Les couples (3, 5), (8, 10), (0, 2), (114, 116) sont éléments d'une même classe d'équivalence; notons-la α.

Les couples (7, 2), (5, 0), (89, 84) sont éléments d'une même classe d'équivalence (distincte de α); notons-la β.

Le lecteur pourra construire ainsi d'autres classes d'équivalence et constatera que toute classe contient un seul couple de l'un des trois types: (a, 0), (0, a), (0, 0) où a est un naturel non nul.

Voici une représentation possible pour les classes d'équivalence relatives à $\mathcal{A}$:



Des classes de couples

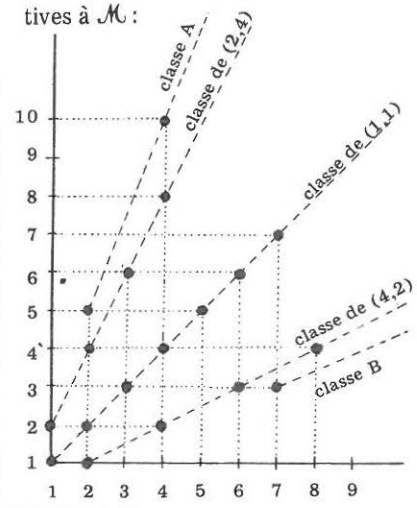
Les couples (4, 10), (14, 35), (2, 5), (20, 50) sont éléments d'une même classe d'équivalence; notons-la A.

Les couples (14, 6), (7, 3), (280, 120) sont éléments d'une même classe d'équivalence (distincte de A); notons-la B.

Le lecteur pourra construire ainsi d'autres classes d'équivalence et constatera que toute classe contient un seul couple (a, b) où a et b sont étrangers*; par exemple (2, 5) pour la classe A.

Ce couple privilégié peut en particulier être de l'un des trois types (a, 1), (1, a), (1, 1) où le naturel a est distinct de 1; mais ce n'est pas le cas général.

Voici une représentation possible pour les classes d'équivalence relatives à $\mathcal{M}$:



* "étrangers" signifie "qui n'ont pas d'autre diviseur commun que 1" (on dit aussi "premiers entre eux").

Une opération sur les classes

A un couple de α et à un couple de β, nous associons un couple à l'aide de la loi de composition notée ++.

Par exemple:

$$(3, 5) ++ (89, 84) = (92, 89)$$

Faisons d'autres choix dans α et dans β :

$$(8, 10) ++ (5, 0) = (13, 10)$$
$$(0, 2) ++ (5, 0) = (5, 2)$$

etc...

On constate alors que les couples (92, 89), (13, 10), (5, 2) sont éléments d'une même classe; notons-la γ.

Il est tout à fait remarquable que, quels que soient les couples choisis dans α et dans β, les composés appartiennent toujours à la classe γ.

Le lecteur est invité à choisir deux autres classes, à reprendre la démarche ci-dessus, et à constater que les composés appartiennent toujours à la même classe.

On démontre que ce phénomène est général, et de ce fait on définit ainsi une loi de composition, que nous noterons $\oplus$, dans l'ensemble des classes.

Exemples:

Désignons par $\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}$ (0, 2) la classe du couple (0, 2) pour la relation $\mathcal{A}$:

$\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}$ (0, 2) =
$\{(0, 2),(5, 7),(11, 13), \ldots\}$

Une opération sur les classes

A un couple de A, et à un couple de B, nous associons un couple à l'aide de la loi de composition notée ××.

Par exemple:

$$(4, 10) \times\times (7, 3) = (28, 30)$$

Faisons d'autres choix dans A et dans B:

$$(14, 35) \times\times (14, 6) = (196, 210)$$
$$(2, 5) \times\times (280, 120) = (560, 600)$$
$$(2, 5) \times\times (7, 3) = (14, 15)$$

etc...

On constate alors que les couples (28, 30), (196, 210), (560, 600), (14, 15) sont éléments d'une même classe; notons-la C.

Il est tout à fait remarquable que, quels que soient les couples choisis dans A et dans B, les composés appartiennent toujours à la classe C.

Le lecteur est invité à choisir deux autres classes, à reprendre la démarche ci-dessus, et à constater que les composés appartiennent toujours à la même classe.

On démontre que ce phénomène est général, et de ce fait on définit ainsi une loi de composition, que nous noterons $\otimes$, dans l'ensemble des classes.

Exemples:

Désignons par $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}$ (4, 10) la classe du couple (4, 10) pour la relation $\mathcal{M}$:

$\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}$ (4, 10) =
$\{(4, 10),(2, 5), (28, 70),\ldots\}$

Alors:

(8)

$Cl_{\mathcal{A}}\ (0, 2) \oplus Cl_{\mathcal{A}}\ (5, 0) = Cl_{\mathcal{A}}\ (5,2)$

(9)

$Cl_{\mathcal{A}}\ (3, 0) \oplus Cl_{\mathcal{A}}\ (4, 0) = Cl_{\mathcal{A}}\ (7,0)$

Alors:

(8)

$Cl_{\mathcal{M}}\ (4, 10) \otimes Cl_{\mathcal{M}}\ (7, 3) = Cl_{\mathcal{M}}\ (28, 30)$

(9)

$Cl_{\mathcal{M}}\ (2, 1) \otimes Cl_{\mathcal{M}}\ (3, 1) = Cl_{\mathcal{M}}\ (6, 1)$

V. Les édifices proprement dits

L'exemple (9) permet de constater un "parallélisme opératoire" entre la loi de composition $\oplus$ et l'addition des naturels:

$$Cl_{\mathcal{A}}\ (3,0) \oplus Cl_{\mathcal{A}}\ (4,0) = Cl_{\mathcal{A}}\ (7,0)$$

$$3 + 4 = 7$$

C'est pourquoi on identifie 3 et $Cl_{\mathcal{A}}\ (3, 0)$, 4 et $Cl_{\mathcal{A}}\ (4, 0)$, etc...; plus généralement, pour tout naturel a:

$$Cl_{\mathcal{A}}\ (a, 0) = a \quad ★$$

Dès lors, N est un sous-ensemble de l'ensemble des classes, ensemble qu'on note Z :

$$N \subset Z$$

Les éléments de Z s'appellent les entiers. Tout naturel est un entier.

★ On aurait pu constater un parallélisme analogue entre

$Cl_{\mathcal{A}}\ (0, 3) \oplus Cl_{\mathcal{A}}\ (0, 4) = Cl_{\mathcal{A}}\ (0, 7)$

et $3 + 4 = 7$

et choisir d'identifier systématiquemnt a et $Cl_{\mathcal{A}}\ (0, a)$.

On démontre que l'une et l'autre identifications mènent aux mêmes résultats.

L'exemple (9) permet de constater un "parallélisme opératoire" entre la loi de composition $\otimes$ et la multiplication des naturels:

$$Cl_{\mathcal{M}}(2,1) \otimes Cl_{\mathcal{M}}(3,1) = Cl_{\mathcal{M}}(6,1)$$

$$2 \times 3 = 6$$

C'est pourquoi on identifie 2 et $Cl_{\mathcal{M}}\ (2, 1)$, 3 et $Cl_{\mathcal{M}}\ (3, 1)$, etc...; plus généralement, pour tout naturel non nul a:

$$Cl_{\mathcal{M}}\ (a, 1) = a \quad ★$$

Dès lors, N_* est un sous-ensemble de l'ensemble des classes, ensemble qu'on note Q_*^+ :

$$N_* \subset Q_*^+$$

Les élements de Q_*^+ s'appellent les rationnels strictement positifs. Tout naturel non nul est un rationnel strictement positif.

★ On aurait pu constater un parallélisme analogue entre

$Cl_{\mathcal{M}}(1, 2) \otimes Cl_{\mathcal{M}}(1, 3) = Cl_{\mathcal{M}}(1, 6)$

et $2 \times 3 = 6$

et choisir d'identifier systématiquement a et $Cl_{\mathcal{M}}(1, a)$.

On démontre que l'une et l'autre identifications mènent aux mêmes résultats.

La loi dans Z notée jusqu'ici $\oplus$ s'appelle addition des entiers; on la note en pratique $+$, comme l'addition dans N qu'elle "prolonge".

On démontre que la loi $+$ dans Z est commutative et associative, que Z possède un élément neutre pour $+$, à savoir 0, et est symétrisé pour $+$, c'est-à-dire que chaque entier a un opposé : par exemple :
$Cl_{\mathcal{A}}(4, 0)$ (autrement dit 4) et $Cl_{\mathcal{A}}(0, 4)$ sont opposés.

Ces propriétés permettent de démontrer que toute équation dans Z du type

$$\alpha + x = \beta$$

(où α et β sont des entiers choisis de façon quelconque) a une solution unique, élément de Z. Exemples:

(10)

$$Cl_{\mathcal{A}}(1, 4) + y = Cl_{\mathcal{A}}(7, 35)$$
$$y = Cl_{\mathcal{A}}(7, 35) + Cl_{\mathcal{A}}(4, 1)$$
$$y = Cl_{\mathcal{A}}(11, 36)$$

(11)

$$Cl_{\mathcal{A}}(7, 0) + t = Cl_{\mathcal{A}}(2, 0)$$
(ou $7 + t = 2$)
$$t = Cl_{\mathcal{A}}(2, 0) + Cl_{\mathcal{A}}(0, 7)$$
$$t = Cl_{\mathcal{A}}(2, 7)$$

Ainsi est réalisée l'intention de II; par exemple, l'équation dans Z:

$$7 + t = 2$$

La loi dans Q_*^+ notée jusqu'ici $\odot$ s'appelle multiplication des rationnels strictement positifs; on la note en pratique $\times$, comme la multiplication dans N_* qu'elle "prolonge".

On démontre que la loi $\times$ dans Q_*^+ est commutative et associative, que Q_*^+ possède un élément neutre pour $\times$, à savoir 1, et est symétrisé pour $\times$, c'est-à-dire que chaque rationnel strictement positif a un inverse; par exemple:
$Cl_{\mathcal{M}}(2, 3)$ et $Cl_{\mathcal{M}}(3, 2)$ sont inverses; $Cl_{\mathcal{M}}(2, 1)$ (autrement dit 2) et $Cl_{\mathcal{M}}(1, 2)$ sont inverses.

Ces propriétés permettent de démontrer que toute équation dans Q_*^+ du type:

$$A \times x = B$$

(où A et B sont deux rationnels strictement positifs choisis de façon quelconque) a une solution unique, élément de Q_*^+. Exemples:

(10)

$$Cl_{\mathcal{M}}(2, 3) \times y = Cl_{\mathcal{M}}(7, 13)$$
$$y = Cl_{\mathcal{M}}(7, 13) \times Cl_{\mathcal{M}}(3, 2)$$
$$y = Cl_{\mathcal{M}}(21, 26)$$

(11)

$$Cl_{\mathcal{M}}(11, 1) \times t = Cl_{\mathcal{M}}(8, 1)$$
(ou $11 \times t = 8$)
$$t = Cl_{\mathcal{M}}(8, 1) \times Cl_{\mathcal{M}}(1, 11)$$
$$t = Cl_{\mathcal{M}}(8, 11)$$

Ainsi est réalisée l'intention de II; par exemple, l'équation dans Q_*^+

$$11 \times t = 8$$

a une solution unique, qui est l'entier (non naturel) $Cl_{\mathcal{A}}(2, 7)$; alors que l'équation dans N de l'exemple (2):

$$7 + t = 2$$

n'a pas de solution.

Bien mieux, l'existence d'une solution unique est assurée pour

$$\alpha + x = \beta$$

α et β étant des entiers quelconques (naturels ou non).

à une solution unique, qui est le rationnel strictement positif (non naturel) $Cl_{\mathcal{M}}(8, 11)$; alors que l'équation dans N_* de l'exemple (2) :

$$11 \times t = 8$$

n'a pas de solution.

Bien mieux, l'existence d'une solution unique est assurée pour

$$A \times x = B$$

A et B étant des rationnels strictement positifs quelconques (naturels ou non).

VI. Notations

1. *Notation des entiers*

α) On a posé ci-dessus: $Cl_{\mathcal{A}}(3, 0) = 3$

Il reste à noter commodément les entiers non naturels. On pose:

$$Cl_{\mathcal{A}}(0, 3) = -3 \qquad Cl_{\mathcal{A}}(0, 17) = -17$$

etc...

Finalement:

$$Z = \{ 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; \dots \}$$

Les entiers $0 ; -1 ; -2 ; -3 ; \dots$ sont dits **entiers négatifs**; leur ensemble se note Z^-.

Les naturels $(0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots)$ sont encore appelés **entiers positifs.**

N se note encore Z^+. **Naturel** et **entier positif** sont synonymes.

0 est un entier à la fois positif et négatif.

Une étude plus détaillée de **Z** montre que les notations précédentes suffisent à conduire commodément tous les calculs dans **Z**.

Reprenons par exemple les deux équations dans **Z** (exemples (10) et (11)) avec les nouvelles notations:

(10) $$Cl_{\mathcal{A}}(1, 4) + y = Cl_{\mathcal{A}}(7, 35)$$

s'écrit $$(-3) + y = (-28)$$
$$y = (-28) + 3$$
$$y = (-25)$$

(11) $$\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}\,(7, 0) + t = \mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}\,(2, 0)$$

s'écrit $$7 + t = 2$$
$$t = 2 + (-7)$$
$$t = (-5)$$

β) Quand elle existe, la solution unique de l'équation dans **N** "$a + x = b$" se note $b - a$.
De même, dans **Z**, la solution unique de "$a + x = b$" se note $b - a$ (*différence* $b - a$).

Par exemple:

$$(-28) - (-3) = (-25) \qquad 2 - 7 = (-5)$$

Remarque: Beaucoup d'enseignants préfèrent éviter, lors de l'initiation aux entiers, la notation -6; ils utilisent, provisoirement, 6^{-}, ou $\overline{6}$, ou deux couleurs différentes pour les entiers positifs et les entiers négatifs, etc... Il importe en effet de distinguer, en un premier temps, le signe $-$ qui caractérise les entiers négatifs et le signe opératoire de la soustraction.

2. *Notation des rationnels strictement positifs*

α) La situation est bien différente, car les classes sont:

soit de la forme $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(a, 1)$: il s'agit du naturel a

soit de la forme $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(1, a)$ où $a \neq 1$

soit de la forme $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(a, b)$ où a et b, différents de 1, sont étrangers.

a) Il faut donc renoncer à chercher une notation qui ne ferait intervenir qu'un naturel (comme c'est le cas dans **Z**).

b) On pourrait penser à privilégier un couple, par exemple le couple des naturels étrangers (couple "irréductible"; ainsi, pour $Cl_{\mathcal{M}}(6, 8)$, c'est le couple (3, 4).

Mais une étude plus détaillée de $\mathbf{Q}^+_*$ montre que ce couple ne suffit pas à tous les calculs dans $\mathbf{Q}^+_*$, ni d'ailleurs aucun autre couple particulier: par exemple, l'addition dans $\mathbf{Q}^+_*$ exige souvent une "réduction au même dénominateur" où on abandonne le couple en question.

c) Chaque rationnel positif a *une infinité* de notations, et pour chaque problème on choisit la notation la mieux adaptée.

Par exemple, le rationnel positif $Cl_{\mathcal{M}}(6, 8)$, qui est l'ensemble des couples (6, 8); (45, 60); (18, 24); (3, 4); ... se note:

$$\frac{6}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{45}{60} \quad \text{ou} \quad \frac{18}{24} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 6/8 \quad \text{ou} \quad 45/60 \ \ldots$$

Donc

$$\frac{6}{8} = \frac{18}{24} \quad , \quad \frac{3}{4} = 45/60 \quad , \quad \text{etc...}$$

(voir EGALITE)

Remarquons à ce propos que $Cl_{\mathcal{M}}(3, 1)$ peut se noter, entre autres, $\frac{3}{1}$ ou 3/1. Mais on a posé (voir fin de V): $Cl_{\mathcal{M}}(3, 1) = 3$.

Donc
$$\frac{3}{1} = 3$$

Plus généralement, la classe commune aux couples (a, b), (c, d), etc... se note indifféremment:

$$\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad a/b \quad \text{ou} \quad \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad c/d \quad \text{ou} \quad \ldots,$$

(c, d) étant tel que $(c, d)\ \mathcal{M}\ (a, b)$, autrement dit tel que
$$ad = bc$$

D'où un moyen de savoir si deux écritures différentes désignent ou non *un même* rationnel positif.

Exemples:

(12) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ car $6 \times 2 = 4 \times 3$

(13) $\frac{4}{14} = \frac{22}{77}$ car $4 \times 77 = 14 \times 22$

(14) $\frac{4}{14} \neq \frac{29}{101}$ car $4 \times 101 \neq 14 \times 29$

Reprenons, avec ces nouvelles notations, les deux équations dans Q_*^+ (exemples (10) et (11)):

(10) $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(2, 3) \times y = \mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(7, 13)$

s'écrit

$$\frac{2}{3} \times y = \frac{7}{13}$$

$$y = \frac{7}{13} \times \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{21}{26}$$

(11) $\mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(11, 1) \times t = \mathrm{Cl}_{\mathcal{M}}(8, 1)$

s'écrit

$$11 \times t = 8$$

$$t = \frac{8}{1} \times \frac{1}{11}$$

$$t = \frac{8}{11}$$

β) Quand elle existe, la solution unique de l'équation dans N_* "$a \times y = b$" peut se noter $b : a$

De même, dans Q_*^+, la solution unique de "$A \times y = B$" (*quotient* de B par A) peut se noter $B : A$.

Par exemple:

La solution de l'équation de l'exemple (10) (voir α)) peut être

notée indifféremment

$$\frac{21}{26} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{13} : \frac{2}{3}$$

De même la solution de l'équation de l'exemple (11) peut être notée indifféremment

$$\frac{8}{11} \quad \text{ou} \quad 8 : 11$$

Par conséquent

$$\frac{7}{13} : \frac{2}{3} = \frac{21}{26} \qquad 8 : 11 = \frac{8}{11}$$

Plus généralement:

$$A : B = \frac{A}{B}$$

(voir EGALITE)

γ) Les notations $\frac{A}{B}, \frac{4}{14}, \frac{7}{13}, \ldots$ sont des **notations fractionnaires** (voir FRACTION).

Tout élément de Q^+_* peut être représenté par une infinité de notations fractionnaires. De plus, certains d'entre eux (voir DECIMAL) peuvent être aussi représentés par des notations décimales; exemple:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

VII. Enrichissement des structures de Z et de Q^+_*

	En adjoignant 0 à Q^+_*, on obtient l'ensemble, noté Q^+, des rationnels nul ou positifs.
On peut définir dans Z une multiplication et un ordre qui prolongent ceux de N.	**On peut définir dans Q^+ une addition et un ordre qui prolongent ceux de N.**

VIII. L'ensemble Q

Dans Z, les équations du type

$$a \times t = b$$

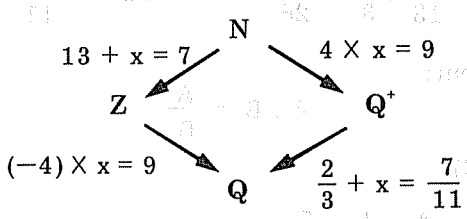
où $a \neq 0$, n'ont de solution que pour un choix convenable de a et de b; la démarche qu'on a utilisée ci-dessus à droite pour construire Q^+ permettrait ici de construire un nouvel ensemble.

Dans Q^+, les équations du type

$$a + t = b$$

n'ont de solution que pour un choix convenable de a et de b; la démarche qu'on a utilisée ci-dessus à gauche pour construire Z permettrait ici de construire un nouvel ensemble.

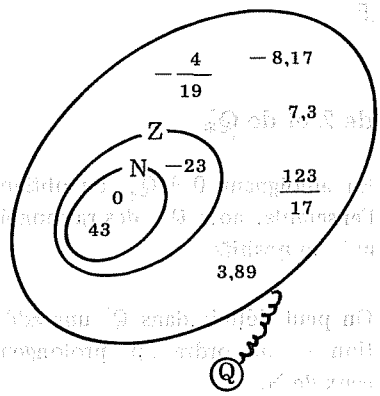
On démontre que dans l'un et l'autre cas, on construit un même ensemble, dit "ensemble des rationnels" et noté Q.

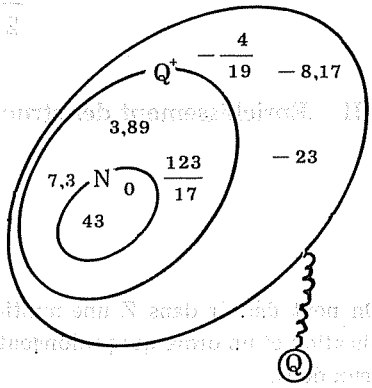


Dans le dessin ci-dessus, chaque flèche indique le type d'équation que la construction permet de doter d'une solution unique (exception: les équations du type: $0 \times x = 9$).

Remarques

1) D'autres constructions de Z, Q^+ et Q sont possibles.
2) En résumé (voir NOMBRE) :





NOMBRE DECIMAL — NOMBRE A VIRGULE

I. Qu'appelle-t-on rationnel décimal ?
II. Rôle du système de numération
III. Conclusion

La locution "nombre décimal" est ambiguë pour deux raisons:

— le mot "nombre" (voir NOMBRE) lui-même est ambigu

— "*dix*", dont est dérivé "décimal", apparaît:

a) comme un naturel au même titre que *trois*, *vingt* ou tout autre naturel

b) comme base du système de numération usuel, ce qui le privilégie par rapport aux autres naturels.

Afin de préciser ces deux aspects, nous allons tout d'abord mettre en évidence une propriété de certains rationnels (voir RATIONNELS) positifs ou nul. Nous les désignerons par les écritures fractionnaires habituelles et nous utiliserons largement le fait qu'un même rationnel peut être désigné par plusieurs écritures fractionnaires.

Par exemple:

$$\{ (4 ; 6), (2 ; 3), (8 ; 12), (200 ; 300), \ldots \}$$

peut être désigné indifféremment par

$$\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{8}{12} \quad , \quad \frac{240}{360} \quad , \quad \text{etc} \ \ldots$$

Nous examinerons ensuite le rôle du système de numération (voir NUMERATION).

I. Qu'appelle-t-on "RATIONNEL DECIMAL" ?

I .1. *Voici quelques rationnels:*

r_1 = {(14 ; 20), (35 ; 50), (49 ; 70), (7 ; 10), ... }

r_2 = {(6 ; 8), (42 ; 56), (540 ; 720), ... }

r_3 = {(4 ; 3), (8 ; 6), (12 ; 9), (20 ; 15), ... }

r_4 = {(8 ; 28), (6 ; 21), (2 ; 7), (10 ; 35), ... }

r_5 = {(10 ; 2), (20 ; 4), (30 ; 6), ... }

r_6 = {(1 ; 100), (10 ; 1 000), (100 ; 10 000), ... }

Certains d'entre eux ont parmi leurs éléments des couples (voir COUPLE) dont le second composant est une puissance de *dix* :

pour r_1 : (7 ; 10), (70 ; 100), (700 ; 1 000), etc...

pour r_2 : (750 ; 1 000), etc...

pour r_5 : (50 ; 10), etc...

pour r_6 : (1 ; 100), etc...

On démontre que ni r_3 , ni r_4 ne possèdent de couple dont le second composant soit une puissance de *dix*.

I .2. *Définition*

" α est un rationnel décimal"

signifie

"L'un au moins des couples de naturels, éléments du rationnel α, a pour second composant une puissance de *dix*"

On dit que "α est un décimal".

On sait que tout naturel est un rationnel; la définition précédente entraîne que tout naturel est un décimal.

Par exemple:
Le naturel *sept* est le rationnel

{ (7 ; 1), (14 ; 2), ... } ,

qui a pour élément le couple (700 ; 100).

r_5 est le naturel *cinq* .

I .3. *Généralisation*

Dans ce qui précède, nous aurions pu choisir un naturel autre que *dix*. Par exemple, choisissons *trois* ; dire: "α est un rationnel ternaire", c'est dire : " L'un au moins des couples de naturels éléments de α a pour second composant une puissance de *trois*".

Exemples:

r_3 est ternaire car (4 ; 3) est élément de ce rationnel.

r_5 est ternaire car (15 ; 3) est élément de ce rationnel.

Contre-exemples:

r_1 n'est pas ternaire car aucun couple de ce rationnel n'a pour second composant une puissance de *trois*.

Il en va de même pour r_2 , pour r_4 et pour r_6 .

Plus généralement, choisissant un naturel k différent de *zéro* et de *un*, on peut envisager les rationnels α tels que l'un au moins des couples de naturels éléments de α ait pour second composant une puissance de k. Pour pouvoir en parler dans cette rubrique, nous les appellerons "rationnels k-aires".

Remarque: Quel que soit k, tout naturel est un rationnel k-aire.

II. Rôle du système de numération

Rappelons qu'en numération décimale, 3 457 est une écriture abrégée de

$$(3 \times 1\,000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + 7$$

II.1. *Examinons quelques rationnels décimaux positifs*

Le rationnel qui s'écrit $\frac{10}{2}$ peut encore s'écrire

$$\frac{50}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{5 \times 10}{10} \quad \text{ou} \quad 5$$

Le rationnel qui s'écrit $\frac{1}{4}$ peut encore s'écrire

$$\frac{25}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{(2 \times 10) + 5}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{2 \times 10}{100} + \frac{5}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

Le rationnel qui s'écrit $\frac{3}{25}$ peut encore s'écrire

$$\frac{12}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{(1 \times 10) + 2}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{1 \times 10}{100} + \frac{2}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10} + \frac{2}{100}$$

Le rationnel qui s'écrit $\frac{213}{5}$ peut encore s'écrire

$$\frac{426}{10} \quad \text{ou} \quad (4 \times 10) + 2 + \frac{6}{10} \quad \text{ou} \quad 42 + \frac{6}{10}$$

Le rationnel qui s'écrit $\frac{3\,457}{100}$ peut encore s'écrire

$$(3 \times 10) + 4 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} \quad \text{ou} \quad 34 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$$

Tout décimal positif apparaît donc comme la somme d'un naturel (éventuellement nul, par exemple pour $\frac{1}{4}$) et d'un décimal positif plus petit que 1 (éventuellement nul, par exemple pour $\frac{10}{2}$).

Pour passer de

$$(3 \times 10) + 4 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} \quad \text{à} \quad 34 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$$

nous abrégeons la *partie entière*. Il est tentant de poursuivre l'abréviation à condition qu'un nouveau signe permette de distinguer la partie entière, 34 , de ce qui va abréger $\frac{5}{10} + \frac{7}{100}$. En France, ce signe typographique est traditionnellement une virgule (alors que dans les pays anglo-saxons, c'est un point).

Le tableau ci-dessous met en évidence le procédé.

Ecriture fractionnaire	Autre écriture	...	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	...	Ecriture à virgule (voir II.2.)
$\frac{10}{2}$	5				5					5
$\frac{3\,457}{100}$	$34 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$			3	4	5	7			34,57
$\frac{351}{50}$	$7 + \frac{2}{100}$				7		2			7,02
$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$					7				0,7
$\frac{3}{1\,000}$	$\frac{3}{1\,000}$							3		0,003

Ainsi,

$$\frac{591}{25} \quad \text{et} \quad \frac{2\,364}{100} \quad \text{et} \quad (2 \times 10) + 3 + \frac{6}{10} + \frac{4}{100} \quad \text{et} \quad 23{,}64$$

sont des écritures d'un même nombre.

De même 70,005 désigne le même nombre que

$$(7 \times 10) + \frac{5}{1\,000} \quad \text{ou que} \quad \frac{70\,005}{1\,000} \quad \text{ou que} \quad \frac{14\,001}{200}$$

II.2. *Remarques*

a) Noter qu'à la première ligne du tableau ci-dessus, "5" est une écriture dite "à virgule", ... sans virgule. On pourrait la rendre "virgulaire" en écrivant "5,0" par exemple.

b) L'égalité

$$\frac{2\,364}{100} = \frac{236\,400}{10\,000}$$

permet de dire que 23,64 et 23,6400 sont deux écritures à virgule différentes du même rationnel décimal.

De même l'égalité

$$\frac{50}{10} = \frac{5\,000}{1\,000}$$

permet de dire que 5,0 et 5,000 sont des écritures à virgule différentes du même décimal, le naturel *cinq*.

c) On rencontre parfois des écritures à virgule dites "illimitées"; par exemple:

$$0{,}333 \quad \ldots\ldots \qquad \text{pour } \frac{1}{3}$$

$$3{,}14159 \ldots\ldots \qquad \text{pour } \pi$$

Dans toute cette rubrique, l'emploi de la locution "écriture à virgule" exclut systématiquement de pareils cas.

d) Dans b), on a utilisé correctement les locutions "écriture à virgule" et "rationnel décimal". Or un rationnel est un nombre et dans la pratique on ne distingue pas toujours avec suffisamment de soin un nombre de son écriture. Comme de plus on constate que tout décimal a, en base *dix*, une écriture à virgule, on conçoit que le langage courant confonde "rationnel décimal" et "écriture à virgule" sous la locution ambiguë de "nombre décimal".

c) A propos des rationnels négatifs on peut, par des considérations analogues à celles qui précèdent, être amené à introduire des "écritures à virgule", ce qui conduit par abus de langage à "nombres à virgule négatifs".

Exemple: $-5{,}23$

II.3. *Cas des rationnels non décimaux*

$$\frac{8}{6}\ ,\quad 1+\frac{1}{3}\ ,\quad 1+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}\ ,\quad 1+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{300}$$

désignent le même rationnel non décimal. On démontre qu'un rationnel non décimal ne peut être écrit sous la forme d'une somme de rationnels décimaux; par conséquent, il est exclu de

pouvoir noter en base *dix* un rationnel non décimal à l'aide d'une écriture à virgule.

Par contre, le rationnel ternaire r_3 peut être noté en base *trois* par

$$\frac{22}{20} \quad \text{ou} \quad \frac{11}{10} \quad \text{ou} \quad 1 + \frac{1}{10} \quad \text{ou} \quad 1{,}1$$

De même, le rationnel noté en base *dix* $\frac{10}{18}$ s'écrit en base *trois*

$$\frac{101}{200} \quad \text{ou} \quad \frac{12}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \quad \text{ou} \quad 0{,}12$$

Là encore des habitudes de langage, jointes au fait que tout rationnel k-aire a une écriture à virgule en base k, ont confondu "nombre k-aire" et "écriture à virgule" sous la locution ambiguë de "nombre à virgule".

III. Conclusion

Parler de "rationnel décimal", de "rationnel ternaire" et plus généralement de "rationnel k-aire", c'est donner une propriété du rationnel envisagé, indépendante du système de numération utilisé.

Cette propriété peut être visualisée par un choix convenable de la base du système de numération (*dix*, *trois*, k); on obtient alors une "écriture à virgule". La locution "nombre à virgule en base k", malgré son ambiguïté, a l'avantage de donner, à la fois, une propriété du nombre et un procédé d'écriture mettant cette propriété en évidence.

FRACTION

I. Langage courant
II. Langage mathématique
III. Ce qu'est une fraction
IV. Exemples
V. Ce que n'est pas une fraction
VI. Les abus de langage
VII. Emplois marginaux des fractions

I. Langage courant

"Il réagit en une fraction de seconde."
"Seule une fraction de la population part en vacances l'été."
"Un quart d'heure est une fraction d'heure qui équivaut à quinze minutes."
"A moi seul, j'ai mangé une énorme portion de tarte: les quatre cinquièmes ! Comme cette tarte coûte dix-sept francs, je dois payer les quatre cinquièmes de dix-sept francs."

Les idées évoquées semblent être celles de "portion d'un tout", de "partage", parfois de "rupture"; de nombre ou de mesure plus petits que 1 ; ...

II. Langage mathématique

Il se doit d'être beaucoup plus précis. Comment répondre aux questions suivantes, à propos du mot "fraction":

Désigne-t-il des nombres ? Si oui, quelle sorte de nombres ?
Désigne-t-il des opérateurs ? Si oui, quelle sorte d'opérateurs ?
Désigne-t-il des couples de nombres ? Si oui, lesquels ?

$\frac{0,6}{0,4}$ est-il une fraction ? et $\frac{\pi}{2}$? et $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$? et $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$?

Que penser des égalités suivantes:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{3}{2} = \frac{0,6}{0,4} \quad ?$$

Cette rubrique essaie de répondre à ces questions.

Le lecteur est invité à se reporter à ENTIERS et RATIONNELS; NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE; ENSEMBLES DE NOMBRES.

III. Ce qu'est une fraction

1. Tout rationnel peut être représenté, d'une infinité de façons, par une **notation fractionnaire.**

Par exemple, le quotient dans **Q** de 140 par 60 peut se noter indifféremment

$$\frac{140}{60} \quad \text{ou} \quad \frac{14}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{35}{15} \quad \ldots.$$

De même, le naturel que la langue française nomme "quatre" peut se représenter par l'écriture non fractionnaire 4 et aussi par l'une des écritures fractionnaires

$$\frac{20}{5}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{24}{6}, \quad \ldots$$

D'où les égalités suivantes:

$$\frac{140}{60} = \frac{7}{3} \qquad \frac{14}{6} = \frac{35}{15} \qquad \frac{20}{5} = 4$$

$$4 = \frac{24}{6} \qquad \frac{4}{1} = 4 \qquad \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Sont de même des écritures différentes d'un même rationnel:

$$\frac{12}{10} \qquad \frac{1\,200}{1\,000} \qquad \frac{6}{5} \qquad \frac{42}{35} \qquad \frac{4{,}2}{3{,}5} \qquad \frac{2{,}4}{2}$$

(écritures fractionnaires)

1,2 1,200 (écritures décimales)

12 : 10 6 : 5 3,7 − 2,5 6 × 0,2 etc...

2. Mais la notation fractionnaire n'est pas réservée aux rationnels.

Par exemple: $\frac{\pi}{2}$ est une notation fractionnaire d'un réel non rationnel.

De même pour $\frac{-\sqrt{3}}{44}$

$\frac{3y - 1}{y^2 + 1}$ est une écriture fractionnaire d'un quotient de polynomes en y.

etc...

3. En définitive, une *fraction* est un dessin, une écriture, une représentation, un symbole, ... qui sert à représenter certains êtres mathématiques.

Elle comporte:

- un trait parallèle aux lignes d'écriture, dit "trait de fraction"; c'est un signe typographique, au même titre que les chiffres, les parenthèses, le signe + , etc...
- au-dessus de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "numérateur" de la fraction
- au-dessous de ce trait, une écriture (d'un être mathématique) appelée "dénominateur" de la fraction.

IV. Exemples

1. Si le numérateur est l'écriture d'un naturel et si le dénominateur est l'écriture d'un naturel non nul, la fraction est *l'une* des *écritures* d'un *rationnel positif*.

2. Une telle fraction précédée du signe " — " désigne un rationnel négatif; exemple: $-\frac{37}{48}$ (ce rationnel se note aussi $\frac{-37}{48}$ ou $\frac{37}{-48}$).

3. $\left(\times \frac{4}{5}\right)$ est une notation (parmi d'autres) d'un *opérateur* (voir OPERATEUR). Cette notation fait intervenir, entre autres, une fraction, mais n'est pas une fraction.

Une autre notation possible de ce même opérateur est:

4 pour 5

De même

25 pour 100 ; $\left(\times\frac{25}{100}\right)$; $(:4)$; $\left(\times \frac{1}{4}\right)$; $(\times 0{,}25)$; 25%

sont six notations différentes d'un même opérateur.

(On rappelle qu'un opérateur n'est pas un nombre).

V. Ce que n'est pas une fraction

Les mots *rationnel*, *nombre*, *opérateur*, *ensemble*, désignent des êtres mathématiques. Au contraire, le mot *fraction* ne désigne pas un être mathématique :

1. Une fraction *n'est pas* un nombre.

2. Une fraction *n'est pas* non plus un opérateur.

3. Une fraction *n'est pas* un couple de naturels. Pour la notion mathématique de "couple de naturels", on dispose d'un mot et

d'une notation (exemple: (13,25) ou (13 ; 25)) parfaitement adaptés aux besoins. Pourquoi aurait-on inventé un synonyme ?

4. Il n'y a guère place, parmi les notions mathématiques actuellement utiles (à l'école élémentaire et même ailleurs), pour une notion, "intermédiaire" entre le couple de naturels et le rationnel, qu'on appellerait "fraction". Pas plus qu'entre le couple de naturels et l'entier dans la construction de **Z** .

VI. Les abus de langage

Le langage mathématique usuel comporte beaucoup d'abus de langage qui sont tolérables et même bien utiles dans certains cas; il serait pénible de s'en priver. L'essentiel est de savoir qu'il s'agit d'un abus et de pouvoir, en cas de besoin, revenir à un langage plus rigoureux.

Exemples:

1. On dit couramment, et sans inconvénient la plupart du temps, "le naturel 27" au lieu de "le naturel représenté, dans le système de numération de position à base DIX et à chiffres arabes, par 27".

2. De même, "le rationnel $\frac{2}{3}$" au lieu de "le rationnel dont une écriture fractionnaire est $\frac{2}{3}$".

3. "Pour additionner deux fractions, on les réduit d'abord au même dénominateur", au lieu de "Pour additionner deux rationnels représentés sous forme fractionnaire, on remplace d'abord chacune des deux représentations par une autre telle que les deux nouvelles fractions aient le même dénominateur".

4. "La somme des chiffres d'un naturel" au lieu de "Le naturel somme des naturels représentés par chacun des chiffres figurant dans le codage du naturel considéré".

5. Les écritures "$\frac{2}{3}$" et "$\frac{4}{6}$" sont visiblement différentes, mais elles représentent le même rationnel; donc

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

En disant:"Les rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égaux", on commet un abus de langage gênant car on masque ainsi le fait que c'est *le même* rationnel qui est représenté aussi bien par $\frac{4}{6}$ que par $\frac{2}{3}$.

En disant:"Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égales", on commet un autre abus de langage, qu'on essaie parfois d'éviter en parlant de "fractions équivalentes"; de plus, on voudrait ainsi rappeler que "les couples de naturels (4 ; 6) et (2 ; 3) sont équivalents pour la relation $\mathcal{R}$ " (voir ENTIERS et RATIONNELS); cette dernière phrase est, elle, parfaitement claire.

Au lieu de "fractions égales" et de "fractions équivalentes", on pourrait suggérer "fractions synonymes".

6. "Fraction irréductible" peut se définir par "Fraction dont le numérateur et le dénominateur désignent deux naturels sans diviseur commun autre que 1"; il n'y a là aucun abus de langage.

Par contre, "rationnel irréductible" est une absurdité; on veut dire "rationnel représenté par une fraction irréductible".

7. Il existe une différence profonde entre un "rationnel décimal" (voir NOMBRE DECIMAL) et une "fraction décimale" (on entend par là une fraction dont le dénominateur est une puissance de *dix*).

Exemple: Le rationnel quotient de 7 par 20 peut se noter $\frac{7}{20}$, et aussi $\frac{35}{100}$; "$\frac{35}{100}$" est une "fraction décimale" qui montre claire-

ment que le rationnel en question est un décimal (il se note encore 0,35). Mais sa représentation "$\frac{7}{20}$" n'est pas une fraction décimale, puisque son dénominateur n'est pas une puissance de *dix*.

VII. Autres emplois d'écritures fractionnaires

1. L'examinateur qui note les trois questions d'un problème respectivement sur 9, 4 et 7, utilise souvent des fractions: $\frac{6}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$. Il les additionne selon une règle qui n'a rien à voir avec l'addition dans **Q** :

$$\frac{6}{9} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{9}{20}$$

2. Les examinateurs d'élite évaluent une dissertation au quart de point près. Mais quand ils écrivent $8\frac{1}{4}$, il ne s'agit pas du tout du produit des nombres 8 et $\frac{1}{4}$.

3. Que dire des "formules dentaires" des naturalistes ? ?

ENSEMBLES DE NOMBRES

I. Les ensembles de nombres
II. Remarques
III. Structures
IV. Propriétés communes des additions, multiplications et ordres dans les différents ensembles de nombres.
V. Propriétés des équations.

I. Les ensembles de nombres

Le mot **nombre** désigne traditionnellement des êtres mathématiques avec lesquels on fait des calculs. Mais,en analysant la nature de ces calculs, les mathématiciens ont été amenés à définir plusieurs ensembles de nombres et à les distinguer par des qualificatifs qui ont varié avec le temps. A présent la tendance du mathématicien est de limiter l'emploi du mot "nombre", dont le sens est trop vague, en substantivant les adjectifs qui l'accompagnaient: on dit "un naturel", "un entier", "un décimal", "un rationnel", "un réel" (de même qu'on dit "un Français" et non "un homme français").

Cependant, à l'école élémentaire, l'expression **nombre naturel** (ou même **nombre** tout court tant qu'on n'a pas introduit les nombres à virgule) est bien préférable à "cardinal", si l'on ne veut pas utiliser "naturel" tout court avec les jeunes enfants.

En utilisant la terminologie actuelle, cette rubrique a pour objet de replacer les uns par rapport aux autres:

- L'ensemble, N, des (nombres) **naturels**, longtemps appelés "entiers": 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... [NATUREL] . On note N_* l'ensemble des naturels non nuls.

- L'ensemble, **Z**, des (nombres) **entiers**, longtemps appelés "entiers relatifs" (positifs ou négatifs): ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... [ENTIERS]. **N** est une partie de **Z** .

- L'ensemble , **Q** , des (nombres) **rationnels**, longtemps appelés "nombres fractionnaires" (positifs ou négatifs) [RATIONNEL] , par exemple: $-\frac{5}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, etc... On note $\mathbf{Q}^+$ l'ensemble des rationnels positifs (0 inclus) et $\mathbf{Q}^+_*$ l'ensemble des rationnels strictement positifs (0 exclu). **Z** est une partie de **Q**, et **N** est une partie de $\mathbf{Q}^+$.

- L'ensemble , **D**, des (nombres) **décimaux**: ce sont des rationnels particuliers, à savoir ceux qui, en base *dix*, peuvent être représentés par une "écriture à virgule", par exemple: 2,57 ; $-$ 0,0043 (ou encore par une écriture fractionnaire dont le dénominateur est une puissance de 10; mêmes exemples: $\frac{257}{100}$; $-\frac{43}{10\,000}$). Bien remarquer que si le dénominateur est 1 (autrement dit 10^0), le décimal en question est un entier et la virgule est inutile; exemples:

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{4}{10^0} \quad ; \quad -7 = \frac{-7}{1} = \frac{-7}{10^0}$$

Il en résulte que les entiers sont des décimaux particuliers. On note $\mathbf{D}^+$ l'ensemble des décimaux positifs (0 inclus) et $\mathbf{D}^+_*$ l'ensemble des décimaux strictement positifs (0 exclu).

$$\mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{N} \subset \mathbf{D}^+ \subset \mathbf{Q}^+$$

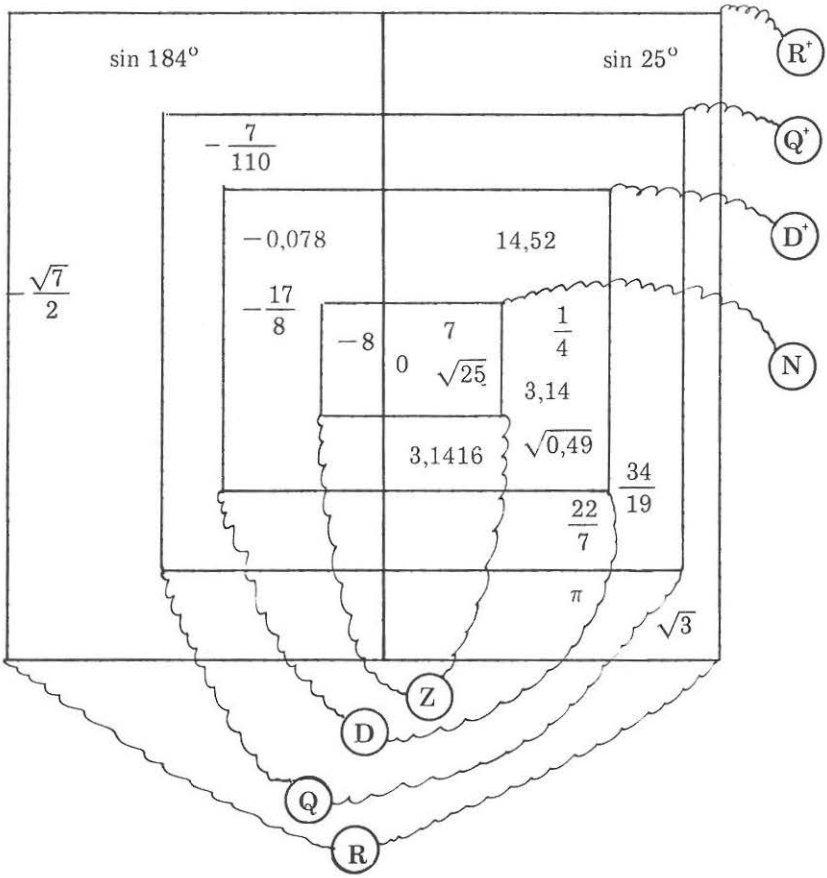
- L'ensemble, **R**, des (nombres) **réels**, qui contient les rationnels et par conséquent tous les nombres précédents, mais aussi d'autres nombres qualifiés d'**irrationnels**, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{15}$, π , $1-\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5}-2}$, sin 25°, ... On note $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs (0 inclus) et $\mathbf{R}^+_*$ l'ensemble des réels strictement positifs (0 exclu).

Ces ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres, si bien que les différents qualificatifs apportent une plus ou moins grande précision. Par exemple, un rationnel peut être un décimal ou non (de même qu'un Européen peut être un Français ou non), et un naturel est, ipso facto, entier, décimal, rationnel et réel (de même qu'un Provençal est occitan, français et européen). C'est donc une complication très souvent inutile que de dire "entier naturel" au lieu de "naturel", etc...

Finalement:

$$N \subset Z \subset D \subset Q \subset R \qquad \text{et} \qquad N \subset D^+ \subset Q^+ \subset R^+$$

ce que traduit le schéma ci-après:



II. Remarques

II.1. Dans la langue courante, le mot **nombre** désigne le plus souvent un naturel; par exemple: "le nombre des convives"; élémentairement, "le nombre des éléments d'un ensemble" remplace avantageusement la locution plus savante de "cardinal de l'ensemble", si l'ensemble est fini. En arithmétique, la nature d'un "nombre premier" n'est pas équivoque; mais, avec "nombre pair", il vaut déjà mieux préciser "naturel pair" ou "entier pair" si le contexte ne l'indique pas clairement.

II.2. Une autre acception, également traditionnelle, de **nombre** peut être source d'une grande confusion, le mot désignant *non plus un élément* des ensembles numériques ci-dessus, mais *une notation de cet élément*. C'est pourquoi le substantif **décimal** est de loin préférable à "nombre décimal" qui peut désigner la notation décimale, en opposition à "nombre binaire", "nombre "octal", ... et aussi à "notation fractionnaire": ainsi $(0,5)_{\text{DIX}}$ est un "nombre décimal" alors que $(0,4)_{\text{HUIT}}$ est un "nombre octal" et que $\frac{1}{2}$ est une "fraction"; or il s'agit du *même* élément de **D**.

II.3. En dépit de ce que le "bon sens" pourrait laisser croire, les ensembles **N**, **Z**, **D**, **Q**, $\mathbf{D}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{N}_*$, $\mathbf{D}_*^+$, $\mathbf{Q}_*^+$ ont tous *même* cardinal [NATUREL], c'est-à-dire qu'il est possible d'établir une bijection [BIJECTION] de l'un quelconque d'entre eux sur n'importe quel autre. Ces divers ensembles sont *dénombrables*.

En revanche, si **R**, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}_*^+$ ont bien même cardinal, ce cardinal est *supérieur* au précédent: l'ensemble des réels est "infiniment plus riche" que l'ensemble des rationnels.

II.4. Ne pas employer **chiffre** à la place de **nombre**.

III. Structures

Chacun des ensembles **N, Z, D, Q, R** est muni de deux opérations fondamentales: addition et multiplication, et d'une relation d'ordre.

Comme ces différentes structures se prolongent d'un ensemble à un ensemble qui le contient, on a pris l'habitude de les noter de la même façon dans tous les ensembles, en utilisant $+$, $\times$ pour les deux opérations, $\leqslant$ pour la relation d'ordre ($\geqslant$ pour la relation d'ordre réciproque).

Pour expliciter le sens de la phrase précédente, nous allons momentanément introduire des notations distinctes; à savoir:

$+_N$	,	$\times_N$	et	$\leqslant_N$	dans	**N**
$+_Z$	,	$\times_Z$	et	$\leqslant_Z$	dans	**Z**
$+_D$	,	$\times_D$	et	$\leqslant_D$	dans	**D**
$+_Q$	,	$\times_Q$	et	$\leqslant_Q$	dans	**Q**
$+_R$	,	$\times_R$	et	$\leqslant_R$	dans	**R**

$+_N$ est une loi de composition dans **N**, c'est-à-dire qu'à tout couple de naturels on sait faire correspondre un naturel appelé *somme* des deux premeirs; exemple: au couple (2 ; 3) on fait correspondre 5, noté aussi : $2 +_N 3$.

(De même:

		$\times_N$	est une loi de composition dans **N**
$+_Z$	et	$\times_Z$	sont des lois de composition dans **Z**
$+_D$	et	$\times_D$	sont des lois de composition dans **D**
$+_Q$	et	$\times_Q$	sont des lois de composition dans **Q**
$+_R$	et	$\times_R$	sont des lois de composition dans **R**).

Si maintenant nous considérons 2 et 3 comme des éléments de **Z**, leur somme dans **Z** peut se noter:

$$2 +_Z 3 \quad ;$$

cette écriture désigne encore 5, de même que

$$2 +_D 3 \quad ; \quad 2 +_Q 3 \quad \text{ou} \quad 2 +_R 3 \ .$$

Plus généralement, si a et b sont deux naturels quelconques, on a:

$$a +_N b = a +_Z b = a +_D b = a +_Q b = a +_R b$$

On exprime cela en disant que l'addition dans **Z** prolonge l'addition dans **N** ou que l'addition dans **N** est la restriction à **N** de l'addition dans **Z**. De même l'addition dans **N** est la restriction à **N** de l'addition dans **D**, de l'addition dans **Q** et de l'addition dans **R**; l'addition dans **Z** est la restriction à **Z** de l'addition dans **D**, de l'addition dans **Q** et de l'addition dans **R**; l'addition dans **D** est la restriction à **D** de l'addition dans **Q** et de l'addition dans **R**; l'addition dans **Q** est la restriction à **Q** de l'addition dans **R**.

Toutes les phrases précédentes restent vraies si on remplace partout "addition" par "multiplication".

Remarque

Ce qui précède est bien connu et semble aller de soi, mais c'est en réalité un fait très remarquable qui justifie l'emploi d'une notation unique. Il n'en serait pas forcément ainsi pour toute opération définie sur ces ensembles.

Contre-exemple: Essayons de définir une opération de la manière suivante: à tout couple (a, b) on associe le plus petit nombre x qui vérifie

$$2x \geqslant a + b$$

Si nous sommes dans **N**, au couple (2 ; 3) on associe 3; ce qu'on peut noter :

$$2 \circ_N 3 = 3$$

Si nous sommes dans **D** , au couple (2 ; 3) on associe 2,5; ce qu'on peut noter :

$$2 \circ_D 3 = 2{,}5$$

Ces deux nombres sont différents.

Il ne serait donc pas légitime dans ce cas de noter $\circ$ indifféremment l'opération dans **N** et l'opération dans **D**.

Pour l'ordre, la situation est la même que pour l'addition et la multiplication; l'ordre dans **N** est la restriction à **N** de l'ordre dans **Z**, de l'ordre dans **D**, de l'ordre dans **Q**, de l'ordre dans **R** ; l'ordre dans **Z** est la restriction à **Z** de l'ordre dans **D** , ... etc ...

IV. Propriétés communes des additions, multiplications et ordres dans les différents ensembles de nombres

Nous reprenons maintenant:

la notation unique $+$ pour les différentes additions
la notation unique $\times$ pour les différentes multiplications
la notation unique $\leqslant$ pour les différents ordres.

Cet abus de notations permet en fait une économie de pensée qui est encore renforcée par ce qui suit.

Additions. Les additions dans **N, Z, D, Q** et **R** ont les propriétés communes suivantes:

. associativité: a, b et c étant quelconques,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

. commutativité: a et b étant quelconques,

$$a + b = b + a$$

. élément neutre 0 : a étant quelconque,

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Multiplications. Les multiplications dans **N, Z, D, Q, R** ont les

propriétés communes suivantes:

. associativité: a, b et c étant quelconques,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

. commutativité: a et b étant quelconques,

$$a \times b = b \times a$$

. élément neutre 1 : a étant quelconque,

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

Lien entre les additions et les multiplications

. distributivité de la multiplication sur l'addition: a, b et c étant quelconques,

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

Lien entre les additions et les ordres

a, b, et c étant quelconques,

si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$

Lien entre les multiplications et les ordres

a et b étant quelconques et c positif,

si $a \leqslant b$ alors $a \times c \leqslant b \times c$

V. Propriétés des équations

Nous allons étudier, dans les différents ensembles de nombres, les possibilités de solutions de certaines équations:

équations de type (1) : $a + \ldots = b$

équations de type (2) : $c \times \ldots = d$

• N Certaines équations de type (1) ont une solution unique.
Par exemple, l'équation

$$t + 7 = 12$$

a pour seule solution 5.

D'autres n'ont pas de solution; exemple: $y + 6 = 2$

Certaines équations de type (2) ont une solution unique.

Par exemple, l'équation

$$5 \times u = 45$$

a pour seule solution 9 .

D'autres n'ont pas de solution; exemple: $5 \times v = 42$

- **Z** Toute équation de type (1) a une solution unique.

  Par exemple, l'équation

  $$y + 6 = 2$$

  a pour seule solution -4 .

  Certaines équations de type (2) ont une solution unique.

  Par exemple, l'équation

  $$2 \times x = -18$$

  a pour seule solution -9 .

  D'autres n'ont pas de solution; exemple: $x \times (-2) = 7$

- **D** Toute équation de type (1) a une solution unique.

  Par exemple, l'équation

  $$z + 0{,}034 = -1{,}6$$

  a pour seule solution $-1{,}634$.

  Certaines équations de type (2) ont une solution unique.

  Par exemple, l'équation

  $$5 \times v = 42$$

  a pour seule solution 8,4 .

  D'autres n'ont pas de solution; exemple: $3 \times t = 1$

- **Q** et **R** Toute équation de type (1) a une solution unique.

  Par exemple, l'équation dans **Q**

  $$\frac{22}{7} + x = \frac{355}{113}$$

  a pour seule solution $\frac{355}{113} - \frac{22}{7}$

  L'équation dans **R**

  $$\frac{22}{7} + y = \pi.$$

a pour seule solution $\pi - \frac{22}{7}$

Toute équation de type (2) pour laquelle c est différent de 0 a une solution unique.
Par exemple, l'équation dans **Q**

$$\frac{1}{3} \times t = \frac{2}{9}$$

a pour seule solution $\frac{2}{3}$ et

l 'équation dans **R**

$$\sqrt{2} \times t = \sqrt{18}$$

a pour seule solution 3 .

Remarque 1 .
Quel que soit l'ensemble considéré, l'équation

$$0 \times \ldots = d$$

n'a pas de solution, sauf si d est nul. L'équation

$$0 \times \ldots = 0$$

a pour ensemble de solutions l'ensemble considéré.

Remarque 2 .
On peut classer les cinq ensembles de la façon suivante:

N a une structure de *monoïde* aussi bien pour l'addition que pour la multiplication.

Z et **D** ont chacun une structure de *groupe* pour l'addition, et une structure de *monoïde* pour la multiplication.
De plus, la distributivité de la multiplication sur l'addition confère à chacun d'eux une structure d'*anneau*.

Q et **R** ont chacun une structure de *groupe* pour l'addition;

$\mathbf{Q}_*$ et $\mathbf{R}_*$ ont chacun une structure de *groupe* pour la multiplication.

De plus, la distributivité de la multiplication sur l'addition confère à chacun des deux ensembles **Q** et **R** une structure de *corps*.

(Pour les sens de MONOIDE, GROUPE, ANNEAU, CORPS: voir "La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent").

En résumé:

	monoïde	groupe	anneau	corps
N	(N, +) (N, X)			
Z	(Z, +) (Z, X)	(Z, +)	(Z, +, X)	
D	(D, +) (D, X)	(D, +)	(D, +, X)	
Q	(Q, +) (Q, X)	(Q, +) (Q_*, X)	(Q, +, X)	(Q, +, X)
R	(R, +) (R, X)	(R, +) (R_*, X)	(R, +, X)	(R, +, X)

INDEX TERMINOLOGIQUE

Abréviations des rubriques:

EG : EGALITE
RB : RELATION BINAIRE
EX : EXEMPLE , CONTRE–EXEMPLE
NN : NOMBRE NATUREL
CO : COUPLE
FR : FRACTION
ND : NOMBRE DECIMAL, NOMBRE A VIRGULE
ER : ENTIERS et RATIONNELS
EN : ENSEMBLES DE NOMBRES

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Les mots en majuscules sont ceux qui feront l'objet d'une rubrique dans une brochure ultérieure.

abus de langage FR
addition EN – ER
additionner FR
adjoindre ER
anneau EN
antécédent RB*
arrivée (ensemble d') RB*
associativité EN* – ER – EX
autant que NN*
base de numération EG – ND – FR – EN
BIJECTION NN – EN
binaire EN
binaire (relation) RB*
bouclé (élément) RB*
but RB*
cardinal NN* – EX – EN
carré EG

cartésien (produit) RB*
cartésien (schéma) RB*
chiffre, chiffrer CO — NN — FR — EN
classe d'équivalence ER
classer NN
cm EG
codage FR
collection EG — NN
colonne RB
commutativité EN* — EX — ER
COMPARAISON NN
composants (d'un n-uplet) CO* — ND
composé ER
compris entre EX
CONGRUENCE EG
construction ER
contenant ER
contexte EG — EN
contre-exemple EX* — EG
coordonnées (d'un n-uplet) CO*
corps EN
correspondance un à un NN*
correspondance terme à terme NN*
côté EG*
couple CO* — EG — ND — FR — EN — RB — ER
décimal ND* — EN* — EG — FR — ER
définition EG — EX — NN — ND — RB
démonstration EX
démonstration de type exhaustif EX*
démonstration de type déductif EX*
démontrer ER
dénombrable EN*
dénominateur FR* — EN
départ (ensemble de) RB*
désignation, désigner EG — ER
déterminé (nombre) EG
déterminer RB*
différence ER
différent EG — EN

distributivité EN*
diviseur RB
DIVISION EG — ER
dm EG
double NN — RB
droite EG
écriture EG — NN — ND — FR — EN — ER
écriture à virgule EN — ND
égal, égaler EG* — NN — FR
égalité EG* — CO — ND — FR — ER
élément EG — EX — CO — NN — ND — EN — RB
énoncé EX
ensemble EG — EX — CO — NN — EN — RB — ER
ensemble de solutions EN*
entier EN* — ER* — FR
entière (partie) ND
entraîne ND
équation EG — FR — ER
EQUIVALENCE (relation d') EG — FR
équivalent EG — FR — ER
étiquette EG
étranger ER
être mathématique EX — FR — EN — ER
exemple EX* — EN — EG — CO — NN — ER
existe (il existe au moins un ...) EX
existentiel (énoncé) EX*

faux EG — EX — RB — ER
fini (ensemble) NN* — EX — EN
fléché (schéma) RB*
fraction FR* — EN — ER
fractionnaire FR* — EN* — ND — ER
généralisation ND
graphe RB*
graphique (représentation) RB
groupe EN
identifier, identification ER
identité EG
illimitée (écriture) ND*

illustration EX
image RB*
impair EX
inclus EN
inconnu EG
inégalité EX
inférieur NN*
infini (ensemble) NN*
infinité EX — ER
intersection CO
inverse ER*
irrationnel EN*
irréductible FR* — ER
justifier EX*
k-aire ND*
langage mathématique FR
lecture EG — NN
lien verbal RB*
ligne RB
loi de composition EN* — ER
longueur EG
mesurage EG
mesure, mesurer EG
moins que NN*
moitié RB
monoïde EN
multiple EX — RB
multiplication EN — ER
naturel NN* — EN* — EG — EX — CO — FR — RB — ER
négatif ND — FR — EN — ER*
neutre (élément) EN* — ER
nom EG
nombre EN* — EG — CO — NN — ND — FR — ER
notation FR — EN — RB — ER
notion EX
nul ND — EN — ER
numérateur FR*
NUMERATION (système de numération) EG — ND — FR — NN
numérique (relation) RB*

n-uplet CO*
objet EG
octal EN
OPERATEUR FR
OPERATION EX — EN — ER
opposé ER*
ordre CO
ORDRE (relation d') EN — ER
pair NN — EN
paire CO*
parenthèses FR
partie NN — EN — RB
partie entière ND
phrase (mathématique) EG — EX — FR — RB
plus grand que, plus petit que NN*
plus que NN*
polynome FR
positif ND — FR — EN — ER*
précédent NN*
prédécesseur NN*
premier (naturel) EX — EN
premiers entre eux ER
produit FR — ER
produit cartésien RB *
prolonger EN* — ER*
propriété EG — EX — NN — ND — EN — ER
puissance NN — ND — FR — EN
quadruplet CO*
quel que soit EG* — ND
quotient FR — ER
rationnel EN* — ER* — EG — ND
réciproque (relation) RB* — EN
réciproquement CO
réduction, réduire (au même dénominateur) FR — ER
réel EN*
référence (ensemble de) EX*
réflexivité EG*
relatif EN*
relation RB*
relation (d'ordre, d'équivalence) EN — ER

relation dans un ensemble RB*
repérage CO
représenter, représentation EG — FR — RB
résolution ER
restriction EN*
sagittal (schéma) RB*
schéma EG
schéma cartésien RB*
schéma sagittal RB*
schéma fléché RB*
segment (de droite) EG
si ... alors EX
signe EG — FR — ND
signe opératoire ER
situation EG — EX — RB — ER
solution EN — ER*
somme EN — FR — ER
source RB*
sous-ensemble RB — ER
soustraction ER
strictement (positif, ...) EN* — ER*
structure EN — ER
successeur NN*
suite NN
suivant NN*
supérieur NN*
supérieur (cardinal) EN
symbole EG — FR
symétrie EG*
symétrique (relation) RB
symétrisé ER*
synonyme, synonymie EG — FR — ER
termes (d'un n-uplet) CO* — RB
ternaire ND*
test EX
traduction EG
trait de fraction FR*
transitivité EG*
triplet CO*

un NN* — EN
unité EG
universel (énoncé) EX
valeur EX
vérifié EX
vide (ensemble) NN* — CO — RB
virgule, nombre à virgule ND* — EN
vrai, vérité EG — EX — RB — ER
zéro NN* — EN — ER

Directeur de la publication : Maurice GLAYMANN *Imprimerie VAUDREY - LYON*

ASSOCIATION DES
PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

29, rue d'Ulm - 75005 Paris
Secrétariat : 37, rue Jacob - 75006 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Elle regroupe près de 13.000 enseignants concernés par les mathématiques ("de la Maternelle à l'Université").

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, "**de la Maternelle à l'Université**", mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen,* en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte,* ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc...)

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leur activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les I.R.E.M. sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : B.E.P.C., E.N., Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

---

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

Liste des sections régionales et départementales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. qui organise diverses activités pédagogiques et qui s'organise elle-même librement. En particulier, il existe des sections départementales qui se constituent à l'intérieur de la Régionale à laquelle elles sont rattachées.

Les lecteurs du Bulletin sont invités à prendre contact avec les animateurs de ces sections régionales ou départementales, voire locales. A la dispersion géographique de ses adhérents qui correspond à leurs fonctions, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement. Elle propose à chacun et de conserver l'autonomie de son action et de sa réflexion, conditions indispensables d'un enseignement libéral, d'une éducation libératrice, et de coopérer au travail collectif sans lequel aucun ouvrage n'est plus possible à l'échelle de nos sociétés. Elle repondrait donc volontiers à son compte la devise des coopérateurs : "tous pour un, un pour tous" pour le seul profit, ici, de l'enseignement mathématique et de la formation de la jeunesse.

Liste des sections régionales ou départementales.

Pour chaque section, nous donnons l'adresse d'un animateur à qui les Collègues s'adresseront pour avoir des informations supplémentaires sur l'activité de sa section. Entre crochets [ ], nous donnons les numéros des départements qui sont du ressort de la régionale. Entre doubles parenthèses (( )) le numéro de chèque postal quand il y a lieu (sauf avis contraire, l'intitulé du compte est "Régionale A.P.M.E.P. de ...").

AIX-MARSEILLE [04, 05, 13, 84]
Pierre NOE, 49 rue Daumier, 13008-Marseille ((Marseille 28-94-82)).

AMIENS [02, 60, 80]
Jean CAPRON, Résidence La Hotoie-Tivoli, bât. C, esc. 3, appt n° 53, 80000-Amiens. Tél. (22) 92.16.79 ((Lille 862-04)).
Janine PROTIN, Résidence de l'Abbaye, A 36, rue du Dr. Calmette, 60200-Compiègne.

BESANCON [25, 39, 70, 90]
Martial THIRIOT, I.U.T., 30 avenue de l'Observatoire, 25000-Besançon ((Dijon 2505-45 V)).
Section du Jura : Mlle COULON, 12 rue de la Colette, 39000-Lons-le-Saulnier.
Section de Belfort : J. DAUTREVAUX, 41 rue du Château Essert, 90000-Belfort.

BORDEAUX [24, 33, 40, 47, 64] ((Bordeaux 3902-91))
Viviane LECLERCQ, 18 rue Levieux, 33000-Bordeaux.
Section de la Dordogne : Mlle MARCHIVIE, 12 rue des Vaures, 24100-Bergerac.
Section de la Gironde : PIQUEMAL, 9 avenue Jean Moulin, 33610-Gazinet.
Section des Landes : TEULE, Villa Itsala Haut-Mauco, 40000-Mont-de-Marsan.
Section du Lot-et-Garonne : Jean-Marie BOUSCASSE, 4 rue Baudin, 47000-Agen. Tél. (58) 66.92.32.
Section des Pyrénées Atlantiques : Bernard CAPELIER, 15 boulevard Passicot, 64500-St-Jean-de-Luz.

BREST [29]
Georges LE QUELLE, route de Plomeur, 29120-Pont Labbé ((Renne 25-5927)).

CAEN [14, 50, 61]
Jacky COCHEPIN, rue de la Chesse, 14290-Mathieu ((Rou n 1084-56 M)).

CLERMONT-FERRAND [03, 15, 43, 63] ((Clermont 1569-75))
André HENNETON, Sauvagnat Ste Marthe, 63500-Issoire.

DIJON [21, 58, 71, 89]
C. RENAUT, 38 bd de l'Université, 21-Dijon ((Dijon 1751-05 V)).
Section de l'Yonne : D. REISZ, 11 rue du Saule, Vincelles, 89230-Champs/s/Yonne.
Section de la Saône-et-Loire : MICHELOT, 25 Rempart Saint-Vincent, 71100-Chalon-sur-Saône.
Section de la Nièvre : PUISSEGUR, 2 place de la Résistance, 58000-Nevers.
Section de Mâcon : Danielle DOMINIQUE, Chevagny-les-Chevrières, 71960-Pierreclos.

GRENOBLE [07, 26, 38, 73, 74]
N. BALACHEFF, Université de Grenoble, Tour IRMA, B.P. 53, 38041-Grenoble Cedex ((34349 U Grenoble)).
Section de Chambéry : COMPAIN, Lycée Technique, 1 avenue du Colombier, 73000-Chambéry.
Section de Vienne : CHARNAY, Establin, 38780-Pont-Evêque.
Section d'Annecy : VIDIANI, B.P. 316, 74000-Annecy.

GUADELOUPE
Michel LOSSENT, Dubedou, 97118-Saint-François. C.C.P. Basse-Terre n° 874 Y.

LILLE [59, 62]
MERCIER, B 30 Résidence Lefebvre d'Orval, 59500-Douai ((Lille 4242-55)).

LIMOGES [19, 23, 87]
A.P.M.E.P., UER des Sciences, 123 rue Albert Thomas, 87100-Limoges ((Limoges 117-66 P)).
Section de la Creuse : Mme MEIGNAL, 41 rue Alfred Géraud, 23000-Guéret.
Section de la Corrèze : M. BOUTEILLER, 7 bis avenue Roosevelt, 19100-Brive.

LYON [01, 42, 69]
Bernard ARNAUD, 401 avenue du 8 Mai 1945, 69300-Caluire ((Lyon 7081-18)).
Section de Saint-Etienne : M. BOUTEILLE, Résidence de l'Hippodrome, Bât. D4, 42390-Villars.
Section de Bourg : R. CHARNAY, E.N., 40 rue du Gal Delestreint, 01000-Bourg-en-Bresse.

MARTINIQUE
Mme LAMOTTE, 1 km 700 route de Schoelcher, voie n° 6, 97200-Fort-de-France.

MONTPELLIER [11, 30, 34, 48, 66]
Section du Gard : J. CHABRIER, 10 rue de Loye, 30000-Nîmes. Tél. 84.26.12.
Section de l'Aude : Mlle CABANEL, Lycée Lacroix, 11100-Narbonne.

NANCY [51, 55, 57, 88]
MIRGAUX, 76 rue G. Mouilleron, 54-Nancy ((Nancy 1391-51 S)).
Section de la Moselle : E. SAUVADET, 17 rue du Fort, Longeville-les-Metz, 57000-Metz.
Section des Vosges : J. MERLAN, 9 rue de la Franche Pierre, 88200-Remiremont.

NANTES [44, 49, 53, 72, 85] ((Nantes 3118-23))
Mme PEYROT, 41 Les Hauts de l'Erdre, 44240-La Chapelle/Erdre.
Section de la Sarthe : KLAEYLE, 2 impasse Fizeau, 72100-Le Mans.

NICE [06, 20, 83] ((Marseille 5758-43))
Monique LEENHARDT, 36D avenue Primerose, 06000-Nice.
Section du Var : M.J. PAPAZIAN, La Colle d'Artaux, 83500-La Seyne.

ORLEANS-TOURS [18, 28, 36, 37, 41, 45]
Robert DOMAIN, 14 allée Branly, 36000-Châteauroux ((La Source 1440-09 X)).
Section de Tours : Monique GODICHEAU, Appt. 235, 14 rue Léonard de Vinci, 37170-Chambray-les-Tours.
Section de Montargis : KISTER, 152 Résidence du Gué-aux-Biches, 45120-Chalette.

PARIS [75, 77, 78, 91, 92, 93, 94, 95]
Francis DUPUIS, 16 avenue de La Motte Picquet, 75007-Paris. Tél. 705.81.59.
Section de la Seine-Saint-Denis : M. LOI, 68 rue des Ecoles, Bât. A 318, 93300-Aubervilliers.
((Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Paris 25 108 63)).
Bulletin de la Régionale : Gilbert GRIBONVAL, 129 avenue du Général Leclerc, 91120-Palaiseau.

POITIERS [16, 17, 79, 86]
D. PORTE, 10 rue des Grands Chênes, Saint-Benoît, 86000-Poitiers ((Bordeaux 38-52-59)).
Section des Deux Sèvres : FROMENTIN, 17 rue de la Rousille, 79000-Niort.
Section de la Charente : MARRON, CES La Grande Garenne, rue Pierre Aumaître, 16000-Angoulême.
Section de la Charente-Maritime : M. BLANCHARD, Lycée de Rochefort, 17300-Rochefort.
Section de la Vienne : J.-L. SIRIEIX, Lycée technique Louis Armand, 63 rue de la Bugellerie, 86022-Poitiers.

REIMS [08, 10, 51, 52]
M. PILLET, 4 avenue de l'Europe, 51100-Reims ((Châlons-sur-Marne 1262-80 L)).
Section des Ardennes : MARECHAL, 15 Porte de Bourgogne, 08000-Charleville Mézières. Tél. (24) 57.27.32.
Section de l'Aube : HAUBRY, 36 rue des Cyclamens, 10150-Pont-Sainte-Marie.
Section de la Haute-Marne : Mlle GODON, 8 rue de Lorraine, 52000-Chaumont.
Section de la Marne : SCHACHERER, 26 rue du Moulin à Vent, 51200-Epernay.

RENNES [22, 35, 56]
LEVEILLEY, 29 avenue des Vignes, Châtillon-sur-Seiche, 35230-St-Erblon ((Rennes 1707-29)).

ROUEN [27, 76] ((1250-13 D Rouen))
Albert SAVALLE, 16 avenue de l'Hippodrome, 76310-Sainte-Adresse.

STRASBOURG [67, 68] ((Strasbourg 1538-47 K))
Guy MEHL, 8 rue de Franck, 67000-Strasbourg.
Section du Haut-Rhin : LEVASSORT, 27 rue George Sand, 68-Mulhouse-Dornach.
Section de l'Allemagne Fédérale : Lucien AUGE, S.P. 69487.

TOULOUSE [09, 12, 31, 32, 46, 65, 81, 82]
Line MAILHOS, Université Paul Sabatier, 31077-Toulouse Cedex ((Toulouse 2035-51)).
Section de l'Ariège : Mme GALY, 30 avenue V. Pilhes, 09400-Tarascon-sur-Ariège.
Section de l'Aveyron : SCHIOPETTO, CES La Penderie, 12000-Rodez.
Section du Gers : Mlle BORIES, 29 rue de Metz, 32000-Auch.
Section des Hautes-Pyrénées : TARBOULIER, 36 rue M. Lamarque, 65000-Tarbes.
Section du Tarn-et-Garonne : Solange SOR, CES Bourdelle, boulevard Herriot, 82000-Montauban.
Section du Tarn : Christine MANDIRAC, Lycée de Carmaux, 81400-Carmaux.

Pour les nouveaux adhérents et les adhérents ayant changé de résidence :

COUPON DE MISE A JOUR DU FICHIER REGIONAL

A détacher et à envoyer d'urgence à votre Régionale (adresse-ci-dessus)

Nom : . . . . . .

Prénom : . . . . . .

Adresse personnelle : . . . . . .

Etablissement : . . . . . .

Fonction : . . . . . .

☐ Nouvel adhérent

☐ Ancien adhérent muté dans la circonscription de la Régionale de . . . . . .

Mettre une X dans la case convenable.