# POUR UNE MATHÉMATIQUE VIVANTE EN SECONDE

(Nouvelle édition mise à jour en 1984)

**Publication de l'A.P.M.E.P.**

( Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public )
N° 27

ISSN 02915709

# Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe près de 11 000 enseignants concernés par les mathématiques (''de la Maternelle à l'Université'').

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, ''de la Maternelle à l'Université'', mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen *, en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte *, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un supplément d'actualité (4 N$^{os}$ par an). Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3$^{e}$, CAP et BEP, Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

* et dans le Texte d'Orientation 1978.

# POUR
# UNE MATHÉMATIQUE
# VIVANTE EN SECONDE

(Nouvelle édition mise à jour en 1984)

**Publication de l'A.P.M.E.P.**

( Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public )
N° 27

Pour tout renseignement concernant

**l'A.P.M.E.P.**
**(Association des Professeurs de Mathématiques**
**de l'Enseignement Public)**

Inscription (cotisation, abonnement)

Publications (Bulletin de l'A.P.M.E.P., brochures,
en particulier les collections **ELEM-MATH** et **MOTS**)

Fonctionnement (Régionales, Commissions, ...)

s'adresser au :

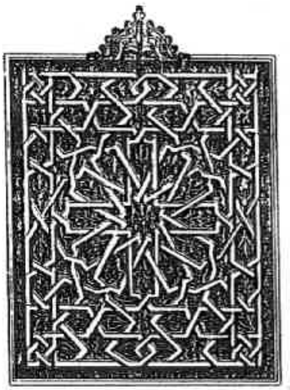
Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
13, rue du Jura
75013 PARIS
Tél. (1) 331.34.05

SOMMAIRE

*Une façon attrayante d'aborder*
*la géométrie à partir de dessins*
*et de*
*textes historiques dans :*

# ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

*de la 6e à la terminale*



**IREM de STRASBOURG**

novembre 1984

# PREFACE DE LA PREMIERE EDITION

La classe de Seconde a la particularité d'être la classe d'accueil du Second Cycle, répartie en différentes sections dont le mode de recrutement est essentiellement fondé sur l'échec en mathématiques dans le Premier Cycle. Ce mode de recrutement et la diversité d'origine des élèves arrivant en classe de Seconde posent — sans parler du "programme" — un certain nombre de problèmes plus aigus (peut-être ?) dans les sections autres que C et $T_1$. C'est au sein de l'IREM de Strasbourg que quelques professeurs de Seconde, réunis dans un groupe "Enseignement mathématique dans les classes "non-scientifiques"", ont mis en chantier en 1975-76 un travail qui devait aboutir à cette publication.

Avant de travailler ensemble, ces professeurs s'étaient mis d'accord sur :

A. **Les objectifs de l'enseignement mathématique dans une classe de Seconde.** (Cf. Bulletin APMEP n° 300 "Noyaux-Thèmes", p. 471-472)

1° *Maîtrise de techniques mathématiques fondamentales.*

Il s'agit d'outils de base dont l'emploi est suffisamment courant en mathématiques et dans les autres sciences (à ce niveau) pour que la maîtrise en soit indispensable ; faute de quoi, la pensée est dérangée voire arrêtée par des aspects secondaires et "l'arbre cache la forêt".

On pourrait y voir :

a) Opérations dans les différents ensembles de nombres **N, Z, D, Q, R.** Calcul algébrique ; calcul vectoriel (géométrique et analytique), usages de tables numériques, dessin géométrique, tracé et lecture de graphiques, notation indicielle et fonctionnelle.

b) Règles de raisonnement déductif.

2° *Structuration de certaines connaissances mathématiques pour forger quelques concepts intéressants en tant qu'outils de pensée.*

Il s'agit de montrer, dans des domaines limités, l'intérêt d'une abstraction : des situations d'apparences très diverses ont en commun une certaine structure mathématique dont la compréhension fournit un véritable outil de pensée. Il s'agit de montrer pourquoi et comment. Il en va ainsi des notions suivantes : équivalence, ordre, groupe, espace vectoriel, linéarité, graphe, variations d'une fonction, suites numériques.

3° *Capacité d'organiser une démonstration, d'inventer des contre-exemples, de déceler des contradictions dans un raisonnement, de corriger des erreurs.*

4° *Entraînement à la mathématisation d'une situation et à la résolution des problèmes.*

C'est ici que s'exerce l'activité la plus riche de l'élève car il s'agit pour lui de prendre des initiatives, de choisir une stratégie et d'utiliser au mieux ses connaissances. L'emploi simultané des langages différents est important : ce sont, par exemple, l'aller et retour permanent entre le dessin géométrique et le calcul vectoriel, entre le calcul algébrique et la représentation graphique qui permettent d'avancer dans la recherche de certains problèmes. C'est ici aussi que l'utilisation de thèmes trouvera sa justification profonde.

Ceci dit, il était convenu que ces objectifs seraient visés à travers des activités "recouvrant le programme" de la classe de Seconde.

**B. La méthode d'enseignement.**

L'acquisition des connaissances n'était pas l'objectif unique. Il n'était pas question de mettre au point la meilleure façon de "faire le cours", de "faire passer" telle ou telle "notion de programme", d'échanger des "trucs pédagogiques" ; il ne s'agissait pas non plus de fabriquer un recueil d'exercices et de problèmes pouvant "illustrer un cours".

Pour atteindre les objectifs qu'ils s'étaient fixés, les membres du groupe de travail décidèrent de changer assez radicalement leur méthode d'enseignement et ils en ont pris le risque dans au moins l'une des classes de Seconde où ils enseignaient : ce sont les activités mathématiques élaborées ensemble qui, proposées à leurs élèves, ont servi de base à leurs enseignements. L'armature n'en fut plus leurs cours — agrémentés d'exercices et d'applications, selon le temps disponible — ; l'armature en fut le travail des élèves sur les documents mis au point entre collègues, à charge pour chacun dans sa classe d'exploiter, de prolonger, de faire les mises au point, les synthèses, de donner les éléments de "cours" dont ils avaient convenu ou qu'ils jugèrent opportuns dans la classe où ils enseignèrent. Ainsi, ils s'inspirèrent des opinions de G. Polya relevées dans son livre "La découverte des mathématiques" :

"Trois principes pour enseigner :

.....1) l'apprentissage actif : ... laissez les étudiants découvrir seuls le plus de choses possible.

2) La meilleure motivation : le professeur devrait se considérer comme un marchand : il désire vendre des mathématiques à de jeunes gens... le professeur devrait accorder toute son attention au choix, à la formulation et à la présentation convenable du problème qu'il donne...

3) Les phases consécutives :
- phase exploratoire
- solution formelle
- phase d'assimilation."

*
* *

Ce travail et l'enseignement des professeurs qui l'ont entrepris n'ont été soumis à aucune évaluation scientifique. Mais l'expérience qu'ils ont ainsi vécue ensemble et avec leurs élèves leur a paru suffisamment probante à beaucoup de points de vue pour devoir la communiquer à leurs collègues :

- meilleure connaissance des élèves : ces activités ont mis en relief leurs attitudes, leur savoir-faire, et leurs acquis mathématiques antérieurs ;
- intérêt au travail et attitude active de la plupart des élèves : ce sont eux qui posent et se posent des questions ;
- diversité des situations — travail sur documents, synthèse, compléments, éléments de cours, etc... — donc de pédagogie.

*
* *

Les documents présentés ici sont issus de ce travail : leur rédaction tient compte des critiques que leur emploi dans les classes a suscitées et s'est enrichie des idées de collègues venus renouveler l'équipe initiale. Ce sont des documents qui ont été et sont utilisés dans leurs classes par les professeurs qui les présentent. Répétons qu'ils :

— ne constituent pas "un cours" (même par fiches) ;
— ne sont pas conçus comme exercices d'illustration ou d'application d'un cours ;
— ne rendent pas compte de toute l'activité mathématique déployée par les élèves et leur professeur dans leurs utilisations (leur rédaction n'échappe pas à une certaine "sécheresse")
— ne sont nullement exhaustifs :
  - les auteurs ne prétendent nullement avoir fait un inventaire des possibilités et souhaitent que le Bulletin de l'APMEP permette à de nombreux collègues de faire part de leurs idées en ce domaine ;
  - les auteurs se sont abstenus de rédiger des documents sur des thèmes qui ont fait l'objet d'articles ou de chapitres de livres publiés récemment même s'ils les ont par ailleurs largement exploités dans leurs classes :
    par exemple, la programmation linéaire pour laquelle on mentionnera simplement une bibliographie,

    l'introduction au second degré pour laquelle on pourra consulter "Matériaux pour une classe de Seconde A", par René Gauthier, dans le Bulletin APMEP n° 314 de juin 1978.

Les documents présentés ici sont donc simplement des outils de travail utilisés comme tels dans plusieurs classes de Seconde durant plusieurs années, proposés aux collègues, à charge pour eux de les *exploiter* comme ils l'entendent : c'est dire que leur travail reste entier !

*
*　*

Jean-Pierre VILLAIN, Pierre RENFER, Bernard LANGER, Bernard KOCH, Claudine KAHN et Michel DE COINTET ont réalisé l'élaboration et la rédaction définitives de ces documents.

*
*　*

# PREFACE DE LA SECONDE EDITION

L'organisation et les programmes de la classe de Seconde ont changé : les problèmes que l'enseignement mathématique rencontrait dans les sections « non-scientifiques » sont maintenant le lot de tous. Ils se sont même accrus en raison de l'hétérogéinité des divisions, de la réduction des horaires, et de l'obligation d'enseigner un même programme à des élèves au passé et à l'avenir si différents.

Aussi, l'esprit dans lequel ont été élaborés et utilisés les documents de la première édition nous semble, plus que jamais, d'actualité. Pour cela, nous en proposons une nouvelle édition, allégée de certains chapitres, complétée par d'autres, adaptée au programme actuel : ainsi avons-nous supprimé le « Second Degré » et les chapitres d'introduction à l'algèbre linéaire, refondu et étoffé « Soyons logiques », remplacé « Racine carrée » par « Travaux d'approche », et introduit plusieurs chapitres de géométrie ; enfin, nous consacrons un dernier chapitre à des tests d'analyse ; la programmation linéaire est suffisamment « répandue » dans les manuels scolaires pour ne plus nécessiter de bibliographie.

Nous tenons à remercier les quelque cinquante professeurs de l'Académie de Strasbourg qui ont accepté de faire travailler leurs élèves sur plusieurs de ces nouveaux chapitres et ces tests, et de nous faire part de leurs observations et critiques.

Le groupe lycée de
l'IREM de STRASBOURG

# I - LA COPIE DE "DOMINIQUE"

La présentation de cette fiche est stimulante pour l'élève. Elle le place dans la situation de correcteur et lui permet de développer son sens critique.

Il sera amené à dénoncer les erreurs les plus courantes dans les manipulations d'inégalités et dans les résolutions d'inéquations.

La question 5 soulève "le problème de l'exemple" : la vérification d'une propriété sur des valeurs numériques ne constitue pas une démonstration.

Pour aborder cette fiche, les connaissances de la classe de troisième sont suffisantes ; elle occasionne une révision approfondie des principales propriétés des inégalités.

Lors de l'expérimentation, nous avons constaté que des élèves, plutôt que de refaire la démonstration de Dominique pas à pas, écrivent leur solution sur la partie droite de la feuille : ils se contentent de comparer les résultats et ne voient pas les erreurs qui se compensent : relire de manière critique une solution proposée par autrui constitue un très bon exercice de réflexion.

Le type de présentation peut être adapté à d'autres thèmes : il permet de varier la forme des énoncés.

*

*   *

Voici le devoir de Dominique. Corrigez-le et attribuez-lui une note en tenant compte du barème. La correction figurera sur la partie droite de la feuille.

① *Enoncé* : Résoudre l'inéquation suivante :   Sur 1 point

$$-(3x+4) < -(5x+7)$$

*Solution* :

$$-(3x+4) < -(5x+7)$$

$$(3x+4) < (5x+7)$$

$$-2x < 3$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

(2) *Enoncé* : Résoudre l'inéquation suivante : Sur 1 point

$$x^2 - 3x + 5 < x^2$$

*Solution* : $x^2 - 3x + 5 < x^2$

$-3x < -5$

$x > -\frac{5}{3}$

(3) *Enoncé* : On donne les encadrements suivants :

Sur 3 points

$1 \leqslant a \leqslant 1{,}5$
$2 \leqslant b \leqslant 3$

Encadrer $a - b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$.

Application numérique : $a = 1{,}2$ ; $b = 2{,}4$.

*Réponse* :

$-1 \leqslant a - b \leqslant 1{,}5$

$2 \leqslant a \times b \leqslant 4{,}5$

$0{,}5 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 0{,}5$

*Application numérique* :

$a - b = 1{,}2 - 2{,}4 = -1{,}2$

et $-1 \leqslant -1{,}2 \leqslant 1{,}5$

$a \cdot b = 1{,}2 \times 2{,}4 = 2{,}88$

et $2 \leqslant 2{,}88 \leqslant 4{,}5$

$\frac{a}{b} = \frac{1{,}2}{2{,}4} = 0{,}5$

(4) *Enoncé* : Résoudre l'inéquation suivante où $a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$ Sur 3 points

*Solution* :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 2$$

$$a^2 + b^2 > 2\,ab$$

$$a^2 - ab > ab - b^2$$

$$a(a-b) > b(a-b)$$

$$a > b$$

5 *Enoncé* : Soit $x$ et $y$ deux réels strictement positifs. On définit les réels $a$, $g$, $h$ de la façon suivante :

Sur 3 points

$$2a = x + y$$

$$g^2 = xy \text{ et } g > 0$$

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Comparer $a$, $g$, $h$.

*Solution* : Je prends deux valeurs quelconques de $x$ et de $y$. Par exemple : $x = 3, y = 3$.

Alors $a = \dfrac{3+3}{2} = 3$

$$g = \sqrt{9} = |3| = 3$$

$$h = \frac{2 \times 3 \times 3}{3+3} = \frac{18}{6} = \frac{9}{3} = 3 \text{ d'où } \boxed{a = g = h}$$

6 *Enoncé* : Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x-2}{2x+5} < 1$ Sur 4 points

*Solution* : Le domaine de définition de cette inéquation est $D = \mathbf{R} - \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$. Dans D cette inéquation est équivalente à :

$$x - 2 < 2x + 5$$

soit :

$$x > -7$$

7 *Enoncé* : Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 2 000 F/jour, les frais de papier s'élèvent à 6 F par livre. Combien faut-il imprimer de livres

par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 15 F ? Sur 5 points

*Solution :*

$$\frac{2000}{x} + 6 \leqslant 15$$

$$\frac{2000}{x} \leqslant 9$$

$$x \geqslant \frac{2000}{9}$$

**Il faut fabriquer au minimum 222 livres par jour.**

# II - PERLES ET FAUSSES PERLES

Que de fois rencontre-t-on chez le débutant des égalités comme :

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2 \quad !$$

Cette fiche permet de convaincre d'abord le débutant que la belle simplicité de la linéarité n'est pas universelle.

L'exemple de la fiche montre aussi qu'une application f non additive peut vérifier f (a + b) = f (a) + (b) pour certains éléments a et b particuliers (mais non pour tous !). C'est l'occasion de préciser la notion de général, de particulier, d'exemple, de contre-exemple.

La présentation amusante de la question sous forme de petit scénario donne à l'élève l'occasion de s'identifier au professeur et d'aiguiser son esprit critique.

*

* *

*Version historique* (13 juillet 1901)

Le professeur écrit au tableau l'égalité suivante :

$$1 + 5 + 8 + 12 = 2 + 3 + 10 + 11 \qquad \text{(I)}$$

Il interroge Toto, le cancre de la classe, assis au fond, près du radiateur : “l'égalité est-elle exacte, Toto ?”.

Après de très pénibles opérations mentales, Toto finit par répondre oui.

Puis le professeur lui demande si :

$$1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 11^2 \qquad \text{(II)}$$

Sans la moindre hésitation, Toto acquiesce.

Le professeur s'emporte, réprimande Toto et lui donne une punition.

Mais Toto obtient pour une fois l'aide du premier rang, où Geogeo, prix d'excellence de la classe, constate en effectuant les carrés que l'égalité (II) est vraie.

Après un instant de stupéfaction, le bon vieux professeur se ressaisit et décide de maintenir tout de même la punition de Toto en se justifiant.
Pouvez-vous reconstituer les justifications du professeur ?
Aurait-on eu le même scénario en remplaçant les carrés par les cubes dans (II) ?
Et en remplaçant les carrés par les puissances quatrièmes ?
Et en remplaçant 5 et 8 par 4 et 9 dans les deux égalités ?

*Version mathématique* : (en dehors du temps)

$a_1, \ldots, a_n$
$a'_1, \ldots, a'_n$
sont des nombres réels

1) Montrer que si

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

alors pour tout nombre réel $x$, on a aussi :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (a'_1 + x) + (a'_2 + x) + \cdots + (a'_n + x)$$

$$= a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n + (a_1 + x) + (a_2 + x) + \cdots + (a_n + x)$$

et

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2 + (a'_1 + x)^2 + (a'_2 + x)^2 + \cdots + (a'_n + x)^2$$

$$= a'_1{}^2 + a'_2{}^2 + \cdots + a'_n{}^2 + (a_1 + x)^2 + (a_2 + x)^2 + \cdots + (a_n + x)^2$$

2) Montrer que si

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

et

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2 = a'_1{}^2 + a'_2{}^2 + \cdots + a'_n{}^2$$

alors pour tout nombre réel $x$, on a aussi

$$a_1{}^3 + a_2{}^3 + \cdots + a_n{}^3 + (a'_1 + x)^3 + (a'_2 + x)^3 + \cdots + (a'_n + x)^3$$

$$= a'_1{}^3 + a'_2{}^3 + \cdots + a'_n{}^3 + (a_1 + x)^3 + (a_2 + x)^3 + \cdots + (a_n + x)^3$$

3) Retrouver les résultats du scénario en utilisant la question 1) à partir de $1 + 9 = 4 + 6$ et $x = 1$ puis en utilisant la question 2) à partir de $1 + 9 + 5 + 7 = 4 + 6 + 2 + 10$ et $x = 2$.

# III - AUTOUR D'UNE FORMULE

Dans les classes, où les énoncés du type :
"$a$, $b$ et $c$ étant trois réels positifs, on pose $p = \frac{a+b+c}{2}$. Développer le produit $p(p-a)(p-b)(p-c)$"
déchaînent des torrents d'enthousiasme, les activités telles que celle proposée ici n'ont que peu d'intérêt.

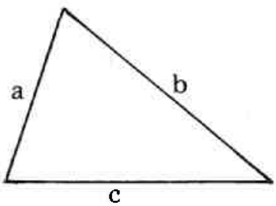
"Autour d'une formule" fournit une occasion de réviser les notions fondamentales de géométrie métriques vues en troisième (et surtout le théorème de Pythagore) et d'apprendre à organiser efficacement un calcul (comment se "débarrasser" d'un radical, d'un dénominateur, quand développer, quand faire intervenir une hypothèse supplémentaire ?). La présentation adoptée (on commence par examiner des cas particuliers très simples) permet à un élève, même très faible, de "décoller" (essentiel pour le moral !).

Dans les classes où elle a été proposée, l'activité a révélé que les élèves ne sont pas entraînés à "démontrer". Très fréquemment ils calculent, développent, raturent, recommencent, sans se rendre compte que le but est de comparer les résultats fournis par deux "formules".

*

*   *

Héron d'Alexandrie,* mathématicien grec (75 à 150 après J.C.) a donné son nom à une formule permettant de calculer la surface d'un triangle connaissant la longueur de chacun de ses trois côtés.




$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

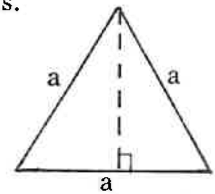
avec : $p = \frac{a+b+c}{2}$

Certains auteurs estiment que cette formule que Héron utilise dans l'un de ses ouvrages concernant les problèmes de mesure était déjà connue d'Archimède (vers 287 à 212 avant J.C.).

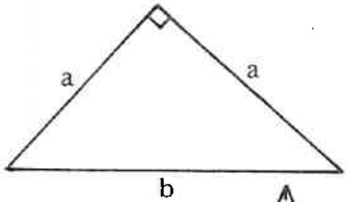
* Voir dessin page 27.

Nous nous proposons de démontrer cette formule, en envisageant d'abord un certain nombre de cas particuliers.

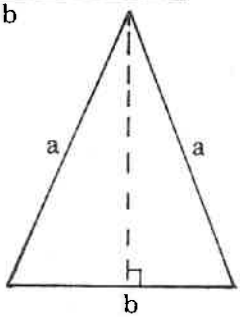
1) Vérifier la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle équilatéral.



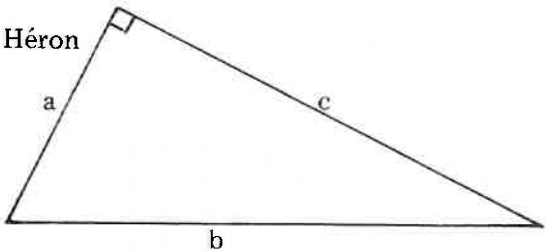

2) Vérifier la formule de Héron dans le cas particulier d'un triangle rectangle isocèle.



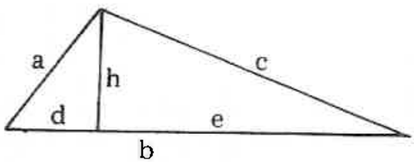

3) Vérifier la formule de Héron pour un triangle isocèle.




4) Vérifier la formule de Héron pour un triangle rectangle.

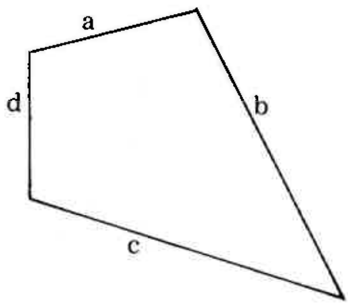



5) Démontrer la formule de Héron pour un triangle quelconque.




*N.B.* — Les exercices 1 à 5 sont de difficulté croissante.
Tous les nombres qui interviennent dans les calculs sont indiqués sur les figures.

En l'an 628 de notre ère, le mathématicien hindou Brahmagupta proposa une formule analogue à la formule de Héron.



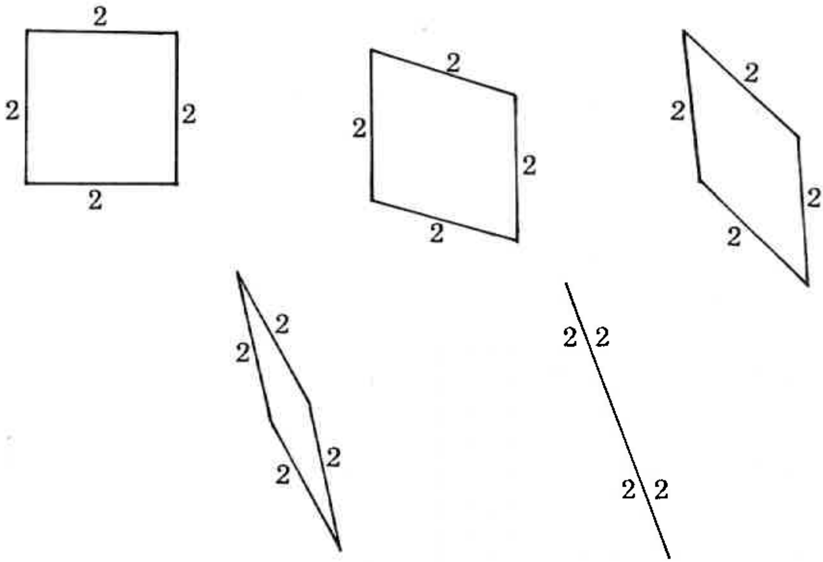

Cette formule devait permettre de calculer la surface d'un quadrilatère convexe connaissant la longueur de ses 4 côtés.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

avec : $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

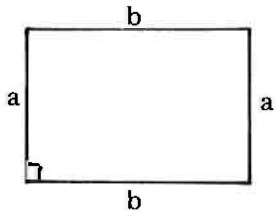
6) Montrer que la formule est exacte pour un carré.

7) A votre avis, cette formule est-elle exacte pour tout quadrilatère convexe ? La suite de dessins ci-dessous vous mettra peut-être la puce à la bosse (des maths).

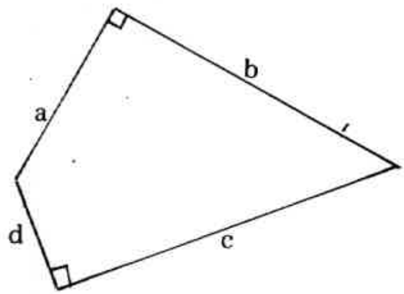



8) Le mathématicien islamique Al Birûni (973 à 1048) releva les faiblesses dans l'argumentation de Brahmagupta et précisa que la formule citée ci-dessus n'était applicable que pour les quadrilatères inscriptibles (ie : les quadrilatères pour lesquels il existe un cercle passant par leurs quatre sommets).

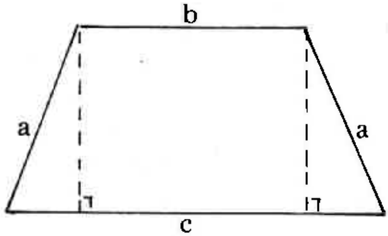
Vérifier l'exactitude de cette formule pour les quadrilatères particuliers suivants :




*rectangle*




*quadrilatère ayant deux angles droits opposés*

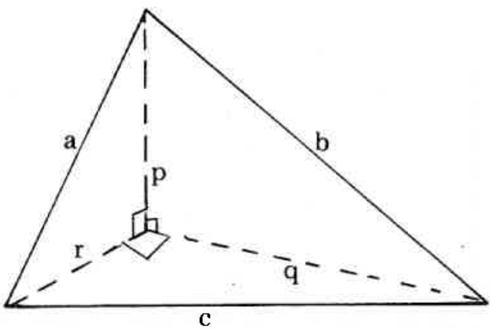



*trapèze isocèle*

On vérifiera également qu'il s'agit bien de quadrilatères inscriptibles.

Tous les éléments intervenant dans les calculs sont indiqués sur les figures.

**ENCORE UNE FORMULE ANALOGUE :**

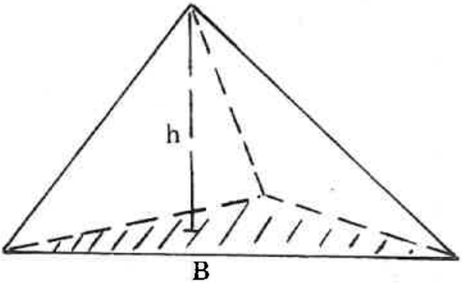



Elle permet de calculer le volume d'un tétraèdre tri-rectangle connaissant la longueur des trois côtés de la face opposée au sommet droit.

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)}$$

avec : $$s^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

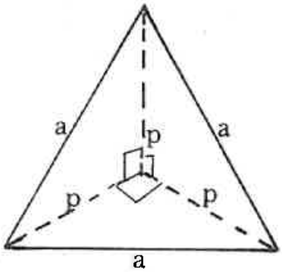
*Remarque* : la formule la plus habituelle permettant de calculer le volume d'un tétraèdre est :




$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

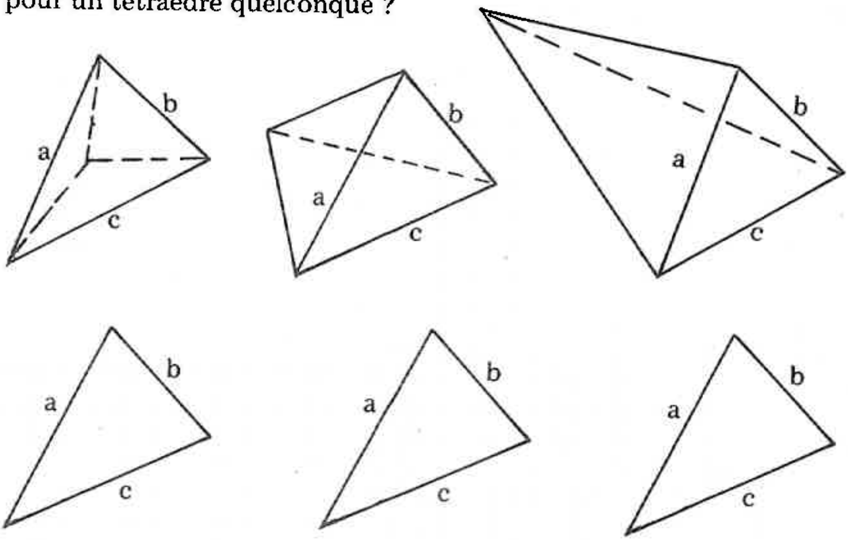
où $B$ est la surface de la base, $h$ la hauteur.

9) Vérifier que les deux formules ci-dessus conduisent au même résultat dans le cas particulier d'un tétraèdre trirectangle isocèle (trois des faces sont alors des triangles rectangles isocèles, la quatrième un triangle équilatéral).




10) Vérifier la concordance des deux formules dans le cas d'un tétraèdre trirectangle.

11) La formule analogue à celle de Héron est-elle applicable pour un tétraèdre quelconque ?



# IV - MOYENNES

L'activité proposée ici a pour but essentiel de faire découvrir aux élèves l'intérêt d'une *abstraction* : des situations d'apparences très diverses ont en commun une certaine structure mathématique dont la compréhension fournit un véritable outil de pensée (Bulletin APMEP, N° 300, p. 471).

Certaines situations "mettent en jeu" une moyenne arithmétique, d'autres une moyenne harmonique, d'autres encore une moyenne géométrique. Les premières relèvent d'une structure linéaire, les dernières d'une structure exponentielle, comme le schématise le paragraphe II de la fiche.

Dans la classe où une première version de cette fiche a été proposée, la résolution des questions posées au paragraphe I a indiscutablement présenté des difficultés ; c'est la schématisation du paragraphe II faite avec le professeur qui a "débloqué la situation", et permis à bon nombre de répondre aux questions du paragraphe I puis à celles du paragraphe IV.

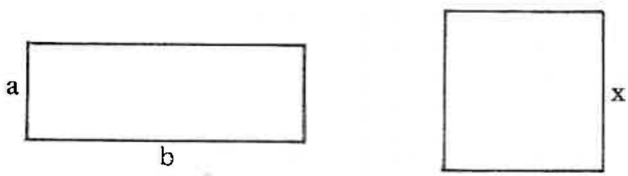
Les paragraphes V et VI sont constitués d'exercices d'algèbre et de géométrie sur le thème des moyennes.

*

*   *

## 0. En guise d'introduction

*Exercice 1.* On donne un rectangle ; on appelle $a$ et $b$ les longueurs de ses côtés. Dans l'exercice, $x$ désigne la longueur du côté d'un carré.



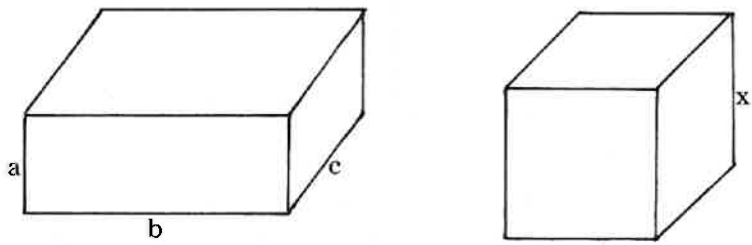

1°) Déterminer $x$ de façon que le carré ait même périmètre que le rectangle.

2°) Déterminer $x$ de façon que le carré ait même aire que le rectangle.

3°) Déterminer $x$ de façon que le rapport de l'aire au périmètre soit le même pour le rectangle et pour le carré.

4°) Déterminer $x$ de façon que le carré ait une diagonale de même longueur qu'une diagonale du rectangle.

*Exercice 2.* On donne un parallélépipède rectangle ; on appelle $a$, $b$, et $c$ les longueurs de ses côtés. Dans l'exercice, $x$ désigne la longueur du côté d'un cube.




a) Répondre en ce qui concerne ce parallélépipède et ce cube à des questions analogues à celles de l'exercice 1, en faisant intervenir périmètre, aire, volume et leurs différents rapports.

b) Noter les résultats qui présentent des analogies avec ceux de l'exercice 1.

## I. Situations diverses conduisant à différentes moyennes.

*1/ Exercice 1 :*

Une voiture parcourt 120 km à la vitesse moyenne de 60 km/h, puis 120 km à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur les 240 km parcourus ?

N.B. On rappelle la formule :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$

*Exercice 1 bis :*

Une voiture parcourt $x$ km à la vitesse moyenne de $v_1$ km/h, puis $x$ km à la vitesse moyenne de $v_2$ km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

*Exercice 1 ter :*

a) Une voiture parcourt $x_1$ km à la vitesse moyenne de $v_1$ km/h puis $x_2$ km à la vitesse moyenne de $v_2$ km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

b) Une voiture parcourt $x_1$ km à la vitesse moyenne de $v_1$ km/h,
$x_2$ km à la vitesse moyenne de $v_2$ km/h,
.
.
.
$x_n$ km à la vitesse moyenne de $v_n$ km/h.

Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

*2/ Exercice 2 :*

Une voiture roule durant une heure et demie à la vitesse moyenne de 60 km/h, puis durant une heure et demie à la vitesse moyenne de 120 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de cette voiture sur le parcours total ?

*Exercice 2 bis :*

De la même façon que l'exercice 1 bis était une généralisation de l'exercice 1, fabriquer un énoncé 2 bis qui soit une généralisation de l'exercice 2 et répondre à la question ainsi posée.

*Exercice 2 ter :*

De la même façon que l'exercice 1 ter était une généralisation de l'exercice 1 bis, fabriquer un énoncé 2 ter qui soit une généralisation de l'exercice 2 bis et répondre aux questions ainsi posées.

*3/ Exercice 3 :*

La production d'acier d'un pays a augmenté de 2,4 % en 1975 et de 8,9 % en 1976. Quel est le pourcentage d'augmentation annuelle moyenne sur l'ensemble de ces deux années ?

*Exercice 3 bis :*

a) La production d'acier d'un pays a augmenté de $x_1$ % en 1975 et de $x_2$ % en 1976. Quel est le pourcentage d'augmentation annuelle moyenne sur l'ensemble de ces deux années ?

b) La production d'acier d'un pays a augmenté
de $x_1$ % une première année
de $x_2$ % une seconde année

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

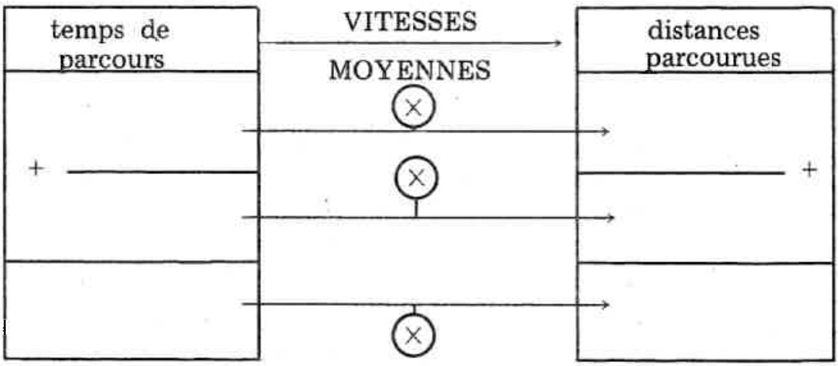
de $x_n$ % une $n$-ième année.

Quel est le pourcentage de l'augmentation annuelle moyenne sur ces $n$ années ?

## II. Schématisation des situations précédentes

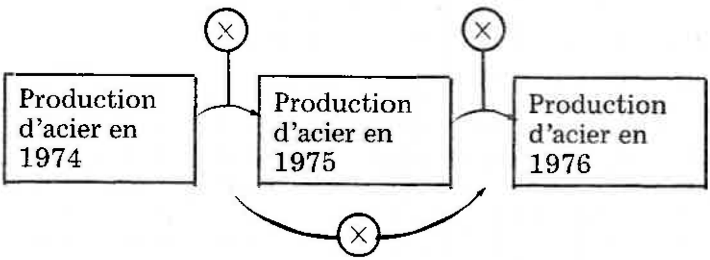
1°) vitesse moyenne $= \dfrac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$

Pour chacun des exercices 1, 1 bis, 1 ter a), 2, 2 bis, 2 ter a) remplir le tableau suivant et en déduire les réponses aux questions posées.




N.B. On notera pour chaque exercice l'ordre dans lequel sont remplies les "cases" du tableau.

2°) Pour chacun des exercices 3 et 3 bis, compléter le schéma ci-dessous, et *en déduire* les réponses aux questions posées.



## III. Définitions de différentes moyennes

1°) On appelle moyenne arithmétique de deux nombres $x$ et $y$ le nombre :

$$a = \frac{x + y}{2}$$

2°) On appelle moyenne harmonique de deux nombres $x$ et $y$ différents de zéro le nombre :

$$h = \frac{2\,xy}{x+y}$$

3°) On appelle moyenne géométrique de deux nombres $x$ et $y$ positifs le nombre :

$$g = \sqrt{xy}$$

4°) On appelle moyenne quadratique de deux nombres $x$ et $y$ positifs le nombre :

$$q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

## IV. Exercices de calcul algébrique mettant en évidence des propriétés des moyennes arithmétique, harmonique, géométrique, quadratique.

1°) Remplir le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 100 | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 |
| $h$ | | | | | | |
| $g$ | | | | | | |
| $a$ | | | | | | |
| $q$ | | | | | | |
| $y$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |

où $a$, $h$, $g$, $q$ désignent respectivement les moyennes arithmétique, harmonique, géométrique, quadratique des nombres $x$ et $y$.

2°) On donne un couple $(x,y)$ de nombres réels strictement positifs et on désigne par $a$, $g$, $h$ leurs moyennes arithmétique, géométrique, harmonique.

1) A quelle condition sur $x$ et $y$ a-t-on $a = h$, $h = g$, $g = a$ ?
On suppose dans la suite de l'exercice que $x < y$.

2) Montrer que : $x < h < g < a < q < y$

3) Montrer que $g$ est moyenne géométrique de $h$ et de $a$.

4) Montrer que : $a - g > g - h$.

3°) Soient $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ un quadruplet de nombres strictement positifs. A quelle condition la moyenne arithmétique des moyennes géométriques respectives de $(x_1, y_1)$ et de $(x_2, y_2)$ est-elle la moyenne géométrique des moyennes arithmétiques respectives de $(x_1, y_1)$ et de $(x_2, y_2)$ ?

## V Exercices mettant en jeu les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique.

Pour chacun des exercices suivants, on utilisera une schématisation appropriée du type de celles du paragraphe II et on précisera de quelle moyenne — arithmétique, harmonique ou géométrique — il s'agit.

*Exercice 1.*

a) Une personne achète des deutschmarks en deux fois : $y_1$ deutschmarks une première fois, au cours de $t_1$ francs pour un deutschmark ; $y_2$ une seconde fois, au cours de $t_2$ francs pour un deutschmark. Quel est le cours moyen pour l'ensemble de ces deux opérations ? Autrement dit, quel est le prix de revient en francs de chaque deutschmark acheté par cette personne ?

b) Une personne achète des deutschmarks en deux fois : une première fois pour $x_1$ francs, au cours de $t_1$ francs pour un deutschmark ; une seconde fois pour $x_2$ francs, au cours de $t_2$ francs pour un deutschmark.
Quel est le cours moyen du deutschmark pour l'ensemble de ces deux opérations ?

*Exercice 2.*

a) On fait fondre ensemble $a_1$ kg d'un premier métal de masse volumique $x_1$ kg/m$^3$ et $a_2$ kg d'un second métal de masse volumique $x_2$ kg/m$^3$.
Quelle est la masse volumique de l'alliage ?

b) On fait fondre ensemble $b_1$ m³ d'un premier métal de masse volumique $x_1$ kg/m³ et $b_2$ m³ d'un second métal de masse volumique $x_2$ kg/m³.
Quelle est la masse volumique de l'alliage ?

*Exercice 3.*

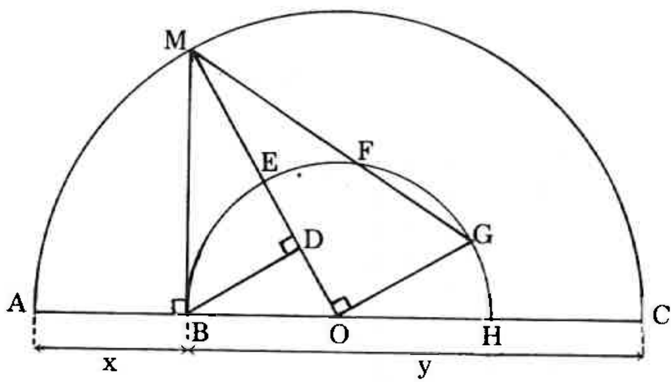
La population d'une ville était de 225 000 habitants en 1960 et de 256 000 habitants en 1970.

a) Dans l'hypothèse où l'accroissement annuel de population est resté constant entre 1960 et 1970, quelle était la population de cette ville en 1965 ?

b) Dans l'hypothèse où le pourcentage de l'accroissement annuel de population est resté constant entre 1960 et 1970, quelle était la population de cette ville en 1965 ?

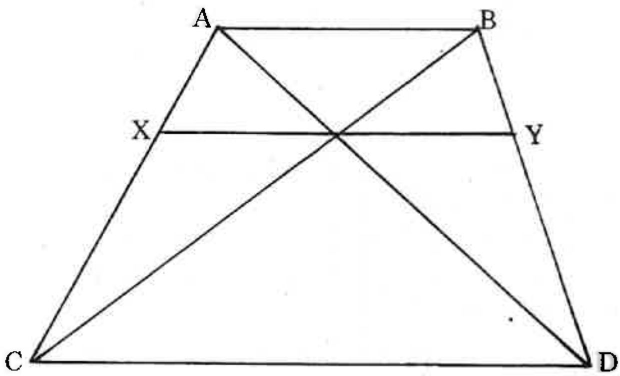
## VI. Retour à la géométrie.

*Exercice 1.*




Sur cette figure, on peut "lire" les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique de $x$ et $y$ : ce sont les longueurs de différents segments d'origine M ; lesquels ?

*Exercice 2.*




ABCD est un trapèze (AB // CD // XY)
Montrer que la longueur de XY est la moyenne harmonique de celle de AB et de celle de CD.

## LE HERON DE L'HISTOIRE

NDLR

Le héron d'Alexandrie se nourrit exclusivement de racines

# V - LE CAMPEUR

Cette fiche peut être proposée après l'étude de la distance liée à la valeur absolue sur R.

Il s'agit de minimiser une expression de la forme

$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

$x$ appartenant à un intervalle donné. On pourra trouver les différents minima graphiquement, $f$ étant affine par intervalles.

La mathématisation du problème n'est pas toujours immédiate et l'apparition de valeurs absolues (souvent bien tardive) est perçue comme un mal nécessaire, mais finalement acceptée "faute de mieux" par tous.

Dans l'une des situations proposées, la solution cherchée est un intervalle, ce qui soulève dans certains groupes (l'activité a été proposée en T.D. et les élèves ont travaillé par groupes) de vives discussions quant au choix de l'emplacement de la tente.

Seuls de nombreux calculs numériques parviennent à convaincre les plus réticents que l'emplacement peut être choisi "n'importe où" dans cet intervalle.

*

*   *

Un campeur décide de passer ses vacances au camping de Pollu-les-Bains (en Syldavie). Une fois sur place, il envisage de planter sa tente le long d'une allée rectiligne longue de 500 m aboutissant à la mer. Le long de cette allée se trouvent :

— à 100 m de la mer, les installations sanitaires S
— à 300 m de la mer, le centre commercial C
— à 400 m de la mer, le parking P.

Dans un premier temps, le campeur prévoit qu'il fera journellement :

1 aller-retour tente-mer,
1 aller-retour tente-centre commercial,
1 aller-retour tente-sanitaires.

Quelle distance parcourra-t-il journellement s'il plante sa tente à 200 m de la mer ?

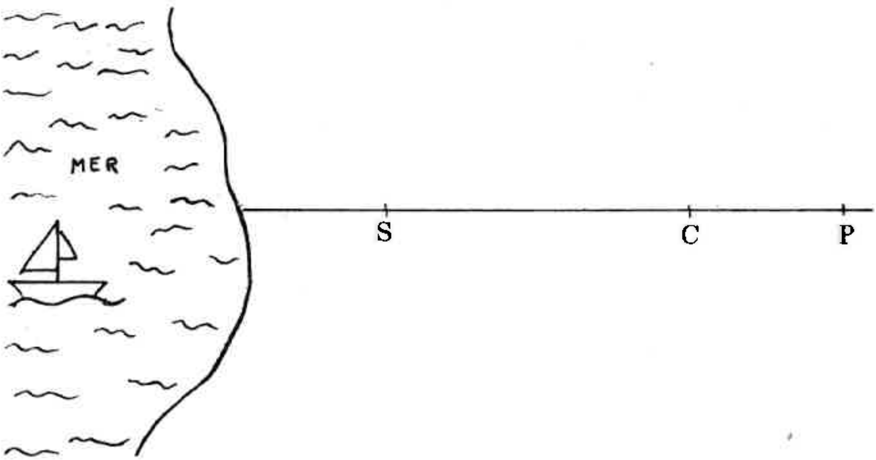
Pourrait-il s'éviter une fatigue inutile en plantant sa tente ailleurs ?

Ses prévisions initiales s'avérant fausses, il envisage maintenant :

3 aller-retour tente-mer,
2 aller-retour tente-installations sanitaires,
4 aller-retour tente-centre commercial
1 aller retour tente-parking.

Où doit-il planter sa tente pour rendre la distance parcourue chaque jour minimale ?

Quel endroit le campeur doit-il choisir lorsqu'il ne fait plus que 3 aller-retour de la tente au centre commercial ?




P.S. N'aimant pas les endroits trop fréquentés, il exige en outre d'être éloigné d'au moins 50 m des emplacements S, P, C.

Les résultats précédents seraient-ils encore valables si l'allée n'était plus rectiligne?

# VI - "TAXI-DISTANCE"

Cette fiche met l'accent sur l'activité heuristique. Les élèves ne sont pas guidés et choisissent librement l'orientation de leur recherche.

Le travail se divise en deux étapes :

1° La compréhension du phénomène par la recherche de quelques solutions particulières, phase dynamique qui fait intervenir des manipulations, du dessin, du bricolage.

2° La formalisation du problème lors de la recherche exhaustive de toutes les solutions.

Pour aborder cette fiche, les notions acquises en classe de troisième sont suffisantes. Elle constitue une initiation à la notion de distance, quoiqu'aucune connaissance dans ce domaine ne soit nécessaire. Elle ouvrira des horizons nouveaux : en taxi-distance la médiatrice de deux points ne ressemble pas à celle étudiée antérieurement ! Trouver de plus en plus de points qui conviennent, voilà qui est stimulant pour l'élève, qui ne saurait rester inactif devant une telle activité.

Les résultats sont surprenants et la nécessité d'une démonstration se fait sentir.

Différentes rubriques sont touchées lors de la mathématisation du problème :

1) Les valeurs absolues
2) Les équations de droites
3) Le régionnement du plan.

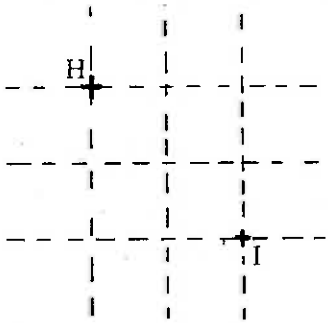
*

* *

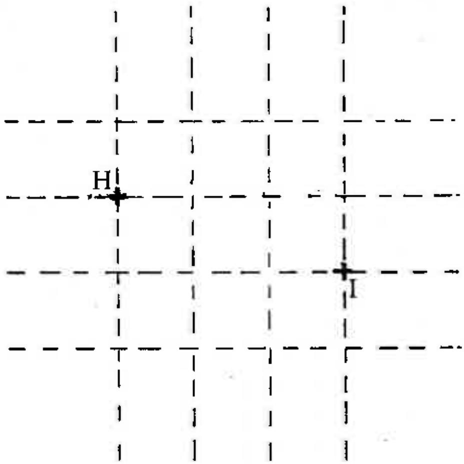
Dans le désert du Méri, la sécheresse est presque insupportable. Les habitants pensent qu'il s'agit d'une punition divine parce que ces derniers temps, ils ont trop zigzagué dans le désert. C'est pourquoi, pour regagner la faveur des dieux, ils décident de ne plus se déplacer que dans deux directions : Nord-Sud, Sud-Nord ; Est-Ouest, Ouest-Est.

En attendant, pour ne pas mourir de soif, les indigènes des villages d'Heuristique et d'IREM décident, tout en restant fidèles à leur résolution pour les déplacements, de creuser un puits à égale distance des deux villages.

Indiquer sur le plan ci-joint tous les endroits où ce puits est susceptible d'être creusé.




Que se serait-il passé si le plan avait été :




Choisir un repère. Prendre M de coordonnées (x,y).
Calculer les distances d(M,A) et d(M,B).
Exprimer algébriquement le problème et le résoudre.

# VII - ABSOLUTISME

L'idée de cette activité est la suivante :

Soit f une fonction et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé : l'équation de C est : $y = f(x)$. Quelles courbes obtient-on si on « introduit » dans cette équation une ou des valeurs absolues ?

Cette activité met en jeu plusieurs concepts, à savoir ceux de :

— Fonction ;
— Courbe représentative d'une fonction ;
— Equation d'une courbe ;
— Parité d'une fonction ;
— Composition de fonctions ;
— Valeur absolue ;
— Symétries ;
— Régionnement du plan par des conditions simples.

*

* *

Enoncé

Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$$x \mapsto -x + 1 \text{ si } x \leqslant 2$$

$$x \mapsto \frac{1}{2}x + 2 \text{ si } x > 2$$

Soit $v : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$$x \mapsto |x|$$

1ᵉ Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé ; on appelle C la courbe représentative de f ; son équation est : $y = f(x)$.

2ᵉ Soit $C_1$ la courbe d'équation $y = f(|x|)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto f(|x|)$ est une fonction paire et en déduire une construction de $C_1$ à partir de C.

3ᵉ Pour obtenir $C_1$, on a « remplacé » x par $|x|$ dans l'équation de C. On peut ainsi « remplacer » x par $|x|$ ou y par $|y|$ ou $f(x)$ par $|f(x)|$ dans l'équation de C ; on peut aussi procéder à deux « remplacements » ou même trois. On obtient ainsi sept courbes autres que C (pourquoi sept ?) :

$C_1, C_2, \ldots, C_7$.

Ecrire les équations de ces sept courbes.

Quelles sont parmi ces courbes, celles qui sont courbes représentatives de fonctions ? Montrer que ces fonctions sont composées de v et de f.

Représenter graphiquement chacune de ces courbes : on fera sept graphiques en prenant chaque fois la même unité de longueur, et en faisant chaque fois figurer *C*.

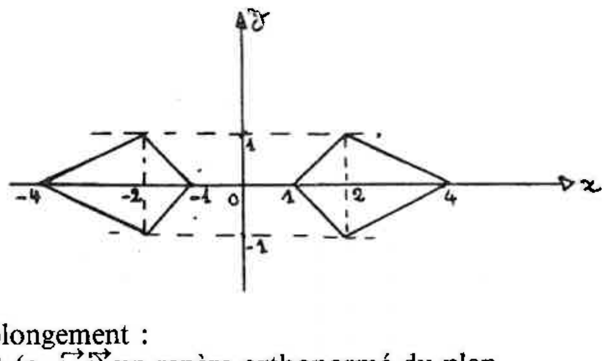
4e Soit C', C'', C''' les transformés respectifs de C par la symétrie axiale dont l'axe est l'axe des abscisses, la symétrie axiale dont l'axe est l'axe des ordonnées, la symétrie centrale dont le centre est l'origine des axes.

Ecrire les équations de C', C'', C'''.

Représenter C, C', C'' et C''' sur un même graphique (à l'aide de couleurs différentes, par exemple).

Retrouver graphiquement et par le calcul une des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_7$ comme réunion de parties des courbes C, C', C'', C'''.

5e Trouver une équation de l'ensemble E représenté graphiquement ci-dessous :




Prolongement :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit $\varphi$ l'application du plan dans lui-même qui a tout point M de coordonnées x et y fait correspondre M' de coordonnées x' et y' telles que :

$$x' = |x| \text{ et } y' = |y|$$

1e Construire l'image par $\varphi$ de différents points. Quelles transformations géométriques simples utilise-t-on ?

2e $\varphi$ est-elle une transformation du plan ?

3e Construire l'image par $\varphi$ de différents cercles.

# VIII - SOYONS LOGIQUES

Le raisonnement logique est le thème essentiel de ce chapitre.

Le problème du « Poisson d'avril » concerne le raisonnement pur, sans référence à des notions mathématiques. « Master-Mind » conduit à des déductions à partir des seules règles du jeu fixées au départ (appelées axiomes en mathématiques). Pour résoudre « le problème d'héritage », une analyse du texte s'impose avant de procéder à la mise en équation.

Dans la fiche « A vélo », on répond facilement aux questions en contournant les difficultés linguistiques par le découpage en parties disjointes d'un ensemble et on se familiarise avec les notions fondamentales d'implications et d'équivalences reprises sous un angle plus mathématique dans « Impliquez-vous d'abord — Expliquez-vous ensuite ». Pour nier une proposition, il suffit de donner un contre-exemple : c'est l'objet de « Contre-exemple ». Si le raisonnement est solide, on pourra aborder sans difficulté « Trouvez l'erreur ».

Bibliographie :


| | |
|---|---|
| DELEDICQ | Mathématiques buissonnières (CEDIC) |
| GARDNER | Divertissements Mathématiques |
| | Le paradoxe du pendu (DUNOD) |
| | Nouveaux divertissements mathématiques |
| SAM LOYD | Les Casse-tête |
| STEINHAUS | 100 problèmes élémentaires de Mathématiques (GAUTHIER-VILLARS) |


*

* *

## POISSON D'AVRIL

Le premier avril 1977, d'éminents mathématiciens réunis en colloque décident d'organiser un divertissement.

Le professeur Cosinus est chargé d'accrocher subrepticement un poisson dans le dos de certains de ses collègues. Chaque participant ignore s'il a un poisson, mais il peut voir le dos de tous les autres. Le professeur Cosinus annonce qu'il a accroché au moins un poisson et décide de récompenser les éminents collègues qui sont sûrs d'avoir un poisson.

Il demande une première fois : « Y a-t-il des gagnants ? » Personne ne se manifeste. Il repose la question et ce n'est qu'à la sixième fois que des gagnants se déclarent. Combien sont-ils ?

*

* *

## MASTER-MIND

### Petit Master-Mind

Corinne et Samy ont inventé un nouveau jeu ; ils disposent de nombreuses boules de 6 couleurs différentes. Corinne choisit 4 boules de 4 couleurs différentes et se garde bien de les montrer à son camarade. Samy doit deviner le plus rapidement possible les couleurs choisies par Corinne. Et voici la règle du jeu : il propose 4 couleurs différentes. Si elles sont toutes justes, le jeu est terminé. Sinon Corinne lui indique le nombre de couleurs exactes. A l'étape suivante, Samy propose à nouveau 4 couleurs et Corinne lui signale le nombre de couleurs exactes. Samy gagne au 5$^{e}$ coup. Aurait-il pu mieux faire ?

### Mini Master-Mind

Corinne et Samy ne gardent que des boules de 3 couleurs différentes. Samy en choisit une de chaque sorte et place chacune d'elles dans une des trois boîtes placées devant lui. Quelle couleur se trouve dans la boîte n° 1 ? et dans la boîte n° 2 ? et dans la boîte n° 3 ? A Corinne de le trouver le plus rapidement possible !

Elle propose une solution et Samy lui indique le nombre de couleurs à leur place. A Corinne de proposer une nouvelle solution, puis à Samy de lui répondre, si elle n'a pas obtenu le bon résultat. Corinne trouve au deuxième coup. Et Samy de lui dire : « Tu as de la chance, ce n'est pas toujours aussi rapide ». A-t-il raison ?

*

* *

## UN PROBLEME D'HERITAGE

Un riche diamantaire, sentant sa fin prochaine, fit venir ses enfants afin de leur distribuer sa fortune, constituée exclusivement de diamants. L'aîné prendra un diamant et le septième de ce qui reste. Le second aura deux diamants et le septième de ce qui reste, le troisième aura trois diamants et le septième de ce qui reste et ainsi de suite.

En bon père de famille, le diamantaire a pris soin de ne léser personne : toutes les parts sont égales.

Combien possède-t-il de diamants ? Quel est le nombre de ses enfants ?

*

* *

## A VELO

On considère les six assertions suivantes. Trouvez toutes les implications qui les lient. S'il n'en n'existe pas, donnez une population contre-exemple.

1° Il y a plus de cyclistes que de non-cyclistes parmi les lycéens.

2° Il y a plus de lycéens chez les cyclistes que parmi les non-cyclistes.

3° Il y a plus de cyclistes chez les lycéens que parmi les non-lycéens.

4° La proportion de cyclistes parmi les lycéens est plus élevée que la proportion de non-cyclistes parmi les lycéens.

5° La proportion de lycéens parmi les cyclistes est plus élevée que la proportion de lycéens parmi les non-cyclistes.

6° La proportion de cyclistes parmi les lycéens est plus élevée que la proportion de cyclistes parmi les non-lycéens.

*

* *

## IMPLIQUEZ-VOUS D'ABORD, EXPLIQUEZ-VOUS ENSUITE !

*Mode d'emploi :* A LIRE ATTENTIVEMENT

a et b désignent deux nombres réels.

Proposition (1) : $(a + b)^2 = 0$

Proposition (2) : $a = 0$ et $b = 0$

Proposition (3) : $a = -b$

1) Dans tous les cas, si $(a + b)^2 = 0$ alors $a + b = 0$ donc $a = -b$

On dit que : $(a + b)^2 = 0$ « implique » $a = -b$

On note : $(a + b)^2 = 0 \Rightarrow a = -b$

2) Il peut arriver que l'on ait : $(a + b)^2 = 0$ sans pour autant avoir : $a = 0$ et $b = 0$.
En effet, en prenant $a = 1$ et $b = -1$, on a bien $(a + b)^2 = 0$ et on n'a pas : $a = 0$ et $b = 0$.
On dit que : $(a + b)^2 = 0$ « n'implique pas » $a = 0$ et $b = 0$, et qu'on l'a démontré à l'aide d'un contre-exemple ($a = 1$ et $b = -1$)

3) Dans tous les cas, si $a = -b$ alors $a + b = 0$ donc $(a + b)^2 = 0$.
En tenant compte de 1), on dit que : $(a + b)^2 = 0$ est équivalent à $a = -b$. On note : $(a + b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -b$.

*Activités :*

**I** - Voici quelques propositions, et une équation :
(a et b) désignent des nombres réels).

(1) $a^2 = b^2$

(2) $a = b$

(3) $a = -b$

(4) $(a - b)(a + b) = 0$

(5) $a = b$ ou $a = -b$

(6) $a = 0$ et $b = 0$

(7) $a^3 = b^3$

(8) $|a| = |b|$

(9) $(a^2 + b^2)(2a + b) = 0$

(10) $ab + b^2$

(E) $(2x - 3)^2 = (2x + 9)^2$

*A - Questions :*

1) Quelles sont les implications du type (1) $\Rightarrow$ ( ) ?
Pour celles qui ne sont pas vérifiées, donner un contre-exemple.

2) Quelles sont les implications du type ◯ ⇒ (1) ?
Pour celles qui ne sont pas vérifiées, donner un contre-exemple.

3) Quelles sont les équivalences du type (1) ⇔ ◯ ?

*B - Utilisation :*

Résoudre l'équation (E) dans **R.**

**II** - Mêmes questions à propos des propositions et l'équation suivantes :

(a et b désignent des nombres réels)

(1) $a^2 + b^2 = 0$

(2) $a \neq b$

(3) $a = 0$ et $b = 0$

(4) $ab = 0$

(5) $a + b = 0$

(6) $a^3 + b^3 = 0$

(7) $|a| + |b| = 0$

(8) $|a + b| = 0$

(E) $(2x - 3)^2 + (2x + 9)^2 = 0$

**III** - Mêmes questions à propos des propositions et de l'inéquation suivante : (a et b désignent des nombres réels)

(1) $a^2 \leqslant b^2$

(2) $a \leqslant b$

(3) $a \leqslant b$ ou $a \leqslant -b$

(4) $(a - b)(a + b) \leqslant 0$

5 $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$

6 $a \leqslant b$ et $a \geqslant -b$

7 $a^3 \leqslant b^3$

8 $|a| \leqslant |b|$

E $(2x - 3)^2 \leqslant (2x + 9)^2$

**IV** - Mêmes questions à propos des propositions et de l'inéquation suivante :

1 $\dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{b}$

2 $b \leqslant a$

3 $\dfrac{b}{a} \geqslant 1$

4 $\dfrac{a}{b} \leqslant 1$

5 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \leqslant 0$

6 $0 \leqslant b \leqslant a$ ou $b \leqslant a \leqslant 0$ ou $a \leqslant 0 \leqslant b$

E $\dfrac{1}{2x - 3} \leqslant \dfrac{2}{2x + 9}$

On répondra aux trois questions dans chacun des cas suivants :

1) a et b sont deux nombres réels strictement positifs ;

2) a et b sont deux nombres réels non nuls et de signes contraires.

*

* *

## LE CONTRE-EXEMPLE

Examinez chacune des phrases suivantes : si elle est vraie, démontrez-le ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

0) Parmi trois nombres entiers, il y en a au moins deux qui ont la même parité.

1) Quel que soit le naturel n, $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

2) Toute fonction numérique non croissante sur [a;b] est décroissante sur [a ;b].

3) Deux quadrilatères ayant leurs quatre côtés égaux deux à deux sont égaux (c'est-à-dire superposables).

4) Tout polygone convexe ayant un nombre impair de côtés a un nombre impair de diagonales.

5) Tout polygone convexe ayant un nombre impair de diagonales a un nombre impair de côtés.

6) Toutes les fonctions affines sont décroissantes.

7) Quel que soit le naturel n, $n^2 - 79n + 1601$ est un nombre premier.

8) Toute fonction qui n'admet pas de minimum admet un maximum.

9) Toutes les fonctions linéaires sont croissantes sur **R.**

10) Toute boucle obtenue en collant ensemble les deux extrémités d'une bande de papier a une face interne et une face externe.

11) Tout quadrilatère ayant deux côtés parallèles et deux côtés égaux est un parallélogramme.

12) Pour tout x réel non nul, $\frac{1}{x} \leqslant x$

13) Pour tout x réel positif, $x \leqslant x^2$.

14) Si a et b sont deux entiers pairs, alors a + b est un entier pair.

15) Si a et b sont deux entiers impairs, alors a + b est un entier impair.

16) Si f et g sont deux fonctions impaires, alors f + g est une fonction impaire.

17) Si f et g sont deux fonctions paires, alors f + g est une fonction paire.

*

* *

## TROUVEZ L'ERREUR

**I** - Résolution de l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x + 1) = 0$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow$
$x^3 + x^2 + x = 0$ et $x \neq 0$
Or $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = -1$
Donc $x^3 + (x^2 + x) = 0$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$ et $x \neq 0$
Finalement, $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$ et $x \neq 0$
Or 1 est solution de $x^3 - 1 = 0$ et $1 \neq 0$
Donc 1 est solution de $x^2 + x + 1 = 0$
En vérifiant, on trouve ainsi $1^2 + 1 + 1 = 0$

BIZARRE !

**II** - Soient a et b deux nombres réels dont la somme est égale à $-1$ et le produit à 2.

Le produit ab est positif donc a et b sont de même signe ; si a et b étaient tous deux positifs, leur somme serait positive ; ce n'est pas le cas, donc a et b sont deux nombres négatifs ; $-a$ et $-b$ sont donc tous deux négatifs.
Comme $a + b = -1$, on a :
$b < O$ et $-a = 1 + b$ donc $-a < 1$
$a < 0$ et $-b = 1 + a$ donc $-b < 1$
Finalement, on a : $0 < -a < 1$ et $0 < -b < 1$
En multipliant ces doubles inégalités membre à membre, on obtient :
$0 < ab < 1$ ; or $ab = 2$
On en conclut que : $0 < 2 < 1$

ETRANGE !

*

* *

# IX - DE TOUT, ENSEMBLE

L'exercice "Qui cherche trouve" ne nécessite aucune connaissance préalable et constitue une bonne mise en train pour les activités qui suivent.

"Sondage" et "Des "on dit"" présentent certaines situations qui, décrites en termes de pourcentage, paraissent ou sont contradictoires. Une bonne occasion de préciser un peu la notion de pourcentage.

"Les vacances de Monsieur Hulot" ont été pluvieuses, hélas. Elles nous posent de ce fait un problème de dénombrement d'abord et de programmation linéaire ensuite.

"Démocratie ?" nous plonge dans la politique intérieure de la Papirémie (lointain pays d'où nous vint Venn qui importa les patates).

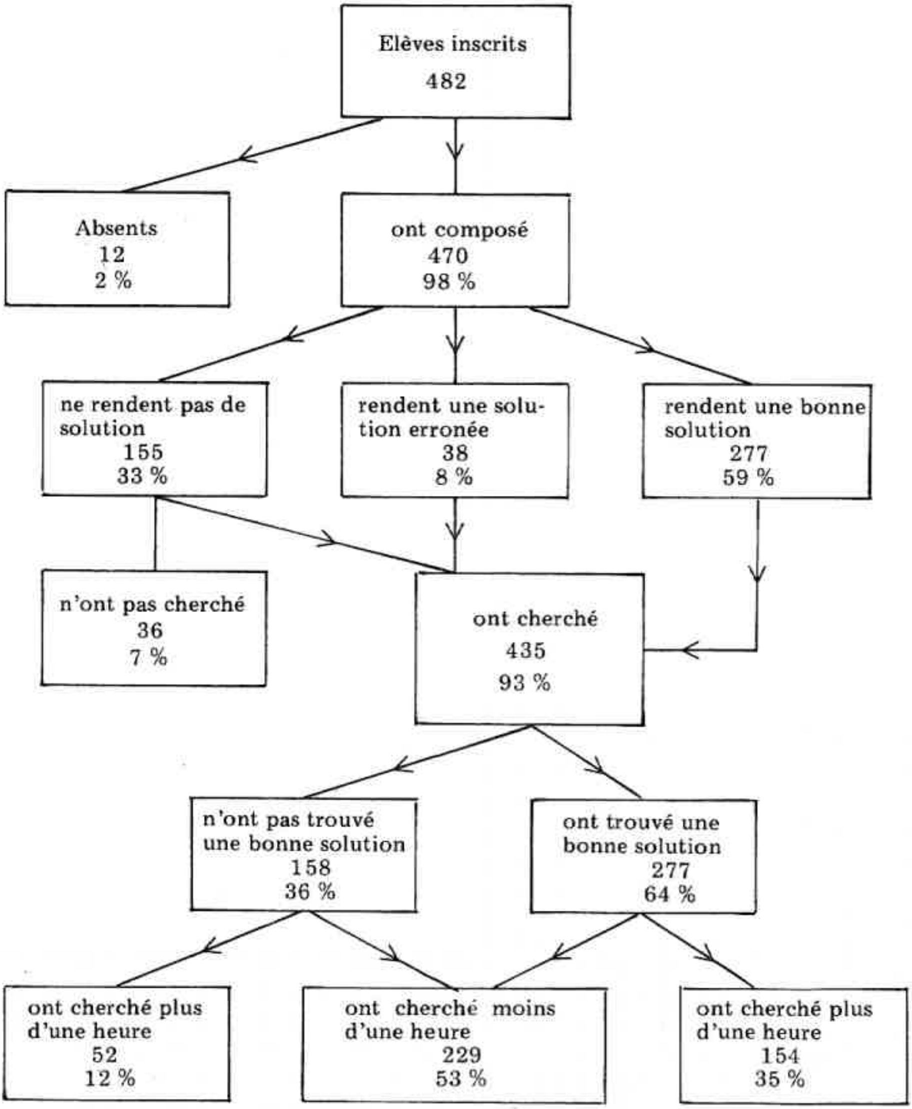
Ces activités ont été regroupées, parce que leur résolution passe très souvent par une présentation des informations, fournies par l'énoncé, sous une forme adaptée (diagramme de Venn, de Carroll, tableau à double entrée, etc.).

*

*    *

## QUI CHERCHE TROUVE

Un même problème de mathématique a été proposé à l'ensemble des élèves de seconde d'un établissement durant 2 heures. Le tableau ci-dessous donne les résultats de l'enquête qui a suivi.



1) Vérifier les calculs. Comment a-t-on arrondi ?
2) Représenter les ensembles concernés sur un diagramme.
3) Reconstituer le questionnaire qui a permis de remplir le tableau.
4) Présenter dans un tableau semblable les résultats d'un autre établissement sachant que :

| | |
|---|---|
| 522 | élèves sont inscrits en seconde |
| 97 % | d'entre eux ont composé |
| 10 % | de ceux qui ont composé ont rendu une solution erronée |
| 167 | n'ont pas rendu de solution, parmi eux 42 n'ont pas cherché |
| 252 | élèves ont cherché au moins une heure |
| 40 % | de ceux qui ont rendu une bonne solution ont cherché plus d'une heure |

## DES "ON DIT ..."

I) Il paraît que :

1) Les Glaner gagnent 2 100 F de plus que les Ferren.
2) Monsieur Glaner gagne 20 % de plus que Monsieur Ferren.
3) Madame Glaner gagne 30 % de plus que Madame Ferren.
4) Les Ferren gagnent 9 000 F.
5) Monsieur Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.

a) Que pensez-vous de ces cinq informations ?
b) En supposant que seule l'information 1) est fausse, pouvez-vous calculer ce que gagne chaque personne ?
c) Même question en supposant que 2) est fausse.
d) Même question en supposant que 3) est fausse.
e) Même question en supposant que 4) est fausse.
f) Même question en supposant que 5) est fausse.

II) On raconte que :

— Madame Lalivin gagne 76 % de plus que Madame de Tonicet.
— Monsieur de Tonicet gagne $x$ % de plus que son épouse.
— Monsieur Lalivin gagne $x$ % de plus que Monsieur de Tonicet.
— La différence entre ce que gagnent les Lalivin et ce que gagnent les de Tonicet est égale à ce que gagne Madame de Tonicet.
— Les Lalivin et les de Tonicet gagnent ensemble 21 600 F.

Comment est-ce possible ??

## SONDAGE

1/ Un sondage montre que le "Républicain Alsacien" compte parmi ses lecteurs 30 % d'hommes ; que le "Strasbourgeois libéré" en compte 40 % . Pourtant, sur l'ensemble des lecteurs d'au moins l'un des deux journaux, il y a 27 % d'hommes seulement. Ces résultats vous paraissent-ils compatibles à première vue ?

2/ Voici le détail de l'enquête :

| | Hommes | Femmes |
|---|---|---|
| Lecteurs du "Républicain Alsacien" | 107 | 253 |
| Lecteurs du "Strasbourgeois Libéré" | 111 | 168 |
| Lecteurs de l'un au moins des deux journaux | 122 | 330 |

Vérifiez les pourcentages.

3/ Pour comprendre le phénomène, complétez le tableau suivant.

| | Hommes | Femmes | Total |
|---|---|---|---|
| Lecteurs exclusifs du "Républicain Alsacien" | | | |
| Lecteurs exclusifs du "Strasbourgeois Libéré" | | | |
| Lecteurs des deux journaux à la fois | | | |

Comment pouvez-vous expliquer maintenant les écarts de pourcentage dans l'enquête ?

## LES VACANCES DE MONSIEUR HULOT

Monsieur Hulot a passé ses vacances dans une région où il ne pleut jamais toute la journée : s'il pleut le matin, il fait beau l'après-midi.

1 Durant son séjour, 11 journées furent "gâchées" par quelques averses. Il a cependant connu 8 matinées et 11 après-midi sans une goutte de pluie.

Remplir le tableau suivant en demi-journées en indiquant l'ordre de remplissage des cases.

| | Matinées | Après-midi | |
|---|---|---|---|
| Avec pluie | | | |
| Sans pluie | | | |
| | | | |

En déduire le nombre de jours de vacances de Monsieur Hulot, et le nombre de jours sans pluie.

2 Monsieur Hulot aurait-il pu connaître 12 jours de pluie (durant ces journées il pleut soit le matin, soit l'après-midi), 5 matinées et 5 après-midi sans pluie ?

3 Monsieur Hulot aurait-il pu connaître 5 jours de pluie, 4 matinées et 11 après-midi sans pluie ?

4 Soient Z, X, Y respectivement le nombre de jours de pluie, le nombre de matinées sans pluie, le nombre d'après-midi sans pluie, que connut Monsieur Hulot. Montrer que, pour que ces données soient compatibles, elles doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} X + Y \geqslant Z \\ X + Z \geqslant Y \\ Y + Z \geqslant X \end{cases}$$

Le nombre de demi-journées de vacances de Monsieur Hulot est donné par une expression simple en fonction de X, Y, Z : laquelle ?

5 Interprétons ce problème graphiquement en supposant que nous sachions que Monsieur Hulot a connu 11 journées de pluie. X et Y vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} X + Y \geqslant 11 \\ X + 11 \geqslant Y \\ Y + 11 \geqslant X \end{cases} \iff \begin{cases} X + Y - 11 \geqslant 0 \\ X - Y + 11 \geqslant 0 \\ -X + Y + 11 \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Tracer dans un repère orthonormé les droites d'équations

$$X + Y - 11 = 0 \; ; \quad X - Y + 11 = 0 \; ; \quad -X + Y + 11 = 0 .$$

et représenter graphiquement les points de coordonnées $(X,Y)$ qui pourraient être solutions du problème.

b) Mais tout a une fin... X et Y ne peuvent pas être aussi grands que Monsieur Hulot le souhaiterait, car il dispose d'un maximum de 15 jours de vacances cet été. Représenter graphiquement les points de coordonnées $(X,Y)$ susceptibles d'être solutions du problème, sachant que Monsieur Hulot est parti un nombre entier de jours en vacances. Remarquer que :

$$X \leqslant 15 \qquad Y \leqslant 15 \qquad X + Y + 11 \leqslant 30$$

c) Monsieur Hulot, grand sportif, ne reste pas oisif durant ses vacances. Voici son emploi du temps :

| | |
|---|---|
| Le matin | Par beau temps, il fait du tennis à 50 F la demi-journée.<br>Par mauvais temps, il se rend à la piscine dont l'entrée revient à 15 F. |
| L'après-midi | Par beau temps, il fait de l'équitation à 70 F la demi-journée.<br>Par mauvais temps, il réserve une table de ping-pong pour 40 F. |

Soit P le prix des activités sportives de Monsieur Hulot durant ses vacances. Montrer que :

$$P(X,Y) = \frac{125}{2} X + \frac{115}{2} Y + \frac{605}{2}$$

* Calculer $P(1, 12)$ et $P(2, 13)$.

* Trouver tous les couples $(X,Y)$ du domaine $\Delta$ déterminé dans la question b) vérifiant $P(X,Y) = 1055$. On pourra remarquer que, si un tel couple $(X,Y)$ existe, il vérifie

$$125\,X + 115\,Y - 1505 = 0$$

et tracer la droite D d'équation $Y = -\dfrac{125}{115} X + \dfrac{1505}{115}$. On trouve les solutions de la question en cherchant les points de coordonnées $(X,Y)$ qui appartiennent à $D \cap \Delta$ .

* Trouver tous les couples (X,Y) du domaine $\Delta$ qui vérifient :

$\alpha$) $P(X,Y) = 1175$

$\beta$) $1055 \leqslant P(X,Y) \leqslant 1175$

$\gamma$) $1055 \leqslant P(X,Y) < 1175$

* Déterminer tous les couples (X,Y) du domaine $\Delta$ qui correspondent à 12 jours de vacances ; à 13 jours de vacances ; les représenter graphiquement.

En déduire que si Monsieur Hulot connaît 11 jours de pluie durant ses vacances, quelle que soit la répartition des demi-journées de pluie, il dépensera davantage en 13 jours de vacances qu'en 12 jours.

* Reprendre les questions précédentes, dans le cas où Monsieur Hulot modifie légèrement ses activités, à savoir :

En déduire que si Monsieur Hulot connait 11 jours de pluie durant ses vacances, quelle que soit la répartition des demi-journées il dépensera davantage en 13 jours de vacances qu'en 12 jours.

* Reprendre les questions précédentes, dans le cas où Monsieur Hulot modifie légèrement ses activités, à savoir :

| | |
|---|---|
| Le matin | Par beau temps, il fait de l'équitation à 70 F la demi-journée.<br>Par mauvais temps, il se rend à la piscine dont l'entrée vaut 15 F. |
| L'après-midi | Par mauvais temps, il fait du tennis à 50 F la demi-journée.<br>Par mauvais temps, il réserve une table de ping pong pour 40 F. |

## DEMOCRATIE ?

En Papirémie orientale le parlement est composé de 470 membres. Il vient de procéder à l'élection des deux gouverneurs qui, pendant 4 ans, vont exercer le pouvoir. Selon le réglement de l'élection, chaque parlementaire a voté pour quatre candidats de son choix. L'ordinateur qui enregistre les votes indique pour trois candidats A, B, C les résultats suivants :

A a obtenu 282 voix

117 parlementaires ont voté chacun à la fois pour A et pour B
105 ont voté à la fois pour A et pour C
79 ont voté à la fois pour A, pour B et pour C
117 ont voté à la fois pour B et pour C mais pas pour A
27 ont voté pour C mais pas pour A ni pour B
133 ont voté pour B sans voter pour A.

1) Combien B a-t-il obtenu de voix ?
2) Combien C a-t-il obtenu de voix ?
3) En supposant qu'il n'y ait eu aucune abstention ni aucun vote nul, combien de parlementaires n'ont voté ni pour A, ni pour B, ni pour C ?
4) Peut-on déterminer le nombre de candidats autres que A, B, C qui ont pu obtenir la majorité absolue des voix ?

L'ordinateur a précisé que trois candidats seulement avait recueilli la majorité absolue des voix. D'après le règlement de l'élection, ce ne sont pas nécessairement les candidats qui arrivent en tête pour le nombre de voix qui sont élus.

On appelle "distance entre deux candidats X et Y le nombre suivant :

$$d(X,Y) = \frac{\begin{pmatrix}\text{nombre de parlementaires ayant voté} \\ \text{pour X sans voter pour Y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{nombre de parlementaires ayant} \\ \text{voté pour Y sans voter pour X}\end{pmatrix}}{\left(\text{nombre de parlementaires ayant voté pour X, pour Y ou pour les deux}\right)}$$

5) Que peut-on dire si $d(X,Y) = 0$ ?
6) Que peut-on dire si $d(X,Y) = 1$ ? Montrer que dans ce cas l'un au moins des candidats X ou Y n'a pas la majorité absolue.
7) Parmi les candidats ayant obtenu la majorité absolue, sont élus ceux pour lesquels la distance est minimale (pour assurer une certaine cohésion à l'équipe gouvernementale). Quels sont les deux élus ?

# X - LE CALENDRIER

Le calcul approché figure parmi les notions les plus mal "senties" en seconde. La vogue actuelle des mini-calculatrices a eu dans ce domaine une influence néfaste : l'élève recopie toutes les décimales restituées par la machine sans se soucier si elles ont encore une signification.

L'étude de l'histoire du calendrier fournit un exemple permettant de constater les effets graves d'une "erreur", somme toute minime, qui se répète 1 000 ou 10 000 fois. La compréhension de la fiche, dans laquelle alternent les textes descriptifs et les questions, exige un bon esprit d'analyse.

*

* *

Lorsque les hommes ont voulu mesurer le temps, une unité s'est imposée à toutes les époques et dans toutes les civilisations, c'est *le JOUR*. Dans ce qui suit un « jour » désignera le jour solaire moyen, c'est-à-dire la durée moyenne séparant deux passages consécutifs au méridien.

Le rythme des saisons impose une autre unité : L'ANNEE. Dans ce qui suit l'année désignera l'année tropique (durée séparant deux passages consécutifs du soleil à l'équinoxe).

$$\boxed{1 \text{ année} = 365{,}2422 \text{ jours}}$$

Dans certaines civilisations, le lune servait aussi à compter le temps (le calendrier religieux musulman est encore uniquement lunaire). Le MOIS est la durée qui sépare deux nouvelles lunes consécutives. Cette durée est sujette à des variations très sensibles, mais sa valeur moyenne s'établit à :

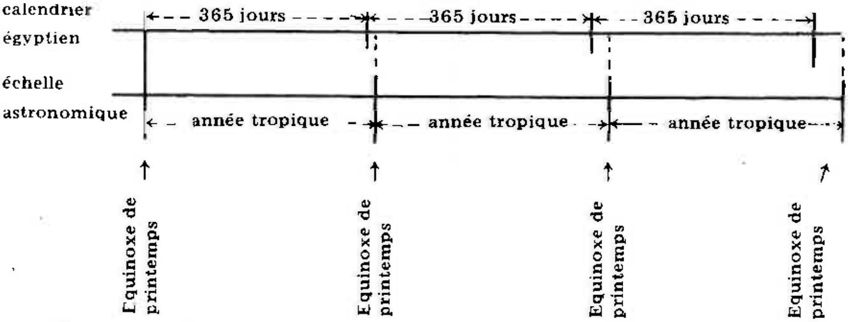
$$\boxed{1 \text{ mois} = 29{,}530\,588 \text{ jours}}$$

Toutes les difficultés rencontrées par ceux qui ont tenté d'établir un calendrier proviennent du peu de rapports existant entre les trois unités jours, mois, années que l'on désire combiner.

● *Les Egyptiens* furent les premiers à utiliser un calendrier solaire. Leur année se composait de douze mois (qui n'avaient rien à voir avec les phases de la lune) de trente jours chacun et de cinq jours supplémentaires à la fin, soit 365 jours.

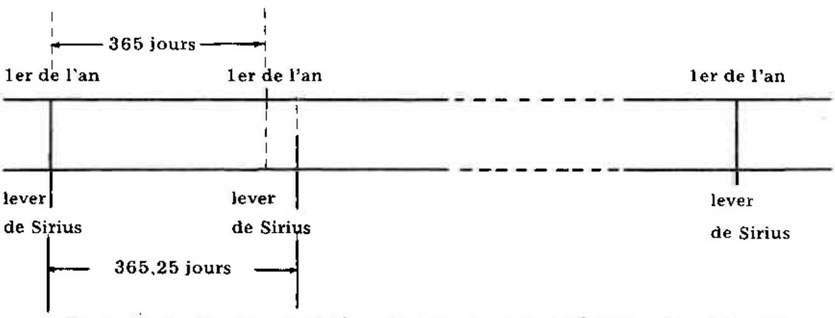
1) Quelle erreur relative commettaient les Egyptiens en supposant que l'année se composait de 365 jours ?

Le calendrier égyptien prenait-il du retard ou de l'avance par rapport aux saisons ?




Les Egyptiens observaient aussi le lever héliaque * de l'étoile Sirius, phénomène qui à l'époque se produisait tous les 365,25 jours et qui annonçait la crue du Nil.
Evidemment, ce phénomène ne se produisait pas à date fixe dans leur calendrier. Le lever de Sirius se produisit le premier jour de l'année en 4235 avant notre ère.

2) Au bout de combien d'années de 365 jours ce lever se reproduisit-il à nouveau le premier de l'an ?




Les Egyptiens appelèrent ce cycle période sothiaque et d'importantes festivités marquèrent le retour de Sirius au premier de l'an. Malgré ses imperfections, le calendrier que nous venons de

* Se dit du lever d'un astre ayant lieu peu avant le lever du soleil.

décrire fut conservé durant plus de 4 000 ans et les Egyptiens connurent trois périodes sothiaques (de durées inégales, car en fait l'année sothiaque augmente).

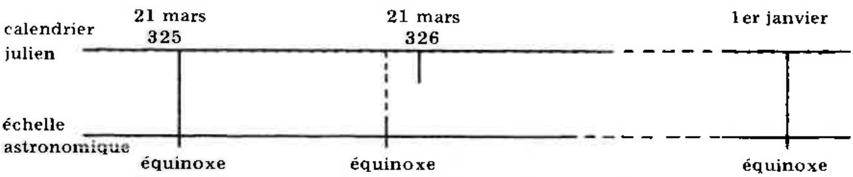
● Le premier janvier de l'an 45 avant notre ère, *Jules César*, conseillé par l'astronome grec Sosigène, instaura un nouveau calendrier, qui, en souvenir de lui, est appelé calendrier julien. Ce calendrier se caractérise par des années de 365 jours et par l'adjonction tous les quatre ans d'une année bissextile ayant un 29 février (dernier jour de l'année chez les Romains).

3) Calculer la durée moyenne d'une année du calendrier julien. Quelle erreur relative faisait Sosigène en supposant que l'année tropique avait cette durée ?

Ce calendrier prenait-il du retard ou de l'avance par rapport aux saisons ?

Calculer le décalage en l'an 1000 de notre ère (Remarque : il n'y a pas eu d'an 0 ; à l'an 1 avant notre ère a succédé l'an 1 de notre ère).

Si le calendrier julien avait été conservé, en quelle année l'équinoxe de printemps aurait-il eu lieu le premier janvier ? (En l'an 325 ap. J.C., cet équinoxe se produisit le 21 mars).




● Le calendrier julien ne fut pas conservé. Le concile de Nicée, réuni en l'an 325, avait lié la date de Pâques au 21 mars (jour de l'équinoxe de printemps en 325). Quelques siècles plus tard, l'Eglise s'inquiéta du glissement de la fête de Pâques vers l'été. En l'an 1582, *le pape Grégoire XIII* décida une réforme du calendrier julien.

4) Calculer quel fut en 1582 le retard du calendrier julien par rapport à l'équinoxe de printemps qui aurait dû se produire le 21 mars.

Pour ramener l'équinoxe au 21 mars, le pape décida de supprimer 10 jours du calendrier de cette année. (Pour l'Eglise romaine, le lendemain du jeudi 4 octobre fut le vendredi 15. En France le lendemain du 9 décembre 1582 fut le 20).

5) Calculer le retard pris par le calendrier julien en 400 ans.

Le pape Grégoire décida également de supprimer 3 jours en 400 ans en supprimant 3 années bissextiles en 400 ans. Depuis, les années bissextiles sont celles dont le millésime est :

- soit divisible par 4 mais pas par 100
- soit divisible par 400.

Le calendrier ainsi obtenu est appelé calendrier grégorien. C'est notre calendrier actuel.

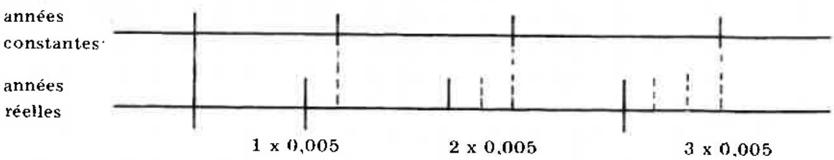
6) Calculer la durée moyenne d'une année du calendrier grégorien. Quelle est l'erreur relative par rapport à l'année tropique ? Quel sera le décalage dans 10 000 ans ?

• A ce stade, n'est-il pas nécessaire de tenir compte du fait que l'année diminue (chaque année est plus courte que la précédente de $5 \times 10^{-3}$ secondes) et que la durée du jour augmente (chaque jour est plus long que le précédent de $4{,}5 \times 10^{-8}$ secondes) ?

7) Ces deux variations agissent-elles dans le même sens ou ont-elles tendance à se compenser ?

Le résultat de ces deux variations va-t-il accentuer ou réduire le décalage dû à l'imperfection du calendrier grégorien ?

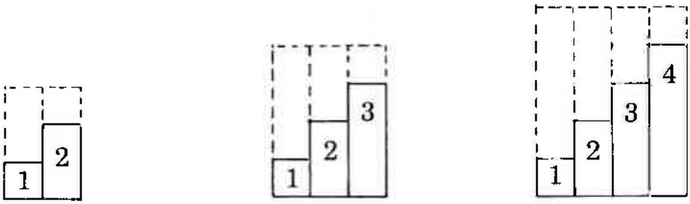
Chaque année étant plus courte que la précédente de 0,005 secondes et ces années étant mises bout à bout dans le calendrier, le décalage qui en résulte au bout de 10 000 ans n'est pas de 10 000 × 0,005.



Le décalage au bout de 10 000 ans est de :

$$0{,}005 + 2 \times 0{,}005 + 3 \times 0{,}005 + ..... + 9999 \times 0{,}005$$

Pour calculer (simplement) cette somme (après l'évidente mise en facteur), on peut recourir à une analogie avec le calcul de l'aire d'un rectangle (ou d'un triangle).




$$1 + 2 = \frac{3 \times 2}{2} \qquad 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2} \qquad ......$$

Ces nombres sont appelés nombres triangulaires.

8) En supposant en première approximation que le jour est constant et que seule l'année diminue, calculer le décalage qui en résulte en 10 000 ans.

9) En supposant cette fois que l'année est constante et que seul le jour s'allonge, calculer le décalage qui en résulte au bout de 10 000 ans, c'est-à-dire dans 3 652 422 jours.

COMPLEMENTS :

● Un problème : trouver le jour de la semaine correspondant à une date donnée. Voici par exemple un tableau extrait de l'almanach des PTT qui résout ce problème pour une période donnée :

## COMMENT TROUVER LE JOUR DE LA SEMAINE AUQUEL CORRESPOND UNE DATE DONNEE ?

### UTILISATION DU TABLEAU CI-DESSOUS, VALABLE POUR LA PERIODE DE 1880 A 1980

**EXPLICATION**

1° Repérer l'année dans les colonnes "Année".
2° Suivre horizontalement jusqu'au mois.
3° Ajouter le chiffre trouvé à l'intersection des colonnes "Année" et "Mois" à la date du jour recherché.
4° Le total de ces 2 chiffres donne le nombre auquel se reporter dans l'une des colonnes "Nombre" et qui correspond au jour de la semaine.

**APPLICATION**

*Question : Quel jour de la semaine tombe le 14 juillet 1970 ?*
1° Repérer 1970 dans les colonnes "Année".
2° Suivre horizontalement jusqu'à la colonne juillet.
3° Le chiffre 3 lu alors doit être ajouté à la date du jour de juillet (14) soit total = 17.
4° Dans les colonnes "Nombre" 17 correspond à un mardi.

| ANNEE | | | | MOIS JANV. | FEV. | MARS | AVRIL | MAI | JUIN | JUIL. | AOUT | SEPT. | OCT. | NOV. | DEC. | NOMBRE | | JOUR DE LA SEMAINE RECHERCHE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1885 | | 1925 | 1953 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 1 | | Dimanche |
| 1886 | | 1926 | 1954 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 2 | | Lundi |
| 1887 | | 1927 | 1955 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 3 | | Mardi |
| 1888 | | 1928 | 1956 | 0 | 3 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 4 | | Mercredi |
| 1889 | 1901 | 1929 | 1957 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 5 | | Jeudi |
| 1890 | 1902 | 1930 | 1958 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 6 | | Vendredi |
| 1891 | 1903 | 1931 | 1959 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 7 | | Samedi |
| 1892 | 1904 | 1932 | 1960 | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 8 | 29 | Dimanche |
| 1893 | 1905 | 1933 | 1961 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 9 | 30 | Lundi |
| 1894 | 1906 | 1934 | 1962 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 10 | 31 | Mardi |
| 1895 | 1907 | 1935 | 1963 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 11 | 32 | Mercredi |
| 1896 | 1908 | 1936 | 1964 | 3 | 6 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 12 | 33 | Jeudi |
| 1897 | 1909 | 1937 | 1965 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 13 | 34 | Vendredi |
| 1898 | 1910 | 1938 | 1966 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 14 | 35 | Samedi |
| 1899 | 1911 | 1939 | 1967 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 15 | 36 | Dimanche |
| | 1912 | 1940 | 1968 | 1 | 4 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 16 | 37 | Lundi |
| | 1913 | 1941 | 1969 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 17 | | Mardi |
| | 1914 | 1942 | 1970 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 18 | | Mercredi |
| | 1915 | 1943 | 1971 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 19 | | Jeudi |
| | 1916 | 1944 | 1972 | 6 | 2 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 20 | | Vendredi |
| 1900 | 1917 | 1945 | 1973 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 21 | | Samedi |
| | 1918 | 1946 | 1974 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 22 | | Dimanche |
| | 1919 | 1947 | 1975 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 23 | | Lundi |
| 1880 | 1920 | 1948 | 1976 | 4 | 0 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 24 | | Mardi |
| 1881 | 1921 | 1949 | 1977 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 25 | | Mercredi |
| 1882 | 1922 | 1950 | 1978 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 26 | | Jeudi |
| 1883 | 1923 | 1951 | 1979 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 27 | | Vendredi |
| 1884 | 1924 | 1952 | 1980 | 2 | 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 28 | | Samedi |

Sauriez-vous étendre ce tableau de manière à le rendre valable pour la période de 1850 à 2050 ?

Sauriez-vous concevoir un tableau semblable valable pour la période de 1500 à 1600 (fin du calendrier julien et début du calendrier grégorien) ?

● Voici une autre méthode : on numérote les jours de la manière suivante :

samedi = 0 ; dimanche = 1 ; ................ ; vendredi = 6 .

Le numéro du jour cherché est le reste dans la division par 7 du nombre :

$$p + 2q + \frac{3(q+1)}{5} + N + \frac{N}{4} - y$$

où : $N$ est le millésime de l'année

$p$ est le jour du mois

$q$ est le numéro du mois janvier = 13 } avec le millésime
février = 14 } de l'année précédente.

mars = 3 ; .... ; décembre = 12

$y = 0$ en julien

$y = N/100 - N/400 - 2$ en grégorien

Sauriez-vous interpréter la méthode qui a conduit à cette formule ? (Remarque : dans toutes les divisions on ne prend que le quotient entier).

Sauriez-vous concevoir vous-même une méthode permettant de résoudre rapidement le problème proposé ? *

Bibliographie :

Paul COUDERC . Le calendrier, "Que sais-je ?", PUF.

Encyclopedia Universalis : Calendrier.

Encyclopédie La Pléïade : Astronomie.

Abbé CHAUVE BERTRAND : La question du calendrier, Paris (1921).

Paul COUDERC : Histoire de l'Astronomie, PUF.

B. DECAUX : La mesure précise du temps, Masson (1959).

LETOUZÉ et ANÉ : Dictionnaire de Droit Canonique, article "calendrier".

LUCAS : Récréations mathématiques (tome 4).

---

* Voir un autre calendrier perpétuel page 3 de couverture.

# XI - GRAPHIQUES

Le langage graphique est employé couramment par les journalistes, les publicistes et la plupart de ceux qui ont d'une manière ou d'une autre (article, livre, rapport) à transmettre une information, pour peu qu'elle soit quantifiable. Ce langage fait partie de la vie quotidienne.

Comprendre ce langage, connaître ses possibilités et ses limites, en particulier se rendre compte de son pouvoir de suggestion et des manipulations auxquelles il peut se prêter, et dans une certaine mesure, le maîtriser sont devenus nécessaires à chacun pour appréhender la société dans laquelle il vit.

Les activités proposées ici ne constituent pas une étude systématique de ce langage. Elles ont pour but :

— d'en faire découvrir certains aspects : ce qu'il peut dire, ce qu'il ne peut pas dire, l'importance de certains choix (type de graphiques, échelles), etc....

— d'en donner une certaine maîtrise technique : lecture, construction de différents types de graphiques, passage de l'un à l'autre, problèmes d'unités, de "cadrage", d'"agrandissement" d'un graphique, etc.

— d'encourager chez les élèves une attitude d'analyse critique devant toutes les formes de ce langage.

Le dernier paragraphe est un paragraphe de géométrie qui justifie puis prolonge les propriétés du triangle équilatéral sous-jacentes aux graphiques triangulaires.

*

*   *

## I. PRODUCTION AUTOMOBILE SYLDAVE

En 1976 et 1977 la production automobile syldave a évolué de la manière suivante :

| | 1976 | 1977 |
|---|---|---|
| Janvier | 30 500 | 31 000 |
| Février | 31 000 | 32 000 |
| Mars | 28 500 | 29 000 |
| Avril | 28 200 | 28 000 |
| Mai | 27 000 | 27 000 |
| Juin | 28 900 | 29 000 |
| Juillet | 26 500 | 25 000 |
| Août | 26 500 | 25 000 |
| Septembre | 28 900 | 30 000 |
| Octobre | 27 400 | 29 000 |
| Novembre | 29 500 | 30 000 |
| Décembre | 29 000 | 31 000 |

1° Représenter graphiquement cette évolution pour l'année 1976 (1 cm pour 2 000 voitures).

a) Peut-on lire approximativement sur le graphique la production correspondant à la première quinzaine du mois de Juin ? Si oui, comment ?

b) Quel est l'écart maximum entre les différentes productions enregistré au cours de l'année ?

c) Quelle est la production mensuelle moyenne pour l'année 1976 ?

d) Comment peut-on faire apparaître sur le graphique les mois pour lesquels on a dépassé ou non atteint cette production moyenne ?

e) Les variations de production d'un mois à l'autre sont-elles très lisibles sur ce graphique ? Quelles améliorations proposez-vous ?

2° Pouvez-vous construire un graphique sur lequel, pour chaque mois, on pourrait lire la production totale correspondant aux mois déjà écoulés de l'année 1976 ?

a) Vers quelle époque de l'année la moitié de la production annuelle a-t-elle été atteinte ?

b) Reprendre la question 1° d)

3° Représenter graphiquement l'évolution de la production mensuelle pour les deux années 1976 et 1977 sur un même diagramme polaire.

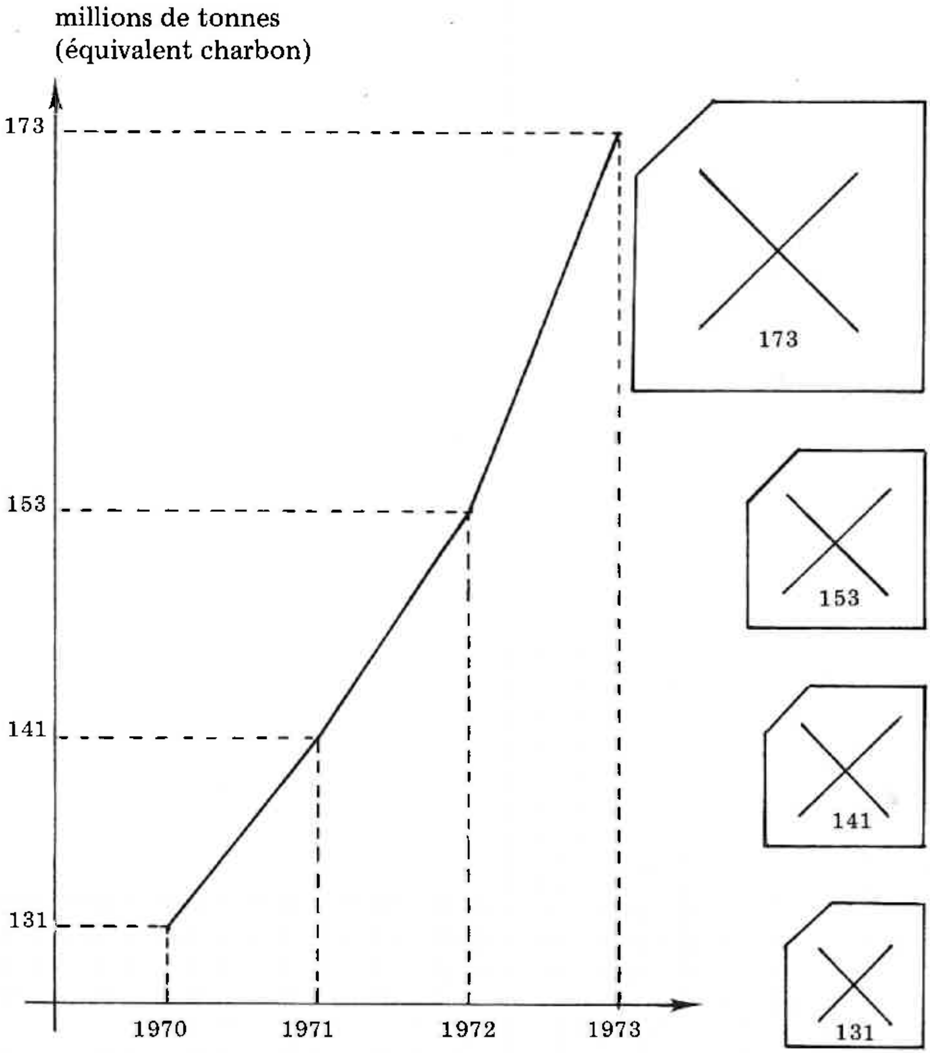
a) Comment matérialiser sur ce type de diagramme la production mensuelle moyenne ?

b) Quels sont les avantages de ce type de représentation ?

## II. 1°/ CONSOMMATION D'ENERGIE

La revue "SKRTZYTZ" a publié les deux représentations graphiques suivantes correspondant à l'évolution de la consommation énergétique syldave entre les années 1970 et 1973.

Vérifiez l'exactitude ou l'inexactitude de ces graphiques (les nombres indiqués sont exacts).



## 2°/ POUR QUE CA MONTE... DES ECHELLES !

A) Le tableau ci-dessous donne, pour 5 années, la part du budget de l'Education nationale par rapport à la production intérieure brute (Source : Le Courrier de l'Education).

| Année | % |
|---|---|
| 74 | 2,59 |
| 75 | 2,66 |
| 76 | 2,76 |
| 77 | 2,92 |
| 78 | 2,97 |

Représenter graphiquement cette évolution en choisissant successivement les échelles suivantes :

*Graphique 1* : en abscisse les années (2 cm pour 1 an)
en ordonnée de 0 à 3 % (2 cm pour 1 % )

*Graphique 2* : en abscisse 2 cm pour 1 an
en ordonnée de 0 à 3 % , 5 cm pour 1 %

*Graphique 3* : en abscisse 1,5 cm pour 1 an
en ordonnée de 2,5 à 3% , 20 cm pour 1 %

*Graphique 4* : en abscisse 1 cm pour 1 an
en ordonnée de 2,5 à 3 % , 40 cm pour 1 %

Lequel de ces quatre graphiques choisiriez-vous pour illustrer les observations suivantes :

*"Le budget 1978 représente environ 15,8 % du budget de l'Etat. Il représente aussi 2,97 % du produit intérieur brut (PIB). Ce pourcentage, qui permet de mesurer l'effort financier de l'Etat par rapport à la ressource économique de la nation, est en augmentation régulière sur les cinq budgets de cette législature. En cinq ans, la progression de ce rapport est de 15 % alors que l'augmentation globale du nombre d'élèves n'a été que de 3 %".*

(Source : Le Courrier de l'Education.)

B) Le tableau ci-dessous donne l'évolution du cours du DM pour une période de 6 mois.

| | |
|---|---|
| Janvier | 2,88 |
| Février | 2,90 |
| Mars | 2,94 |
| Avril | 2,98 |
| Mai | 2,99 |
| Juin | 3,05 |

Préparer à partir de ces résultats :

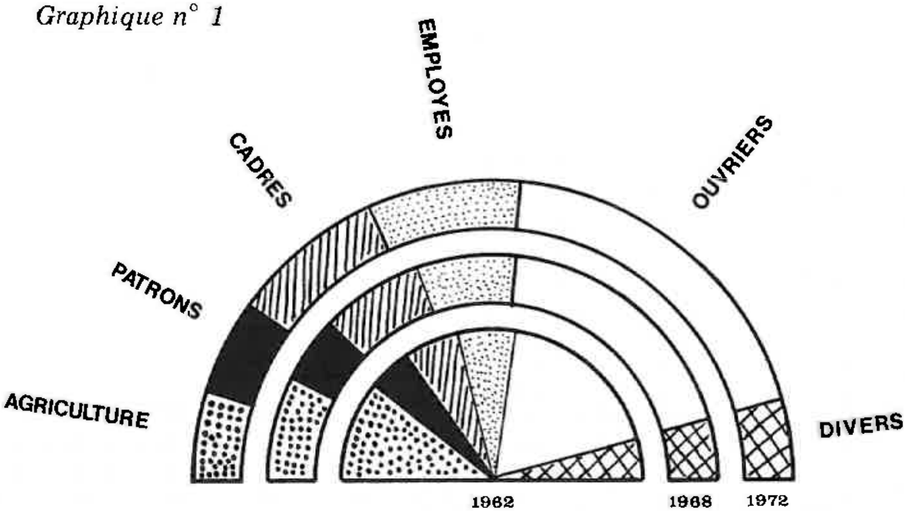
— un graphique destiné à illustrer un article de presse intitulé "Monnaie : Le Franc se maintient"

— un graphique destiné à illustrer un article intitulé : "Franc : la dégringolade".

N.B. : aucune ressemblance avec des articles réellement publiés ne serait fortuite !

## III. QUELQUES GRAPHIQUES AU HASARD DES LECTURES

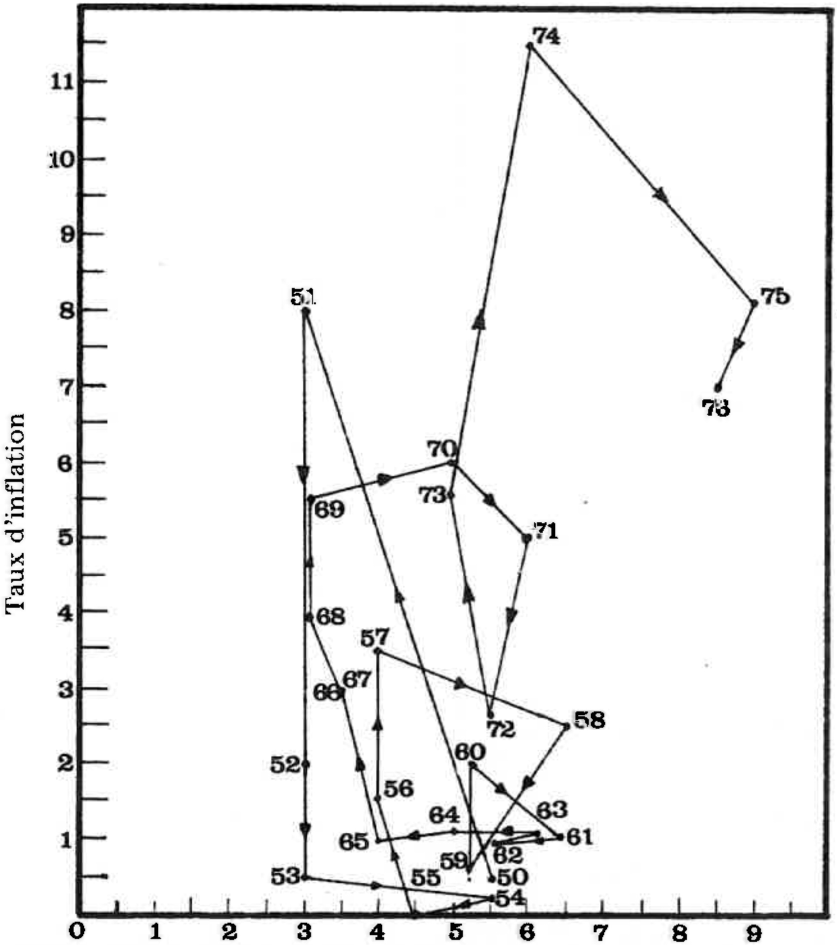
*Graphique n° 1*




Répartition de la population active en France.

*Graphique n° 2*

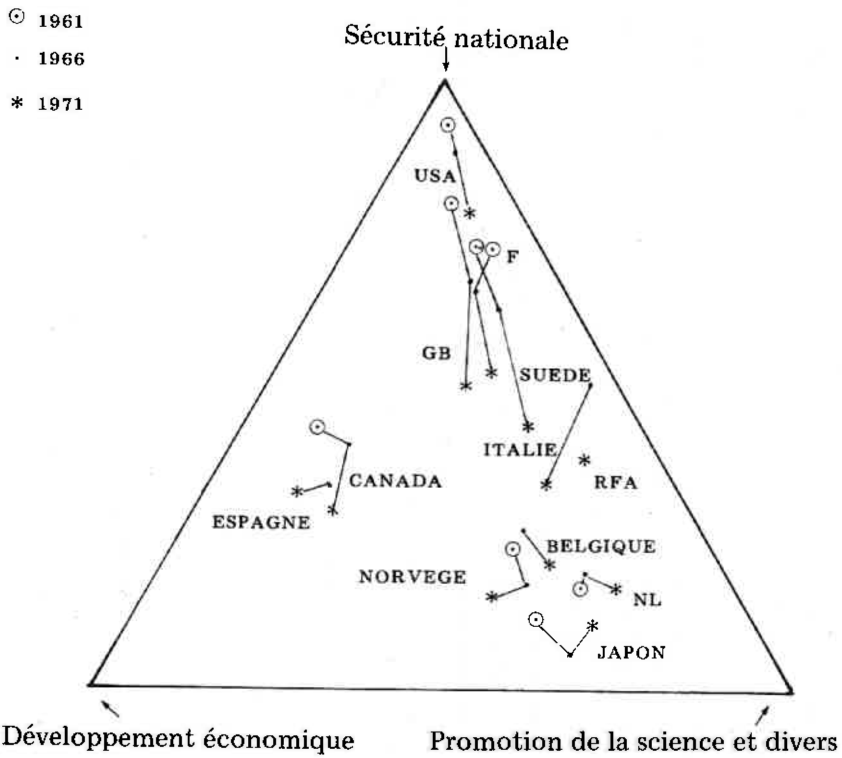
Taux de chômage




Inflation et chômage aux Etats-Unis. (Source : "Le Monde")

*Graphique n° 3*

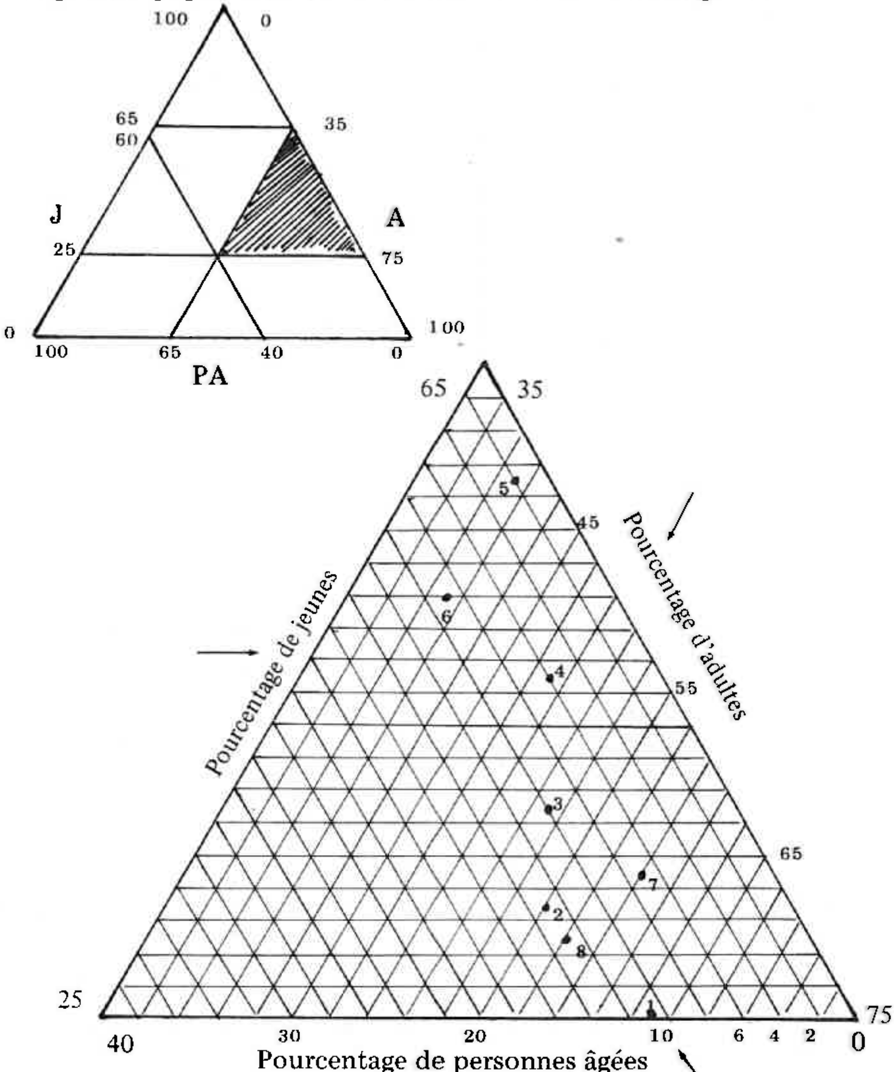
Répartition des crédits de recherche. (Source : "Le Monde")




"La distance entre le point et le côté opposé à un sommet est proportionnelle au pourcentage de recherche associé à la catégorie dont le nom figure sur le sommet".

*Graphique n° 4*

Age de la population. (Source : Atlas du “Reader’s Digest”)




Chaque pays se situe à l’intersection de trois lignes : pourcentage de jeunes (moins de 19 ans), pourcentage d’adultes (20 à 64 ans) et de personnes âgées (plus de 65 ans).

1 = Suisse ; 2 = France ; 3 = USA ; 4 = Cuba ; 5 = Vénézuela ; 6 = Mexique ; 7 = Israël ; 8 = RFA.

*A propos du graphique n° 1*

Compléter le tableau ci-dessous qui donne en pourcentage la répartition de la population active française à trois époques différentes :

| | 1962 | 1968 | 1972 |
|---|---|---|---|
| Agriculteurs | | | |
| Patrons | | | |
| Cadres | | | |
| Ouvriers | | | |
| Employés | | | |
| Divers | | | |

*A propos du graphique n° 2 :*

Représenter graphiquement l'évolution du taux d'inflation annuel aux USA de 1950 à 1976.

Représenter sur un autre graphique l'évolution du taux de chômage aux USA de 1950 à 1976.

Lequel des graphiques dont vous disposez à présent permet d'illustrer ou de réfuter les affirmations suivantes :

"assurer le plein emploi accélère l'inflation"
"plus il y a de chômage, plus l'inflation est galopante"
"le taux d'inflation est croissant depuis quelques années".

*A propos du graphique n° 3 :*

A. Interprétation

- Questions possibles :
- — Calculer pour le Canada, la France et un pays de votre choix les différents pourcentages de crédits attribués à la Sécurité Nationale, au développement économique et à la Promotion de la Science et divers, en 1961, 1966, 1971.

• Pour faciliter la réponse à cette question qui s'avère difficile, on peut

1) proposer l'activité "Trafic de marchandises" ci-après.

2) poser d'autres questions sur le graphique n° 3, par exemple :

— où se situerait un point représentant un pays ne consacrant aucun crédit au développement économique ? à la sécurité nationale ? consacrant tous ses crédits à la promotion de la Science ?

— où se situerait un point représentant un pays consacrant
. pour moitié ses crédits de Recherche à la Sécurité Nationale et pour moitié ses crédits de Recherche au Développement économique ?
. autant de crédits à la Sécurité Nationale qu'au Développement économique ? (y en a-t-il ? )
. autant de crédits à chacune des trois catégories de Recherche ? (y en a-t-il ? )

— y a-t-il des pays qui ont changé de priorité dans l'attribution de leurs crédits de recherche ? qui ont changé l'ordre d'importance des trois catégories de recherche ?

## B. Construction

Représenter à l'aide d'un graphique analogue au graphique n° 3 l'évolution de la répartition de la population active française donnée par le tableau ci-dessous :

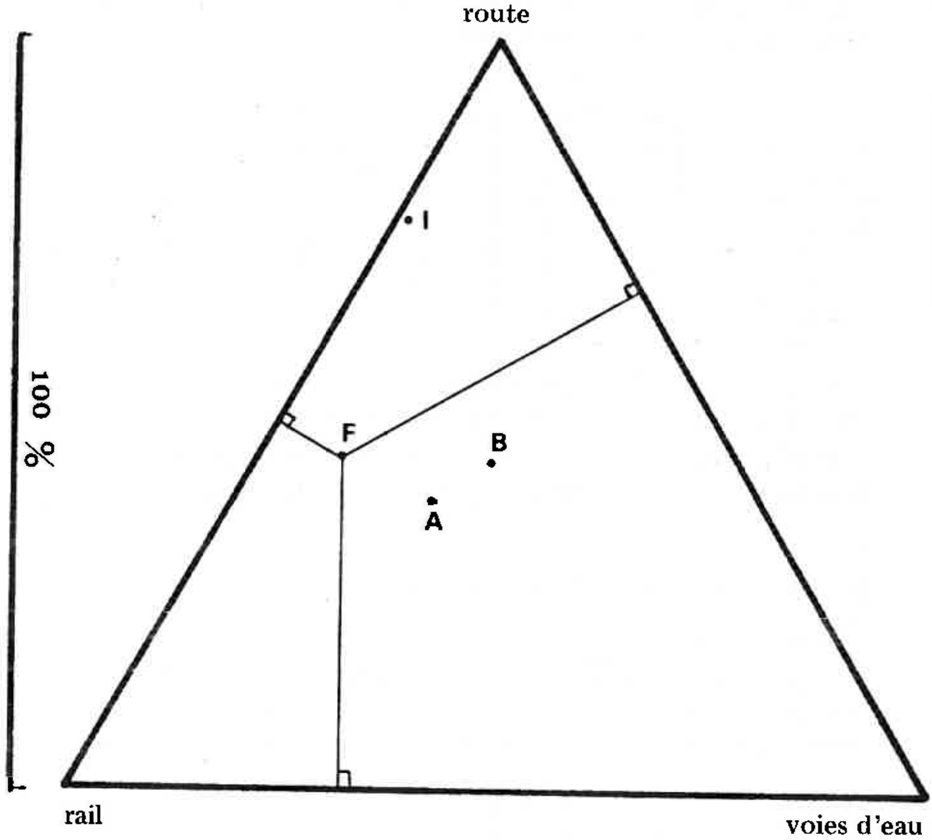
| effectifs en milliers | 1906 | 1921 | 1954 | 1958 |
|---|---|---|---|---|
| agriculture | 8845 | 9014 | 5196 | 3007 |
| industrie | 5936 | 6110 | 6736 | 7761 |
| services | 5701 | 6059 | 7092 | 9234 |

## C. Trafic de marchandises

Le graphique triangulaire ci-dessous indique la répartition du trafic intérieur de marchandises selon le mode de transport dans quatre pays (la France (F), l'Allemagne (A), l'Italie (I), la Belgique (B)).

Compléter le tableau en lisant les résultats sur le graphique.

Placer dans le graphique le point NL correspondant aux Pays-Bas.




| % | F | I | A | B | NL |
|---|---|---|---|---|---|
| Route | 45 | | | | 55 |
| Rail | 45 | | | | 8 |
| Voies d'eau | 10 | | | | 37 |

*A propos du graphique n° 4 :*

• Déterminer les pourcentages de personnes âgées, d'adultes et de jeunes des populations des huit pays représentés.

• Placer sur ce graphique les pays dont le tableau ci-dessous indique la répartition de population :

| | Personnes âgées | Adultes | Jeunes |
|---|---|---|---|
| Algérie | 5 | 39 | 56 |
| Brésil | 10 | 52 | 38 |
| URSS | 13 | 50 | 37 |
| Suède | 14 | 58 | 28 |

• Représenter la répartition de population des pays mentionnés sur le graphique 4 à l'aide d'un graphique de type 3.

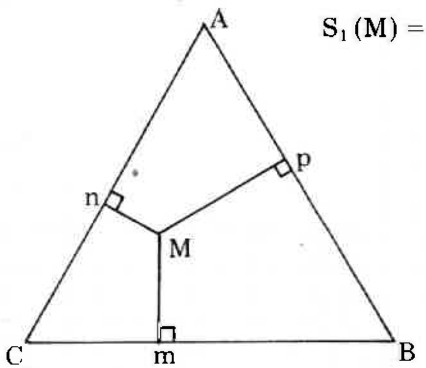
• Représenter la répartition des crédits de recherche des pays mentionnés sur le graphique 3 à l'aide d'un graphique de type 4.

## IV. Quelques propriétés du triangle équilatéral

(A) Soit ABC un triangle équilatéral.

Montrer qu'aucune des trois sommes $S_1(M)$, $S_2(M)$, $S_3(M)$ définies ci-dessous ne dépend de la position du point M intérieur au triangle ABC (on pourra procéder dans l'ordre que l'on voudra).

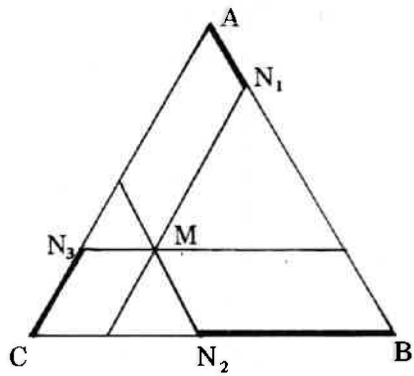
(1)




$S_1(M) = d(M,m) + d(M,n) + d(M,p)$

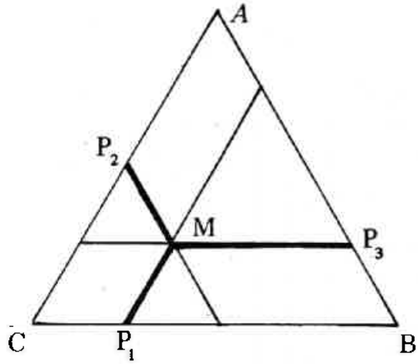
② 

$$S_2(M) = d(A,N_1) + d(B,N_2) + d(C,N_3)$$




③ 

$$S_3(M) = d(M,P_1) + d(M,P_2) + d(M,P_3)$$




N.B. On trouvera des applications de ② dans "Mathématiques buissonnières" d'André Délédicq aux Éditions CEDIC, p. 216 à 221.

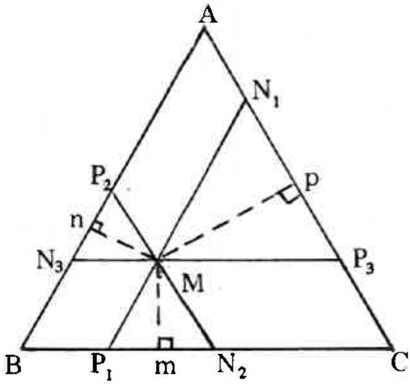
(B) Soit ABC un triangle équilatéral et M un point intérieur à ce triangle. Montrer que M est barycentre

— de : (A ; d(M,m)), (B ; d(M,n)), (C ; d(M,p))

— de : (A ; $d(C,N_3)$), (B ; $d(A,N_1)$), (C ; $d(B,N_2)$)

— de : (A ; $d(M,P_1)$), (B ; $d(M,P_2)$), (C ; $d(M,P_3)$)

(On pourra procéder dans l'ordre que l'on voudra).




N.B. : On trouvera des applications dans "Le Livre du problème" de l'IREM de Strasbourg aux Editions CEDIC p. 64-65.

(C) A la règle et au compas sur papier "blanc", puis avec un double-décimètre sur un papier quadrillé,

1. construire un triangle équilatéral connaissant la longueur de l'un, donc de chacun, de ses côtés
2. construire un triangle équilatéral connaissant la longueur de l'une, donc de chacune, de ses hauteurs
3. partager un angle droit en trois angles de même mesure (sans utiliser de rapporteur !...).

# XII - FONCTIONS AFFINES

La résolution, par le calcul, de certains problèmes (notamment en cinématique) représente une difficulté sans commune mesure avec le tracé d'une droite. L'efficacité et l'élégance d'une méthode graphique devraient être mises en évidence par les activités qui suivent.

*

*     *

## LA NAVETTE

A    1) La SNCF projette de mettre en place une navette Strasbourg—Wissembourg. Le premier départ de Strasbourg aurait lieu à 6 h 30 et le premier voyage aller se déroulerait selon l'horaire suivant :

| Km | Gare | Heures d'arrivée et de départ |
|---|---|---|
| 0 | Strasbourg | 6 h 30 |
| 25 | Bischwiller | A 6 h 45<br>D 6 h 50 |
| 33 | Hagueneau | A 7 h 00<br>D 7 h 05 |
| 49 | Soulz | A 7 h 21<br>D 7 h 25 |
| 64 | Wissembourg | A 7 h 35<br>D 7 h 50 |

La vitesse entre deux gares étant supposée constante, calculer en km/h la vitesse du train sur chaque tronçon.

2) La navette repart à 7 h 50 de Wissembourg vers Strasbourg. La vitesse sur chaque tronçon est la même qu'à l'aller et les arrêts dans les gares sont de même durée. De retour à Strasbourg, elle repart vers Wissembourg après un arrêt de 15 minutes et ainsi de

suite jusqu'à 11 h 35. Représenter graphiquement la marche du train entre 6 h 30 et 11 h 35 en portant les heures en abscisse (1 cm = 20 min) et l'éloignement de Strasbourg en ordonnée (1 cm = 4 km).

3) Déterminer graphiquement les heures et les lieux des rencontres entre la navette et un train de marchandises qui, parti de Strasbourg à 6 h 00, arrivera à Wissembourg à 8 h 00 en circulant à vitesse constante et sans arrêt.

B 1) Des études statistiques ont permis d'établir les tableaux suivants qui donnent le nombre de passagers qui descendent à une gare donnée suivant la gare à laquelle ils sont montés :

| Nombre de passagers montés à → <br> qui descendent à : ↓ | Str. | Bis. | H. | So. | | Wis. | So. | H | Bis. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bis. | 10 | 0 | 0 | 0 | So. | 5 | 0 | 0 | 0 |
| H. | 30 | 20 | 0 | 0 | H. | 15 | 10 | 0 | 0 |
| So. | 20 | 10 | 5 | 0 | Bis. | 10 | 10 | 10 | 0 |
| Wis. | 20 | 10 | 10 | 5 | Str. | 35 | 10 | 20 | 15 |

Calculer à l'aller et au retour le nombre de personnes qui montent et qui descendent dans chacune des gares.

2) Le tarif appliqué sur la navette est le suivant : 5,75 F de prise en charge et 37 centimes par km. Quels sont les prix de tous les billets possibles (présenter les résultats sous forme de tableau) ?

3) Calculer la recette totale résultant des voyages de la navette entre 6 h 30 et 11 h 35.

4) Sachant que le bénéfice correspond à 20 % de ces recettes et que la navette fonctionnerait 300 jours par an, calculer le bénéfice annuel total.

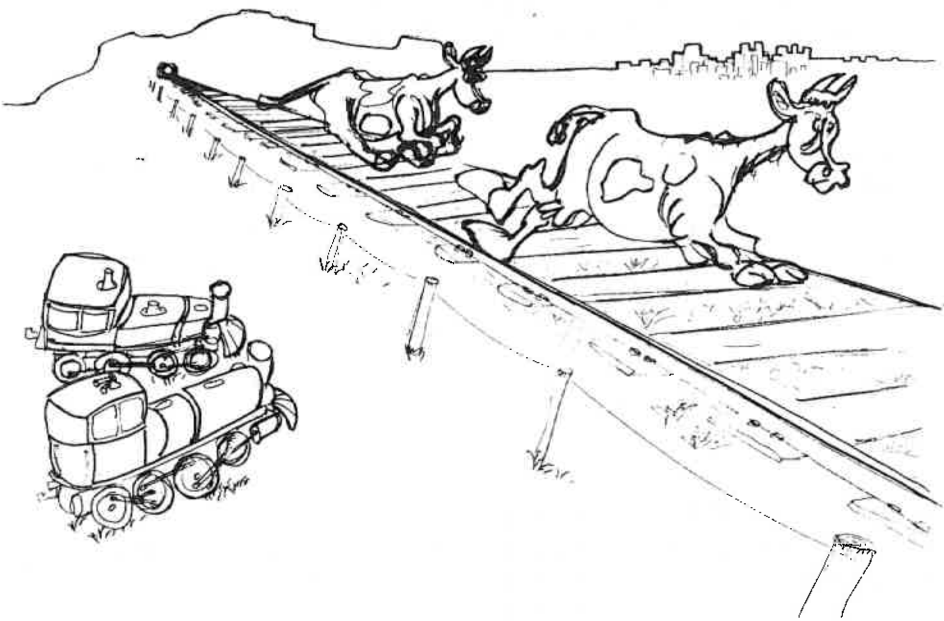
C 1) La mise en place de la navette décrite ci-dessus nécessiterait des travaux de réfection des voies estimés à 5 000 F par km. Calculer le coût de ces travaux.

2) Les dépenses engagées pour la réfection des voies seraient-elles amorties en 1 an ?

3) Si la navette n'allait que jusqu'à Haguenau (les voyageurs qui descendaient ou montaient à Soulz ou Wissembourg ne la prendraient donc plus), quelle serait la recette résultant de 4 aller-retour ?

L'amortissement serait-il dans ce cas plus rapide ?

4) Etablir l'horaire des quatre aller-retour dans ce cas et représenter graphiquement la marche du train pendant cette période.



## QUI VA LE PLUS VITE ?

*La voiture :*

Il faut de 5 à 15 minutes pour régler les préparatifs de départ et les problèmes de parking à l'arrivée.

Par la suite, la vitesse moyenne est comprise entre 55 et 75 km/h sur route et entre 100 et 120 km/h sur autoroute.

*Les trains :*

Il faut de 30 min à 1 heure pour aller à la gare et en revenir.

Par la suite, la vitesse moyenne d'un train rapide est comprise entre 100 et 140 km/h, celle d'un autre train entre 80 et 100 km/h.

*L'avion :*

Il faut de une à deux heures pour aller à l'aéroport et en revenir.

Entre temps, la vitesse moyenne de l'avion est comprise entre 500 et 800 km/h.

Pour un moyen de transport donné, le temps mis pour parcourir une distance $d$ est une fonction affine de $d$ :

$$t(d) = \frac{d}{v} + t_0$$

$v$ est la vitesse moyenne du moyen de transport en question ; $t_0$ est le temps de "mise en oeuvre".

La représentation graphique de $t$ est donc une droite. Dans quelle région du plan se trouve la droite décrivant le mouvement :

— d'une voiture sur route ?
— d'une voiture sur autoroute ?
— d'un train rapide ?
— d'un autre train ?
— d'un avion ?

Quel est, suivant la distance $d$ à parcourir, le moyen de transport le plus rapide ?

N.B. : pour le graphique, on se limitera à un voyage "à l'échelle de la France".

$$(0 < d \leqslant 1\,000 \text{ km})$$

## DIESEL OU ESSENCE ?

Monsieur Otto Maubile désire changer de voiture. Après mûre réflexion, il n'hésite plus qu'entre deux modèles :

— la Citroën CX 20 TRE mue par un moteur à essence (super)

— la Citroën CX 25 Diesel mue par un moteur diesel fonctionnant au gas-oil.

Il a entrepris de se documenter très en détail. Voici les renseignements dont il dispose :

* Prix d'achat des véhicules :
CX 20 TRE : 84 600 F ; CX 25 Diesel : 88 300 F

* Prix des carburants :
Super : 4,96 F le litre ; gas-oil : 3,71 F le litre.

* Consommations :
CX 20 TRE : 10,75 l pour 100 km ; CX 25 Diesel : 8 l pour 100 km.

* Assurance : 7 600 F par an pour l'un ou l'autre modèle.

* Vignette : 900 F par an pour l'un ou l'autre modèle.

* Entretien : (frais par km).

| | Vidanges, graissages | Pneus |
|---|---|---|
| CX 20 TRE | 0,0276 | 0,0607 |
| CX 25 Diesel | 0,0392 | 0,0474 |

* Réparations : (frais par km)

| | 1ère année | 2ème année | 3ème et 4ème | 5ème année |
|---|---|---|---|---|
| CX 20 TRE | 0,1361 | 0,1780 | 0,2095 | 0,2723 |
| CX 25 Diesel | 0,1668 | 0,2181 | 0,2567 | 0,3337 |

* Pertes à la revente : (en pourcentage par rapport au prix d'achat)

| au bout de | 1 an | 2 ans | 3 ans | 4 ans | 5 ans |
|---|---|---|---|---|---|
| CX 20 TRE | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
| CX 25 Diesel | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |

1) Si on tient compte uniquement de la différence du prix d'achat et du prix des carburants, à partir de quel kilométrage la version Diesel est-elle plus avantageuse que la version essence ?

2) Si Monsieur Maubile garde la voiture 1 an et si $x$ est la distance parcourue durant cette année, exprimer en fonction de $x$ la dépense totale $f_1(x)$ pour le modèle essence et la dépense totale $g_1(x)$ pour le modèle diesel (dépense totale = carburant + vignette + assurance + entretien + réparations + perte de valeur du véhicule).
Représenter dans un même repère les fonctions $f_1$ et $g_1$. Conclusion ?

3) Si Monsieur Maubile garde la voiture 2 ans et si $x$ représente la distance parcourue durant les deux années ($x/2$ la première année et $x/2$ la seconde), calculer en fonction de $x$ les dépenses totales $f_2(x)$ et $g_2(x)$ correspondant aux deux modèles. Représenter graphiquement et conclure.

4) Etudier de même les cas où M. Maubile garde la voiture 3, 4, 5 ans.

5) Si M. Maubile parcourt annuellement 20 000 km, combien de temps doit-il garder l'un ou l'autre modèle pour que son prix de revient kilométrique soit minimal ?

## TARIFS DE GAZ

Voici l'extrait d'un tarif de gaz :

| Tarifs | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Kilowattheures gratuits | 0 | 0 | 0 | 15000/an |
| Abonnement mensuel | 0 | 21,44 F | 61,04 F | 263,12 F |
| Prix du kilowattheure | de 0 à 2 400 kwh :0,468 F<br>de 2 401 à 3 600 kwh : 0,42 F<br>au-dessus de 3 600 kwh : 0,34 F | 0,348 F | 0,18 F | 0,152 F |

1. Déterminer pour chacun des tarifs proposés la dépense correspondant aux consommations annuelles suivantes :

1750 kwh, 3220 kwh, 14 527 kwh, 20 000 kwh.

Consigner les résultats dans un tableau à double entrée (tarif, consommation) et encadrer, pour chacune de ces consommations, la dépense minimum.

2. Pour chacun des tarifs proposés, la dépense annuelle est une fonction du nombre $x$ de kilowattheures consommés durant toute l'année. Déterminer et représenter sur un même graphique ces quatre fonctions (correspondant chacune à l'un des tarifs). On fera varier $x$ de 0 à 20 000.

3. A l'aide de ce graphique, comparer les différents tarifs : on indiquera pour cela le tarif le plus avantageux suivant le nombre $x$ de kilowattheures consommés dans l'année.

# XIII - LES IMPOTS

Cette activité est constituée de deux fiches. La première fiche expose la technique du calcul de l'impôt sur le revenu et met en évidence le caractère continu (sans le dire explicitement) et affine par intervalles de l'impôt.

Il y est fait largement appel au calcul numérique. (En particulier : calcul de pourcentages)

— La seconde fiche apporte des réponses à des questions plus fines relatives au calcul de l'impôt. L'utilisation et la construction de graphiques est très largement mise à contribution (directe ou indirecte).

— Ces fiches pourront être proposées après l'étude des fonctions affines ; aucune autre connaissance préalable n'est nécessaire. (Sauf à la fin de la fiche 1 où il est fait usage d'une fonction homographique $x \mapsto \frac{a}{x} + b$).

— Les diverses inégalités utilisées dans la fiche n° 2 résultent de la convexité des fonctions étudiées ; le graphique suggère alors les résultats et sert de guide sur la façon de mener à bien le calcul.

L'organigramme figurant dans cette fiche simplifie l'organisation globale du calcul.

*

* *

## IMPOTS

### (Fiche 1)

**1. Calcul de l'impôt en Astérixie orientale :**

Pour déterminer l'impôt sur le revenu que devra acquitter une famille, il faut connaître :

— le nombre d'adultes de la famille ($a$)
— le nombre d'enfants de la famille ($b$)
— le total des revenus de la famille ($z$)

1° *Revenu imposable net :*

On calcule le revenu imposable net $y$ à partir de $z$ en déduisant successivement :

10 % de $z$ (frais professionnels)
20 % du résultat (abattement)

2° *Revenu par part :*

On divise le revenu imposable net par le nombre de parts qui est égal à $n = a + \frac{b}{2}$ ; on obtient le revenu par part $x$ .

3° *Calcul de l'impôt pour une part :*

On calcule l'impôt pour une part $i(x)$ en utilisant le barème ci-dessous :

| Tranches | Taux |
|---|---|
| Moins de 20 000 sesterces | 0 % |
| de 20 000 à 50 000 sesterces | 20 % |
| de 50 000 à 100 000 sesterces | 40 % |
| plus de 100 000 sesterces | 60 % |

*Exemples :*

- si $x = 16000$ *s*, $i(x) = 0$
- si $x = 24000$ *s*, $i(x) = 0\ (20\,000) + 0{,}2\ (24\,000 - 20\,000) = 800$ *s*.

  Dans ce cas, le contribuable paie 20 % sur la fraction de revenu qui dépasse 20 000 *s*.
- si $x = 55\,000$ *s*, $i(x) = 0 \times 20\,000 + 0{,}2 \times (50\,000 - 20\,000) + 0{,}4\ (55\,000 - 50\,000)$

  $i(x) = 8\,000$ *s*.

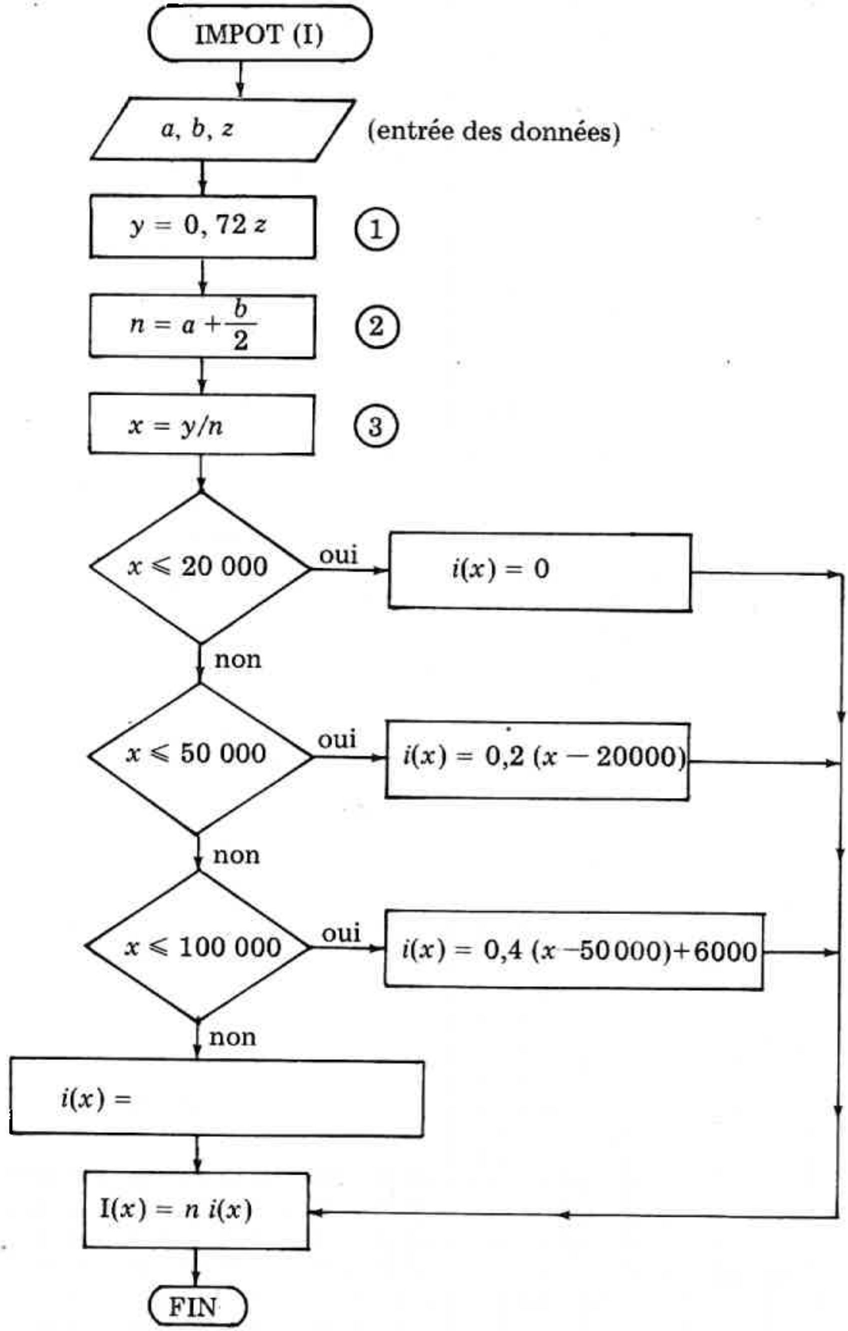
4° *Calcul de l'impôt :*

On obtient l'impôt $I$ dû par la famille en multipliant l'impôt par part $i$ par le nombre de parts $n$ .

On peut décrire les opérations permettant de calculer $I$ par un schéma appelé organigramme.

— Justifier les instructions données dans les cases 1, 2, 3.

— Compléter l'organigramme proposé sur la page suivante.


IMPOT (I)
a, b, z
(entrée des données)
y = 0, 72 z
1
n = a + b/2
2
x = y/n
3
x ⩽ 20 000
oui
i(x) = 0
non
x ⩽ 50 000
oui
i(x) = 0,2 (x − 20000)
non
x ⩽ 100 000
oui
i(x) = 0,4 (x − 50 000)+6000
non
i(x) =
I(x) = n i(x)
FIN

*Questions :*

1 - Déterminer l'impôt que devra payer une famille constituée de

$$\left.\begin{array}{l}\text{2 adultes}\\ \text{et}\\ \text{2 enfants}\end{array}\right\}\quad \text{pour un total de revenus de } 60\,000\ s.$$

— Même question si la famille comprend 3 enfants.

2 - Dufrix et Avarix sont célibataires.
Dufrix a un revenu imposable de 49 980 $s$ et Avarix a un revenu imposable de 50 010 $s$.
Ce dernier crie au scandale : pour 30 sesterces de revenu supplémentaire, il tombe, dit-il, dans une autre tranche et paie plus d'impôts que Dufrix. Pouvez-vous ramener son indignation à de plus justes proportions ?

3 - On appelle taux de pression fiscale la quantité exprimée en pourcents :

$$t(x) = \frac{100 \times i(x)}{x}$$

(i) Calculer les taux de pression fiscale correspondant à l'extrémité de chaque tranche.

(ii) Déterminer l'expression de $t(x)$ pour chaque tranche de revenu.

(iii) Représenter graphiquement $t$ pour $x \in [0,200\,000]$.

*

* *

## IMPOTS
## (Fiche 2)

En Astérixie occidentale, chaque contribuable paie en impôts 12 % de son revenu imposable.

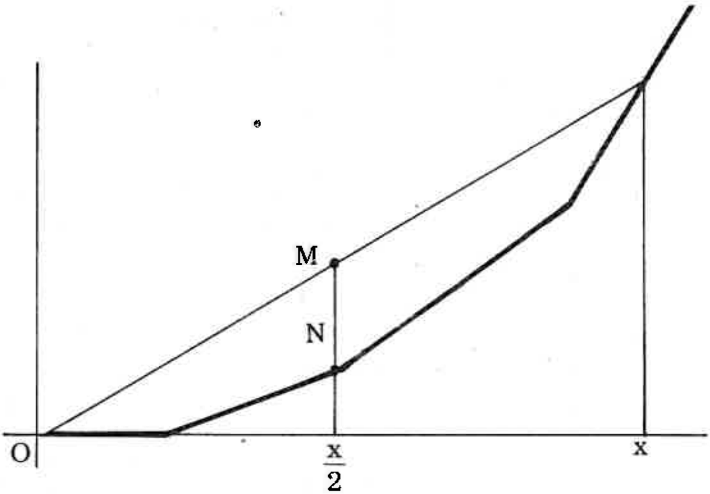
Obélix a un revenu imposable $x$ et une part.

Soient $I(x)$ et $J(x)$ les montants respectifs des impôts qu'il paierait en Astérixie occidentale et orientale.

1° Exprimer $I(x)$ et $J(x)$ à l'aide de $x$.
Tracer les représentations graphiques des fonctions $I$ et $J$.

2° Exprimer, à l'aide de $x$ et des fonctions $I$ et $J$, l'impôt que paierait Obélix dans chaque pays, s'il avait deux parts.
Comparer dans chaque pays ce qu'il paierait avec une part et avec deux parts.

Représentation graphique de $J$



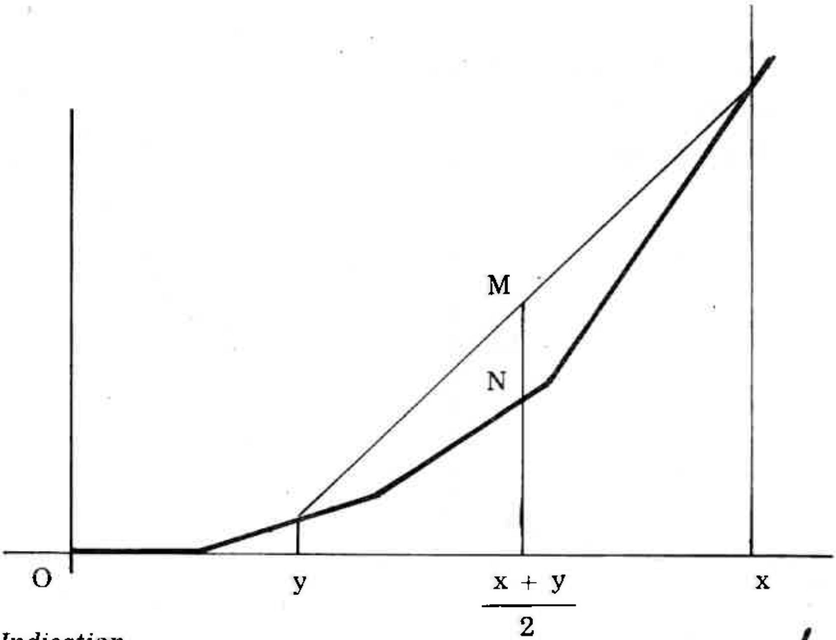

*Indication*

Calculer à l'aide de $x$ et de $J$ les ordonnées de M et de N.

3° Obélix et Boutfiltre ont comme revenus imposables respectifs $x$ et $y$. Ils sont célibataires et ont chacun une part.

Exprimer à l'aide de $x$, $y$ et de $I$, $J$ la somme de leurs impôts dans chaque pays.

Exprimer à l'aide de $x$,$y$ et de $I$, $J$ les impôts qu'ils paieraient dans chaque pays, s'ils étaient mariés. Ont-ils intérêt à se marier ?



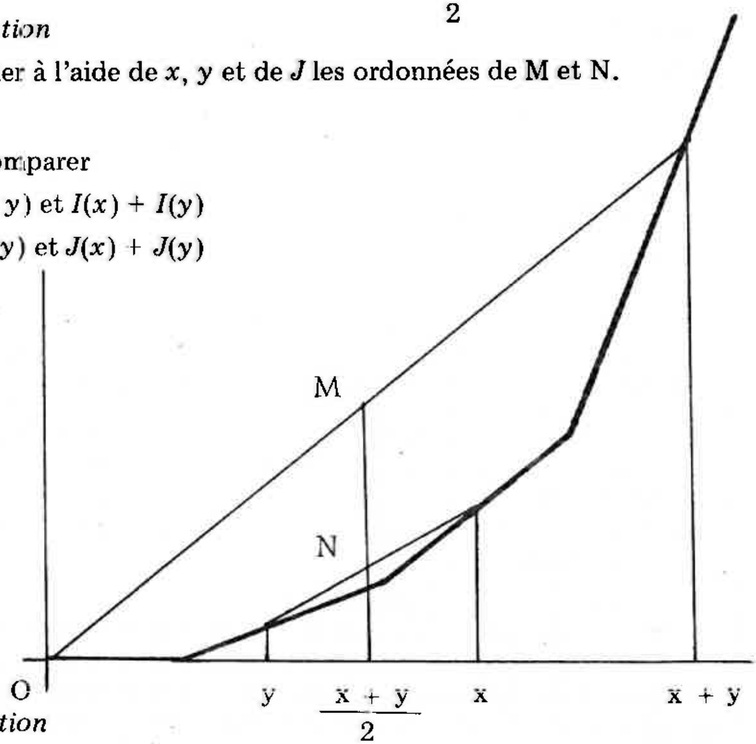

*Indication*

Calculer à l'aide de $x$, $y$ et de $J$ les ordonnées de M et N.

4° Comparer

$I(x + y)$ et $I(x) + I(y)$

$J(x + y)$ et $J(x) + J(y)$



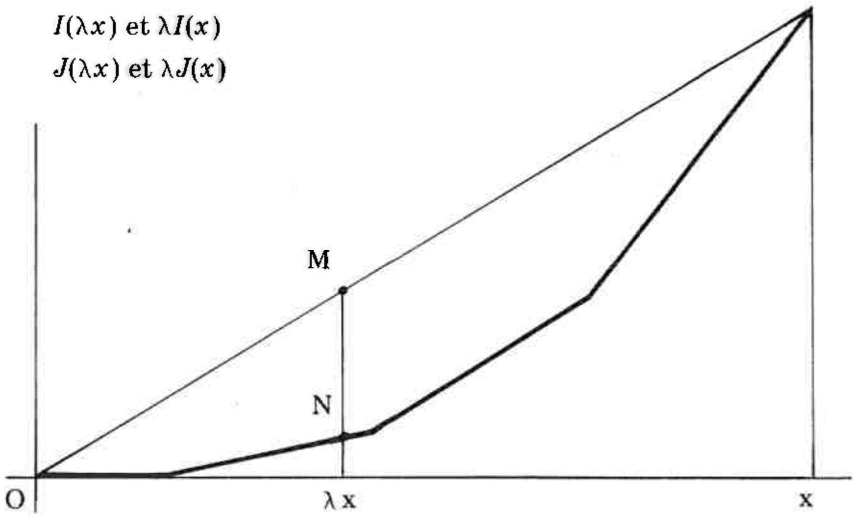

*Indication*

Calculer à l'aide de $x$, $y$ et de $J$ les ordonnées des points M et N.

5° $\lambda$ étant un nombre réel positif, comparer

$I(\lambda x)$ et $\lambda I(x)$

$J(\lambda x)$ et $\lambda J(x)$




*Indication*

Cas où $\lambda \in [0, 1]$

Calculer à l'aide de $x$, $\lambda$ et de $J$ les ordonnées de M et de N.

6° Comparer dans chaque pays l'impôt que paierait Obélix avec deux parts et avec trois parts.

*Indication* : Utiliser la question 5°.

7° Dans les deux pays, en cas de mariage au 31 décembre les conjoints déclarent séparément leurs revenus et ont droit tous deux à deux parts (pour l'année du mariage).

Exprimer à l'aide de $x$, $y$ et de $I$, $J$ ce qu'Obélix et Boutfiltre paieraient en impôts dans chaque pays, s'ils se mariaient le 31 décembre.
Comparer ce qu'ils paieraient s'ils étaient mariés depuis le début de l'année.

*Indication* : Utiliser la question 6°.

8° Dans les deux pays, en cas de mariage pendant l'année le mari déclare son revenu annuel et celui de sa femme après la date du mariage, et la femme déclare son revenu jusqu'à la date de son mariage. Les deux conjoints ont chacun droit à deux parts.

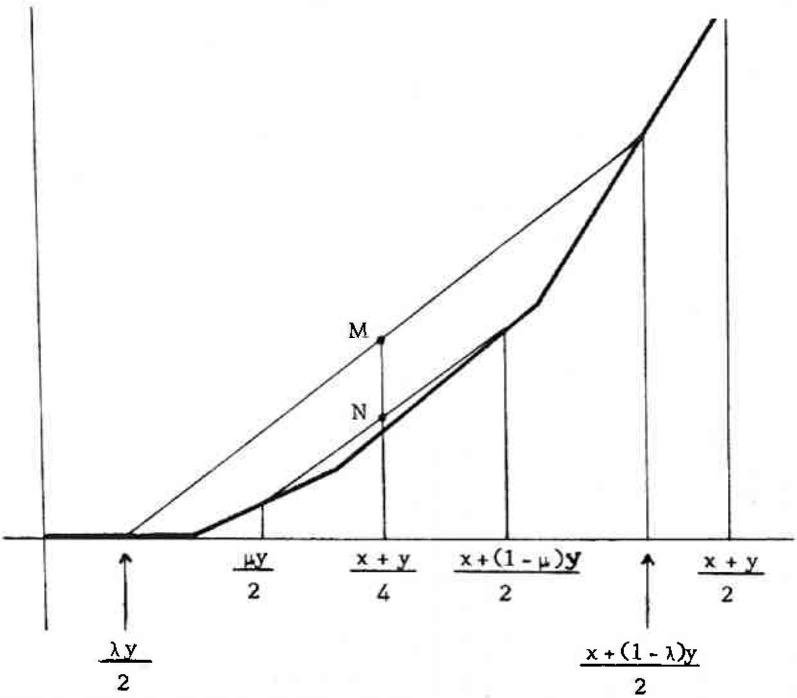
Supposons qu'Obélix et Boutfiltre se marient à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois de l'année et qu'ils aient bénéficié d'un revenu régulier au cours des douze mois de l'année.

Exprimer à l'aide de $x$, $y$, de $I$, $J$, de $\lambda = \frac{n}{12}$, ce qu'ils paieraient en impôts dans chaque pays.

Comparer à ce qu'ils paieraient s'ils se mariaient à la fin du $m^{\text{ième}}$ mois, où $m > n$.

*Indication :* Soit $\lambda = \frac{n}{12}$ , $\mu = \frac{m}{12}$

Exprimer les ordonnées de M et N à l'aide de $x$, $y$, $\lambda$, $\mu$ et de $I$ et $J$.



# XIV - TRAVAUX D'APPROCHE

Les suites ont pris une place importante dans les nouveaux programmes : une approche en classe de seconde de cette notion difficile, l'acquisition du cours de la classe de première.

Cette fiche expose deux méthodes de calcul de valeurs approchées de racines carrées. Les deux processus sont itératifs et l'on construit naturellement, dans chacun des cas, une suite de valeurs approchées.

L'étude du texte d'Euler nécessite un peu d'attention, mais ne présente pas de grandes difficultés. A l'ère de la calculatrice, certains trouveront cette activité désuète et sans intérêt ; d'autres, au contraire, seront plus qu'étonnés de la performance de la méthode. Une bonne compréhension du processus permet une généralisation au calcul approché d'autres racines carrées et à celui de racines cubiques.

C'est à la même suite que conduit la méthode des Babyloniens, quoique l'idée de départ ait un support géométrique très concret. Ici ce n'est plus l'idée de termes négligeables qui est sous-jacente, mais celle de moyennes pondérées et de suites adjacentes.

On vérifie sur des exemples la fiabilité des méthodes proposées. Pas plus qu'Euler, on ne démontre la validité de ces processus. La justification de la phrase : « Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connaîtra déjà plus exactement la racine 4 + p ; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur plus exacte », nécessite une démonstration qu'il est hors de question de proposer à des élèves de seconde.

## TEXTE D'EULER

Voici un extrait d'un texte d'Euler de 1748 : « Introduction à l'analyse des infiniment petits ». Chapitre XVI. Euler se penche ici sur le problème de la résolution des équations par des approximations. A partir d'une valeur approchée devinée d'une solution d'une équation, il cherche, par le calcul, une meilleure valeur approchée de cette solution. Il réitère son procédé jusqu'à l'obtention d'une valeur approchée satisfaisante.

## 785.

Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine (*) ; qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, & qu'elle est plus petite que 5. Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur $= 4 + p$, on est sûr que $p$ exprime une fraction. Or si $p$ est une fraction, & par conséquent moindre que l'unité, le quarré de $p$, son cube, & en général toutes les puissances plus hautes de $p$, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction $p$, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4 + p$ ; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitoit.

(*) Cette méthode est celle que *Newton* a donnée au commencement de sa *méthode des fluxions*. En l'approfondissant on la trouve sujette à différentes imperfections ; c'est pourquoi on y substituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 et 1768.

## 786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$.

On voit ici que $x$ est plus grand que 4 & plus petit que 5 ; en conséquence de cela on fera $x = 4 + p$, & on aura $xx = 16 + 8p + pp = 20$ ; mais comme $pp$ est très-petit, on négligera ce terme pour avoir seulement l'équation $16 + 8p = 20$, ou $8p = 4$ ; elle donne $p = \frac{1}{2}$ & $x = 4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on suppose à présent $x = 4\frac{1}{2} + p$ ; on est sûr que $p$ signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger $pp$ à bien plus forte raison. On aura donc $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, ou $9p = -\frac{1}{4}$, & par conséquent $p = -\frac{1}{36}$ ; donc $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$.

Que si l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x = 4\frac{17}{36} + p$, & on auroit $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$ ; ainsi $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$, & $p = -\frac{1}{36 \cdot 322} = -\frac{1}{11592}$. Donc $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

## I - Etude du texte

Lire le texte, puis le réécrire dans un langage français et mathématique actuel. Reprendre les calculs et trouver l'erreur qui s'est glissée dans le texte. Comparer la valeur approchée de $\sqrt{20}$ trouvée par Euler à celle fournie par la calculatrice.

La première valeur approchée de $\sqrt{20}$ proposée par Euler est le nombre 4, que nous noterons $x_0$. Appelons $x_1$, $x_2$, $x_3$ les trois valeurs approchées successivement trouvées par Euler.

Remarquons que :

$$x_1 = x_0 + p_1$$
$$x_2 = x_1 + p_1$$
$$x_3 = x_2 + p_3$$

Compléter le tableau suivant :

| | |
|---|---|
| $x_0 = 4$ | $p_1 =$ |
| $x_1 =$ | $p_2 =$ |
| $x_2 =$ | $p_3 =$ |
| $x_3 =$ | |

1) Quel sens faut-il attribuer au mot fraction dans la phrase : « dans ce cas, si l'on suppose cette valeur égale à $4 + p$, on est sûr que p exprime une fraction » ?
2) Démontrer que :

$$0 < p < 1 \Rightarrow p^4 < p^3 < p^2 < p$$
$$|p| < 1 \Rightarrow p^4 < |p|^3 < p^2 < |p|$$

Quelle phrase du texte a-t-on explicitée par cette démonstration ?

Reprendre la méthode d'Euler pour déterminer une valeur approchée à $10^{-5}$ près de $\sqrt{2}$. On pourra présenter les résultats successifs sous forme de tableau.

| | |
|---|---|
| $x_0 =$ | $p_1 =$ |
| $x_1 =$ | • |
| • | • |
| • | • |
| • | • |

## II Généralisation

Généralisons le procédé utilisé par Euler au calcul de $\sqrt{a}$.

Supposons que n soit une valeur approchée de $\sqrt{a}$, et cherchons une nouvelle valeur approchée de $\sqrt{a}$ sous la forme $n + p$, où p est un nombre réel tel que $0 < |p| < 1$.

1) Montrer en appliquant la méthode d'Euler que :

$$p = \frac{a - n^2}{2n}$$

et que la nouvelle valeur approchée de $\sqrt{a}$ est $\dfrac{a + n^2}{2n}$

2) Reprendre le calcul de $\sqrt{20}$ et vérifier que :

$$p_1 = \frac{20 - x_0^2}{2\,x_0} \qquad x_1 = \frac{20 + x_0^2}{2\,x_0}$$

$$p_2 = \frac{20 - x_1^2}{2\,x_1} \qquad x_2 = \frac{20 + x_1^2}{2\,x_1}$$

$$p_3 = \frac{20 - x_2^2}{2\,x_2} \qquad x_3 = \frac{20 + x_2^2}{2\,x_2}$$

On peut remarquer que si $x_i$ est une valeur approchée de $\sqrt{20}$, la valeur approchée suivante est :

$$x_{i+1} = \frac{20 + x_i^2}{2x_i} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{20}{x_i})$$

## III Au-delà de la racine carrée

Dans ce dernier paragraphe, nous allons utiliser la méthode d'Euler aux calculs de racines cubiques.
Traitons un exemple et cherchons une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$.

En première approximation, nous pouvons choisir $x_0 = 2$ et chercher une nouvelle approximation sous la forme

$$x_1 = 2 + p_1 \text{ ou } 0 < |p_1| < 1$$

1) En négligeant $p_1^2$ et $p_1^3$ dans le calcul, montrer que :

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 2}{3x_0^2} = \frac{3}{2}$$

2) Réitérer deux fois le processus et comparer la valeur $x_3$ avec celle fournie par la calculatrice.

*

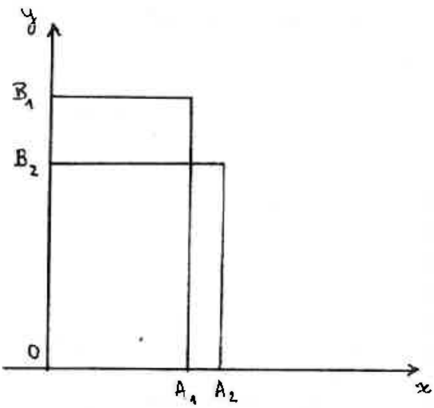
* *

# LA METHODE DES BABYLONIENS

## I - RACINE CARREE

Les Babyloniens utilisaient dès l'an 2000 avant notre ère une méthode simple, pour extraire les racines carrées, que nous allons illustrer géométriquement.

Détaillons cette méthode sur le calcul approché de $\sqrt{2}$. Remarquons que le nombre $\sqrt{2}$ est la mesure du côté d'un carré de surface 2. L'idée est de partir d'un rectangle de surface 2 — le plus simple est celui de longueur 2 et de largeur 1 — et de le transformer de manière que sa surface reste égale à 2 et « qu'il ressemble » de plus en plus à un carré. La longueur du rectangle initial va diminuer tandis que sa largeur va augmenter.




Construisons le premier rectangle. Soit $a_1$ sa largeur et $b_1$ sa longeur.

$a_1 = 1$ $b_1 = 2$

On a bien sûr : $a_1 < \sqrt{2} < b_1$

$a_1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut.

$b_1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès.

$\frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ fournit une nouvelle valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Posons $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}$

Construisons un nouveau rectangle de surface 2 et de longueur $b_2$. Sa largeur $a_2$ est donnée par :

$$a_2 = \frac{2}{b_2} = \frac{4}{3} \text{ car } a_2 b_2 = 2$$

On constate que : $a_2 < \sqrt{2} < b_2$
Et on réitère le procédé en posant :

$$b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad \text{et } a_3 = \frac{2}{b_3}$$

— Calculer $b_3$ et $a_3$ et vérifier que :

$$a_1 < a_2 < a_3 < \sqrt{2} < b_3 < b_2 < b_1$$

— Construire le rectangle de longueur $b_3$ et de largeur $a_3$.

— On peut continuer ainsi et définir de proche en proche :

$$b_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2} \quad \text{et} \quad a_{i+1} = \frac{2}{b_{i+1}}$$

— Calculer $a_4$ et $b_4$ et vérifier que :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$$

*Petite remarque comparative à l'attention de ceux qui ont étudié la partie II du texte d'Euler.*

Montrer que pour i = 1,2,3...

$$b_{i+1} = \frac{2 + b_i^2}{2b_i} = \frac{1}{2}\left(b_i + \frac{2}{b_i}\right)$$

Et nous constatons que la suite des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$... mise en évidence par la méthode des Babyloniens est construite de la même manières que la suite $x_0$, $x_1$, $x_2$... proposée par Euler dans le calcul approché de $\sqrt{20}$.

## II - RACINE CUBIQUE

La méthode des Babyloniens peut se généraliser au calcul des racines cubiques. Détaillons-la sur le calcul approché de $\sqrt[3]{2}$. On peut interpréter $\sqrt[3]{2}$ comme le côté d'un cube de volume 2. L'idée est de partir d'un parallélépipède, à base carrée, de volume 2, et de le transformer de manière que son volume reste égal à 2 et qu'il ressemble de plus en plus à un cube.

Le côté du carré de base du parallélépipède initial est noté $b_1$ et nous le choisissons égal à 2. La hauteur, notée $a_1$, est égale à $\frac{1}{2}$, car $b_1^2 a_1 = 2$

— Dessiner le parallélépipède
— Vérifier que $a_1 < \sqrt[3]{2} < b_1$
— Dans les transformations du parallélépipède initial, nous allons augmenter la hauteur et diminuer le côté du carré.

Comme précédemment $a_1$ est une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ par défaut, tandis que $b_1$ est une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ par excès.

La moyenne pondérée $\frac{1}{3}$ $(2\,b_1 + a_1)$ fournit une valeur approchée nouvelle de $\sqrt[3]{2}$.

— Remarquons que nous « pondérons » $a_1$ et $b_1$ : en effet $b_1$ apparaît par son carré dans le calcul du volume, tandis que $a_1$ est affecté de l'exposant.
— Posons $b_2 = \frac{1}{3}\ (2b_1 + a_1)$

— Construisons un nouveau parallélépipède dont la base carrée aura pour côté $b_2$ et dont la hauteur est notée $a_2$, son volume restant égal à 2.
1) Calculer $b_2$
2) Calculer $a_2$
3) Vérifier que $a_1 < a_2 < \sqrt[3]{2} < b_2 < b_1$

On peut continuer ainsi de proche en proche en posant :

$$b_{i+1} = \frac{2b_i + a_i}{3} \quad a_{i+1} = \frac{2}{b_{i+1}^2}$$

Calculer $a_3$ et $b_3$, puis $a_4$ et $b_4$ et vérifier que :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \sqrt[3]{2} < b_4 < b_3 < b_2 < b_1$$

*Petite remarque comparative à l'attention de ceux qui ont étudiés la partie III du texte d'Euler.*
Montrer que pour i = 1, 2, 3...

$$b_{i+1} = \frac{2b_i^3 + 2}{2b_i^2}$$

On constate que la suite, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$... construite ici est la suite $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$... mise en évidence dans la méthode d'Euler pour le calcul de $\sqrt[3]{2}$.

# XV - TOUTES PUISSANCES

Cette fiche est l'occasion d'exercices de calcul mais aussi de plusieurs exercices de géométrie.

Elle constitue une initiation à la notation indicielle et aux suites, sur des exemples simples et curieux.

Elle a l'ambition de sensibiliser les élèves aux phénomènes exponentiels. Le dernier paragraphe est une initiation au papier semi-logarithmique.

*

*   *

## I. Problème

On dispose d'une feuille de papier très mince (un paquet de 500 de ces feuilles a une épaisseur d'un centimètre). On la déchire en deux et on superpose les deux morceaux. On déchire le tout en deux et on superpose les quatre morceaux. On déchire le tout en deux et ... On fait ainsi cinquante fois de suite la même "manipulation" (déchirement puis empilement).

Déterminer un ordre de grandeur de la hauteur de la pile ainsi obtenue (on pourra l'exprimer dans l'unité de longueur de son choix).

## II. Suites géométriques

*Exercice 1*

a) 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 : Vérifier que chacun de ces nombres (sauf le premier ! ) est obtenu à partir du précédent par un même procédé. Lequel ?

b) Vérifier qu'il en est ainsi des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ puis des nombres $81, -27, 9, -3, 1$ .

c) Fabriquer des exemples analogues et des contre-exemples.

*Définition*

On dit que : la suite des nombres 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 est une suite *géométrique de raison 3.*
2 est le *premier terme de cette suite,*
6 est le *second terme de cette suite*, 18, le *troisième*, etc.

*Exercice 2* : Compléter :

a) On dit que : la suite des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ est ...

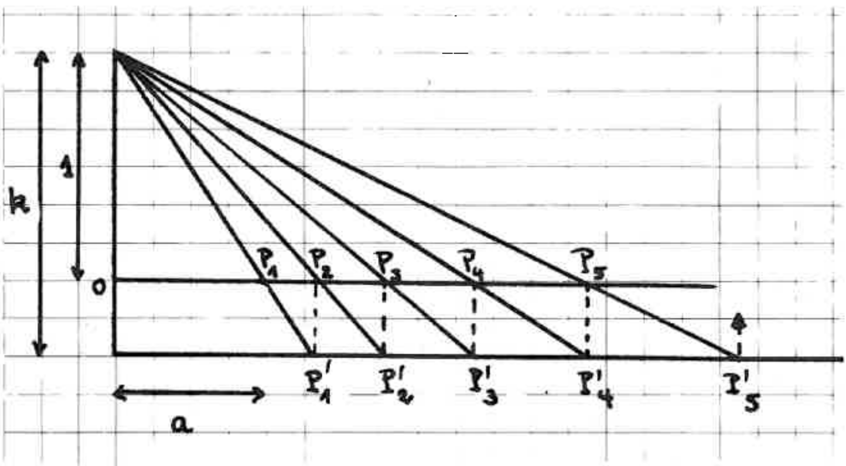
b) On dit que : la suite des nombres 81, −27, 9, −3, 1 est ...

**III. Constructions géométriques**

1/ Examiner le croquis ci-dessous : il permet de construire des segments $OP_1$, $OP_2$, $OP_3$, ... dont les longueurs forment une suite géométrique de raison k .

a) Le vérifier.

b) Le justifier.



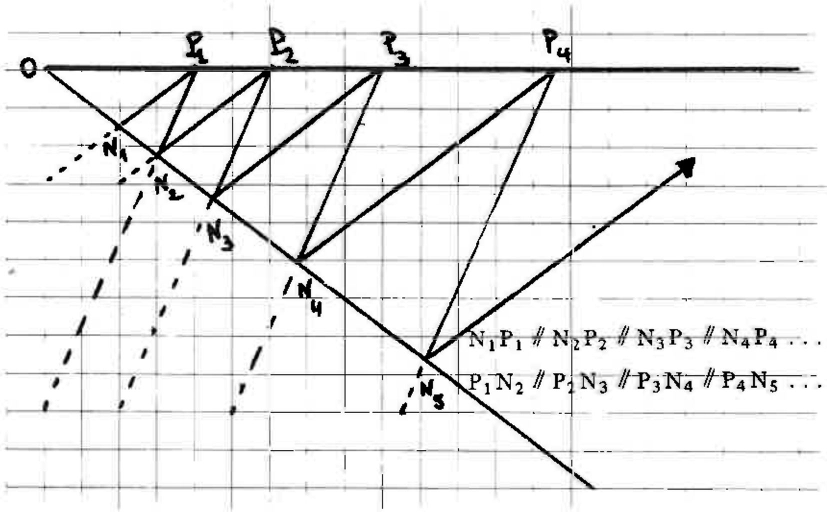

Construire la suite des points $P_1$, $P_2$, $P_3$, ... dans le cas où $k = \frac{3}{2}$ et $a = 1{,}2$ .
Construire la suite des points $P_1$, $P_2$, $P_3$, ... dans le cas où $k = \frac{1}{2}$ et $a = 1{,}5$ .

2/ Examiner le croquis ci-dessous : il permet de construire des segments $P_1N_1$, $P_2N_2$, $P_3N_3$, ... dont les longueurs forment une suite géométrique.

a) Le vérifier.

b) Le justifier.

c) Quels sont les autres segments dont les longueurs forment une suite géométrique ?




3/ Examiner le croquis ci-dessous :

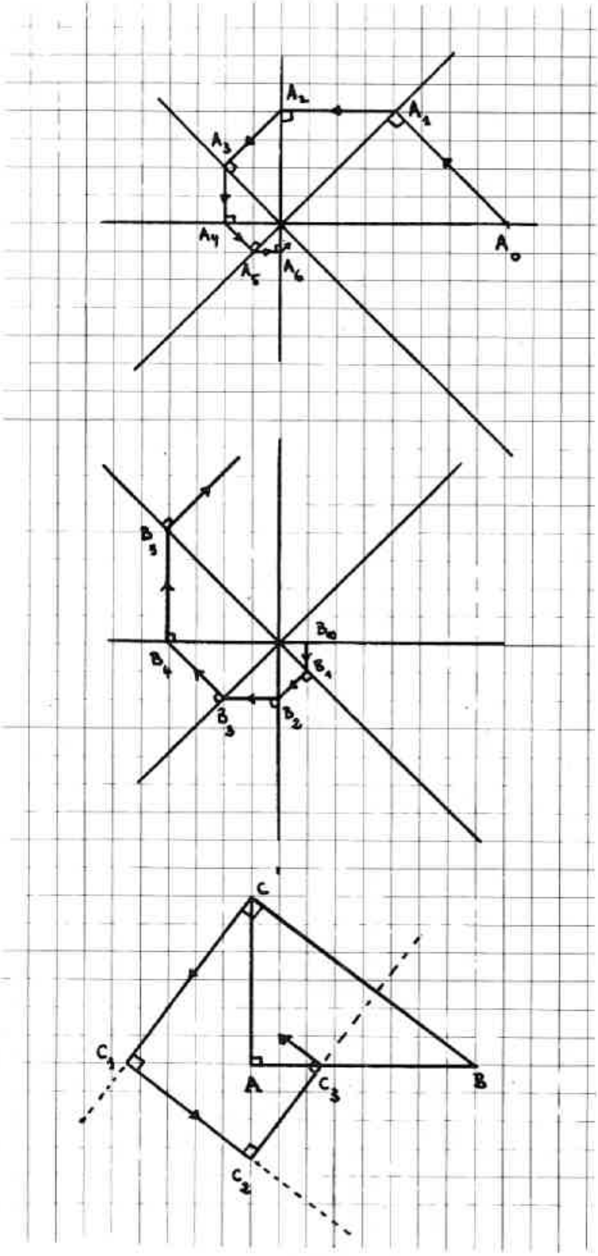
Que peut-on dire des longueurs des côtés des carrés ainsi construits ?

Que peut-on dire des aires des carrés ainsi construits ?

## IV. Spirales

Examiner les trois "spirales" qui figurent ci-dessous.

Démontrer que, pour chacune de ces spirales, les segments construits les uns à la suite des autres forment une suite géométrique.



## V. Où il est question de suites géométriques

1/ La population d'un pays était de quatre-vingt millions d'habitants au 1er mars 1975. On estime que chaque année la population s'accroît de 2 % de ce qu'elle était l'année précédente.

a) Quelle était la population de ce pays au 1er mars 1977 ? Quelle sera-t-elle au 1er mars 1980 ?

b) Dans combien d'années aura-t-elle doublé ? (Pour cette question on utilise le tableau ci-dessous)

| $n$ | 25 | 30 | 35 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| valeur approchée de $(1{,}02)^n$ | 1,64 | 1,81 | 2 | 2,21 |

2/ La femelle du doryphore pond environ 1200 oeufs par ponte. En un an se développent trois générations. En supposant que les deux tiers des oeufs sont détruits et que la moitié des oeufs restants donnent des femelles, évaluer le nombre de doryphores engendrés en un an par une femelle.

3/ Un flacon contient 100 cm$^3$ d'une "solution" d'eau colorée par 40 grammes de bleu de méthylène (solution à 40 %). On ôte 50 cm$^3$ de cette solution pour rajouter 50 cm$^3$ d'eau : on obtient ainsi une nouvelle solution plus diluée que la précédente. On recommence l'opération : combien de grammes de bleu de méthylène y a-t-il dans la solution au bout de 2, 3, 4, 6 opérations ?

Combien de fois faut-il recommencer l'opération pour obtenir une solution contenant moins d'un gramme de colorant ?

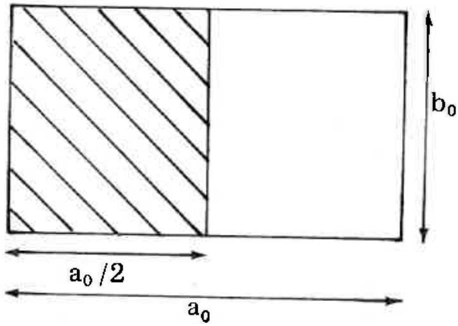
4/ On place dans une banque 1000 F au taux d'intérêt annuel de 6,5 %. Quelle somme pourra-t-on retirer au bout d'un an, de deux ans, de sept ans ?

Au bout de combien d'années pourra-t-on retirer plus de 2000 F ?

5/ Les différents formats des feuilles de papier du commerce se déduisent l'un de l'autre par pliage suivant le "plus petit" axe de symétrie.

Si $(a_0, b_0)$ représente les dimensions du format DIN $A_0$, alors, $(b_0, \frac{a_0}{2})$ représente celles du format DIN $A_1$.

$(\frac{a_0}{2}, \frac{b_0}{2})$ représente celles du format DIN $A_2$.




Le rapport $\frac{a_0}{b_0}$ est choisi de façon que le rapport des longueurs des côtés des différents rectangles reste le même.

a) Calculer $\frac{a_0}{b_0}$.

b) Calculer $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{10}$ en fonction de $a_0$. Que peut-on dire de ces nombres ?

c) Le nombre $a_0$ est choisi de façon que la feuille de format DIN $A_0$ ait une superficie d'un mètre carré.

Calculer $a_0$ et $b_0$ en millimètres et en déduire $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ (On prendra 1,19 comme valeur approchée de $\sqrt[4]{2}$).

d) La feuille sur laquelle vous écrivez a-t-elle un des formats précédents ? Si oui, lequel ?

## VI. Somme des termes d'une suite géométrique

A. 1. La suite des 9 nombres : 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13 122 est une suite géométrique de raison 3.

a) Calculer la somme $S_9$ de ces neuf nombres.

b) On propose ici une autre méthode de calcul :
on écrit :

$$S_9 = 2 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + 2.3^5 + 2.3^6 + 2.3^7 + 2.3^8$$

puis :

$$S_9 \times 3 = 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + 2.3^5 + 2.3^6 + 2.3^7 + 2.3^8 + 2.3^9$$

On forme la différence : $S_9(1-3) = 2 - 2 . 3^9$

d'où $S_9(-2) = 2(1-3^9)$

donc $S_9 = 3^9 - 1$

donc $S_9 = 19\,682$

2. Utiliser la méthode de calcul proposée pour calculer la somme des sept nombres :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \frac{243}{64}, \frac{729}{128}$$

3. Utiliser la méthode de calcul proposée pour calculer la somme des six nombres :

$$\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \frac{81}{128}, \frac{243}{512}, \frac{729}{2048}$$

4. Utiliser la méthode de calcul proposée pour trouver une autre expression de :

$$1 + x + x^2$$
$$1 + x + x^2 + x^3$$
$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

B. *Problème :*

On dispose sur la première case d'un échiquier un grain de blé, deux grains sur la seconde, quatre sur la troisième, et ainsi de suite en doublant chaque fois la mise.

1. Combien de grains de blé dispose-t-on ainsi sur ce jeu ? Donne un ordre de grandeur de ce nombre en prenant $10^3$ comme ordre de grandeur de $2^{10}$.

2. Sachant que 16 grains de blé pèsent un gramme, combien de sacs de 50 kgs peut-on remplir avec tout le blé disposé sur ce jeu ?

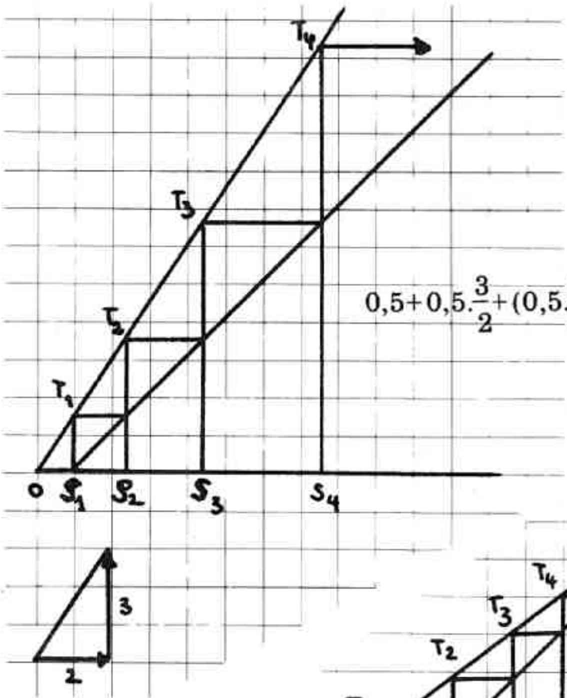
3. Combien faut-il de camions pouvant transporter 80 sacs de 50 kg pour assurer le transport de tout ce blé ?

4. Comparer avec la production annuelle mondiale de blé.

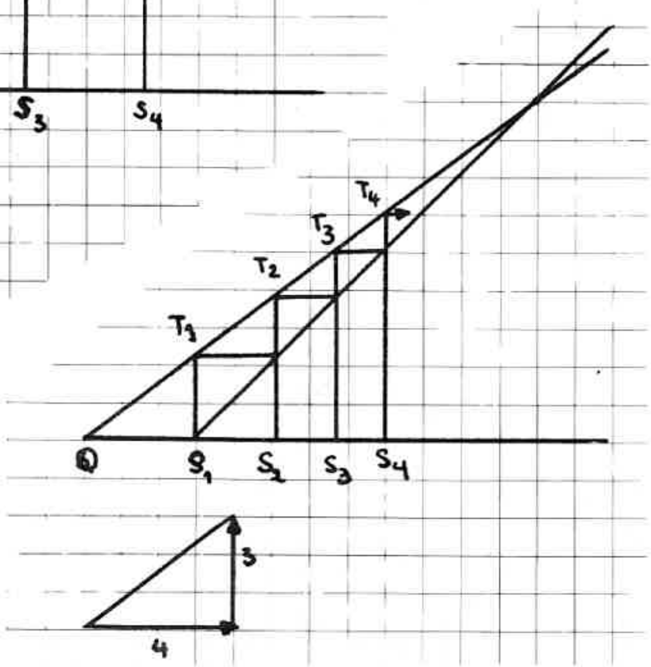
N.B. Un échiquier comporte 64 cases.

C. *Représentation géométrique*

Les croquis ci-dessous permettent chacun de déterminer (à l'aide d'un double-décimètre) des sommes de nombres formant une suite géométrique. Justifiez-le.




$$0{,}5+0{,}5.\frac{3}{2}+\left(0{,}5.\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}+\left(0{,}5.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}\right)\frac{3}{2}+\ldots$$




$$1{,}5+1{,}5.\frac{3}{4}+\left(1{,}5.\frac{3}{4}\right).\frac{3}{4}+\left(1{,}5.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}\right).\frac{3}{4}+\ldots$$

VII. Soient les applications

$$f_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \\ n \longmapsto 2^n \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_3 \left| \begin{array}{l} \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \\ n \longmapsto 3.2^n \end{array} \right.$$

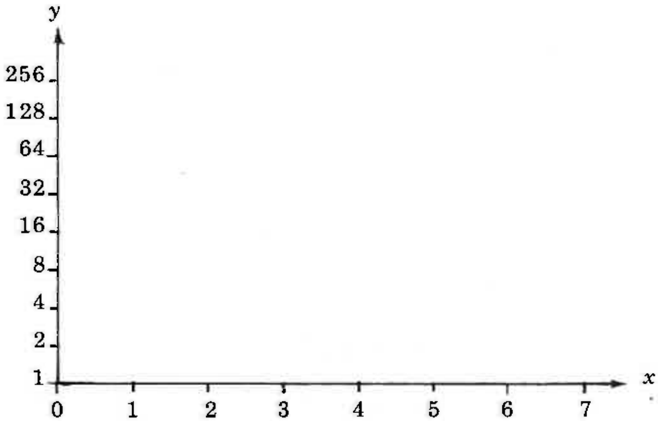
a) Représenter ces applications dans un repère orthonormé : on prendra 0,5 cm comme unité de longueur sur chaque axe de coordonnées.

Combien de points des représentations graphiques de $f_1$ et de $f_3$ peut-on représenter sur une feuille de papier de format $21 \times 29{,}7$ ?

b) Représenter ces applications dans un repère orthogonal : on prendra 1 cm comme unité de longueur sur l'axe des abscisses et 0,125 cm comme unité de longueur sur l'axe des ordonnées.

Combien de points des représentations graphiques de $f_1$ et de $f_3$ peut-on représenter sur une feuille de papier de format $21 \times 29{,}7$ ?

c) Représenter ces applications dans un repère dont les axes sont gradués comme ci-dessous :




Combien de points des représentations graphiques de $f_1$ et de $f_3$ peut-on représenter sur une feuille de papier de format $21 \times 29{,}7$ ? Que constate-t-on ?

d) Soient les applications

$$g_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ n \longmapsto 2^n \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g_3 \left| \begin{array}{l} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \\ n \longmapsto 3.2^n \end{array} \right.$$

Utiliser un repère dont les axes sont gradués de façon "analogue" à ceux de la question c) pour représenter les applications $g_1$ et $g_3$. Que constate-t-on ?

# XVI - CARRES MAGIQUES

Les carrés magiques offrent un thème attrayant et séduisant et une foule d'exercices plus ou moins difficiles.

La question (2) permet de se familiariser avec la notion : il s'agit de compléter des carrés pour les rendre magiques. Les premiers exemples, particulièrement simples, ne nécessitent pas de méthode : il suffit « d'essayer ». Lorsque le nombre d'inconnues augmente et que les solutions ne sont pas entières, le tâtonnement ne permet plus de conclure. Une mathématisation du problème, sous forme de mise en équation, s'impose.

Une bonne observation des carrés obtenus — propriétés du terme central et de linéarité — que l'on se doit de démontrer, permet de résoudre les questions suivantes. C'est là une démarche fondamentale en sciences : je constate, je démontre et j'applique.

(1) En calculant la somme des nombres inscrits sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale du carré suivant, vous saurez ce qu'on appelle un carré magique d'ordre 5 de somme 65.

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 9 & 22 & 15 \\ 20 & 8 & 21 & 14 & 2 \\ 7 & 25 & 13 & 1 & 19 \\ 24 & 12 & 5 & 18 & 6 \\ 11 & 4 & 17 & 10 & 23 \end{pmatrix}$$

(2) Compléter les carrés suivants afin qu'ils soient magiques.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & . & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & . & . \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & . & -1 \\ -2 & . & 2 \\ 1 & . & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & . \\ -2 & 1 & . \\ 2 & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & . & \frac{4}{3} \\ . & 1 & \frac{7}{6} \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & . & -11 \\ . & -7 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & -1 & . \\ 2 & . & 1 \\ . & 4 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & . & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & 0 & . \\ 0 & 1 & 2 \\ . & 2 & . \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ 1 & . & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 2 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} . & 1 & . \\ 2 & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

avec S = 12 avec S = 24

3 Trouver un carré magique avec les 9 premiers naturels consécutifs non nuls.

4 Trouver un carré magique différent de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec le maximum de 0.

5 Trouver, s'il én existe, des carrés magiques d'ordre 3 à coefficients tous naturels de somme 25, de somme 27.

6 On considère le carré magique $\begin{pmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 0 & 8 & 16 \\ 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

Trouver, à partir de ce carré magique, un carré magique à coefficients naturels tous différents de somme 2424, de somme 3333.

# XVII – TRANSFORMONS

Les exemples de transformations choisis ici permettent une fréquentation directe des figures, et entraînent au tracé de : points, droites, droites parallèles, droites perpendiculaires ; et dans le dernier exemple : cercle, intersection d'une droite et d'un cercle, tangente à un cercle.

Ces exemples familiarisent les élèves avec la notion de transformation et l'idée élémentaire que celle-ci ne transforme pas seulement des points, mais aussi des figures.

Ces exercices de géométrie active peuvent être (tout ou partie) proposés comme introduction à l'enseignement de celle-ci en classe de seconde ; ils permettent, en outre, un rappel sur les symétries, les translations et le théorème de Thalès.

Deux remarques pour l'utilisation de cette fiche :

1) On peut préférer aborder les exemples proposés dans un autre ordre et commencer par celui d'une transformation inconnue des élèves.

2) Les énoncés paraissent abrupts, surtout au début ; on pourra détailler le premier soumis aux élèves : si c'est le premier exemple, la question 1 pourra être celle-ci :

   « Tracer T(OM) ; montrer que 0,M et M' sont alignés ; tracer T(AM) ; en déduire la position de M' ».

   Ceci, afin d'habituer les élèves à la démarche — inhabituelle — qui leur est demandée ici.

* *
*

Dans chacun des exemples suivants (sauf le septième), T désigne une transformation du plan (application bijective du plan dans lui-même). Si M est un point, M' est l'image de M par T ; si **e** est un ensemble de points (droite, triangle, cercle, etc...), **e'** désigne l'ensemble des images par T des points de **e** : on dit que **e'** est le transformé de **e** par T. On utilisera essentiellement le résultat suivant :

Si M est un point appartenant à $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$
alors M' appartient à $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$

* * *
* *
*

**Exemple 1 :**

On connaît un point A et son image A' par T ; A' $\neq$ A.
On sait que le milieu 0 de [AA'] est invariant par T ;
On sait que toute droite est transformée par T en une droite qui lui est parallèle.

*Questions :*

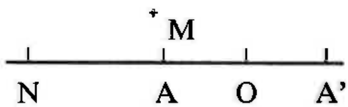
1. Soit M un point n'appartenant pas à la droite (AA') : Construire M'.

2. Soit N un point appartenant à la droite (AA') : Construire N'.

3. Dessiner en bleu le triangle AMN et en rouge son transformé.

4. Se donner un point et construire le point dont il est l'image par T.

5. Reconnaître la transformation T : justifier.




**Exemple 2 :**

On connaît un point A et son image A' par T ; A' $\neq$ A.

On sait que pour tout point M, la droite (MM') est parallèle à la droite (AA').

On sait que toute droite est transformée par T en une droite qui lui est parallèle.

*Questions :*

Les mêmes que dans l'exemple 1.

**Exemple 3 :**

On connaît un point A et son image A' par T ; A' $\neq$ A.

On connaît un point I de la droite (AA') invariant par T ;

On sait que toute droite est transformée par T en une droite qui lui est parallèle.

*Questions :*

Les questions ① ② ③ et ④ sont les mêmes que dans les exemples précédents ;

La question ⑤ est remplacée par celle-ci :

⑤ On pose $\overrightarrow{IA'} = k\,\overrightarrow{IA}$ ; démontrer que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$

*N.B.* On pourra faire deux figures : sur l'une, le point I appartient au segment [AA'] ; sur l'autre, il lui est extérieur.

**Exemple 4 :**

On connaît une droite d dont chaque point est invariant par T ;

On connaît un point A n'appartenant pas à d et son transformé A' par T ; A' $\neq$ A.

On sait que pour tout point M n'appartenant pas à d, la droite (MM') est parallèle à d ;

On sait que le transformé d'une droite est une droite.

*Questions :*

Les questions ① ② ③ et ④ sont les mêmes que dans les exemples précédents.

La question ⑤ est remplacée par celle-ci :

⑤ Démontrer que pour tout point N de (AA'), on a :

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AA'}$$

**Exemple 5 :**

On connaît une droite d dont chaque point est invariant par T.

On connaît un point A n'appartenant pas à d et son transformé A' par T ; A' $\neq$ A.

On sait que pour tout point M n'appartenant pas à d, la droite (MM') est perpendiculaire à d.

On sait que le transformé d'une droite est une droite.

*Questions :*

Les questions (1) (2) (3) et (4) sont les mêmes que dans les exemples précédentes.

La question (5) est remplacée par celle-ci :

(5) Soit B un point de la droite parallèle à d passant par A. Construire B'.

**Exemple 6 :**

On connaît une droite d et sa transformée d', qui lui est perpendiculaire.

On connaît un point I n'appartenant ni à d ni à d', invariant par T.

On sait que toute droite a pour transformé une droite qui lui est perpendiculaire.

*Questions :*

(1) Construire le transformé $d'_1$ d'une droite $d_1$ passant par I ;

(2) Construire l'image d'un point P appartenant à d ;

indication : utiliser (1)

(3) Construire le transformé $d'_2$ d'une droite $d_2$ perpendiculaire à d, et ne passant pas par I ;

indication : utiliser (2)

(4) Construire l'image d'un point M différent de I, n'appartenant pas à d ; indication : utiliser ce qui précède.

(5) Se donner un point et construire le point dont il est l'image par T.

(6) Dessiner en bleu le triangle MNP et en rouge son image.

**Exemple 7 :**

Soit O un point du plan. T désigne ici une transformation du plan privé de O ; O n'a donc pas d'image par T et n'est l'image d'aucun point du plan par T.

On connaît un cercle (c) de centre O dont chaque point est invariant par T.

On sait que pour tout point M, les points O, M et M' sont alignés.

On sait que toute droite ne passant par par O est transformée en un cercle passant par O et privé de ce point O.

*Questions :*

1. Soit d une droite qui coupe (c) en A et B. Construire d'.

2. Soit M un point n'appartenant pas à (c). Construire M'.

   Indication : utiliser 1

3. Construire d', dans chacun des cas suivants :
   a) d est une droite passant par O privée de O ;
   b) est tangente à (c) ;
   c) d n'a pas de point d'intersection avec (c).

# XVIII - LE PENTAGONE REGULIER ET LE NOMBRE D'OR

Cette fiche fournit l'occasion de réutiliser bien des connaissances de géométrie vues en premier cycle : angles géométriques, triangles isocèles, théorème de Pythagore, symétrie axiale, etc...

Une homothétie est employée lors d'une démonstration, mais elle peut être remplacée par le théorème de Thalès et le calcul vectoriel.

Le calcul algébrique y a une place importante, mais certains résultats sont donnés pour permettre une vérification.

Les paragraphes II et III constituent une préliminaire pour la fiche concernant les polyèdres réguliers, mais uniquement pour la troisième activité qui s'intéresse au dodécaèdre et à l'icosaèdre.

*

* *

## I - POUR COMMENCER

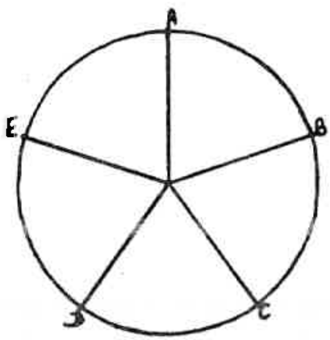
*Définition :*

Un pentagone est un polygone ayant cinq côtés.

Un pentagone est régulier si ses cinq côtés sont égaux et si ses cinq angles au sommet sont égaux.

*Construction :*

Dessiner un cercle de centre O et de rayon r.




Partager le disque en cinq secteurs égaux (secteur : portion de la surface d'un cercle délimitée par deux rayons et l'arc correspondant).

*Questions :*

— Donner une mesure de l'angle en O pour chacun de ces secteurs.

— Quels sont les axes de symétrie de cette figure géométrique ?

— Démontrer que les cordes [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA] ont même longueur.

— Donner une mesure des angles $\widehat{EAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$ et $\widehat{DEA}$.

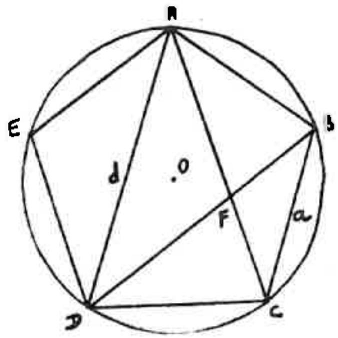
*Conclusion :*

Le polygone ABCDE est un pentagone régulier convexe.

*Question subsidaire :*

Construire un pentagone non régulier ayant toutefois ses cinq côtés égaux.

## II - PARCOURONS LA DIAGONALE




Soit ABCDE un pentagone régulier de côté a. Notons d la longueur d'une diagonale. Vous pourriez démontrer que toutes les diagonales de ce pentagone ont même longueur comme vous avez démontré que les cinq côtés ont même longueur dans le paragraphe précédent.

*Questions :*

1) Montrer que les angles $\widehat{EAD}$, $\widehat{DAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux. Nous avons réalisé la trisection de l'angle EAB.
2) Montrer que le triangle ABF est isocèle.
3) Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
4) En déduire qu'il existe une homothétie h telle que h(B) = D et h(C) = A. Quel est son centre ?
   Exprimer de deux façons différentes son rapport en fonction de a et d.
5) Vous avez obtenu une relation entre d et a qui peut s'écrire :

$$d^2 - ad - a^2 = O \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0$$

Soit $\Phi = \dfrac{d}{a}$. Le nombre $\Phi$ vérifie donc la relation :

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Démontrer que le nombre $\Phi$ vérifie aussi la relation :

$$(\Phi - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0$$

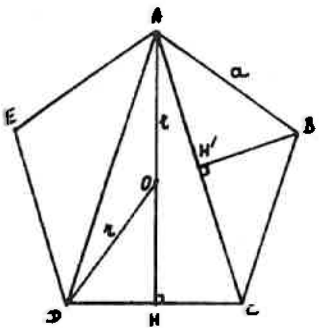
Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ dans **R**.
En déduire le nombre $\Phi$.

Ce nombre $\Phi$ est appelé de nos jours « nombre d'or ». Au XVI[e] siècle, Luca Pacioli lui donnait le nom de « divine proportion » et Léonard de Vinci le qualifiait de « section dorée ».

Pour de plus amples renseignements, vous pouvez consulter le n° 1530 de l'édition « Que sais-je ? »

## III - ETENDONS-NOUS SUR SA SUPERFICIE

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, d et a sont liés par la relation d = a $\Phi$, $\Phi$ étant le nombre d'or.




*Questions :*

1) Soit [AH] la hauteur issue de A du triangle ACD. Calculer AH puis l'aire du triangle ACD.

2) Soit [BH'] la hauteur issue de B du triangle ABC. Calculer BH' puis l'aire du triangle ABC.

3) Déduire des deux premières questions l'aire S du pentagone régulier ABCDE et l'exprimer en fonction de a et de $\Phi$.

4) Sachant que $\Phi$ vérifie la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$, montrer que cette aire S peut s'exprimer sous l'une de ces trois formes :

$$S = \frac{a^2}{2}[\frac{1}{2}\sqrt{4\Phi^2 - 1} + \Phi\sqrt{4 - \Phi^2}]$$

$$S = \frac{a^2}{2}[\frac{1}{2}\sqrt{4\Phi + 3} + \sqrt{\Phi + 2}]$$

$$S = \frac{a^2}{4}(3\Phi + 1)\sqrt{3 - \Phi}$$

## IV - REVENONS AU CERCLE CIRCONSCRIT

Soit O le centre du cercle circonscrit au pentagone régulier ABCDE de côté a, et soit r le rayon de ce cercle.

*Questions :*

1) Calculer $r + OH$

2) Calculer $r^2 - OH^2$. En déduire $r - OH$

3) Calculer r.
Vérifier les relations :

$$r = a \frac{\Phi^2}{\sqrt{4\,\Phi + 3}} \text{ et } r = a \frac{1}{\sqrt{3 - \Phi}}$$

$$\text{et } a^2 = r^2 \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

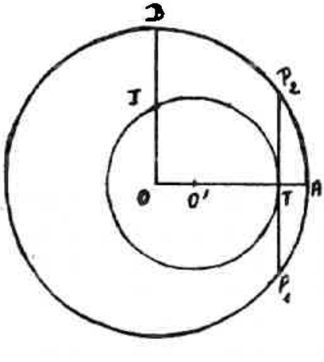
## V - ET POUR FINIR, RECONSTRUISONS

### *1) Coupons en deux, en quatre et prenons la tangente*

Soit *C* un cercle de centre O et de rayon r, [OA] et [OB] deux rayons perpendiculaires, I le milieu de [OB] et O' le point vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$$

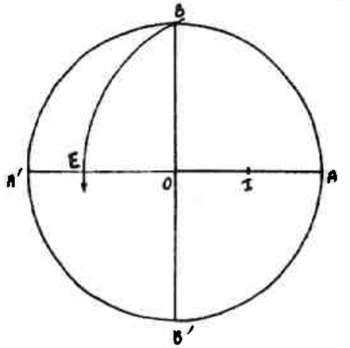
(ou pourquoi pas : O' le barycentre de $A_{(1)}$ et $O_{(3)}$). Dessiner le cercle C' de centre O' et de rayon O'I, et la tangente au cercle *C'* au point T situé sur le segment [OA]. Cette tangente coupe *C* en deux points $P_1$ et $P_2$.




Calculer la distance $P_1P_2$.
Vérifier à l'aide de la question précédente que cette distance est celle d'un pentagone inscrit dans ce cercle.
Terminer la construction du pentagone régulier convexe dont $P_1$ et $P_2$ sont deux sommets consécutifs.

*2) Coupons seulement en deux,*

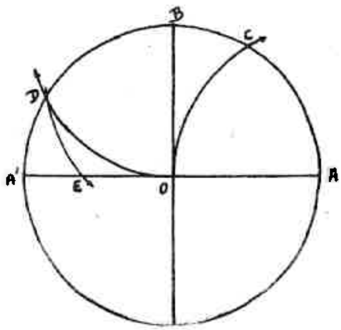
Soit *C* un cercle de centre O et de rayon r, [AA'] et [BB'] deux diamètres perpendiculaires, I le milieu de [OA] et E le point de [IA'] tel que IE = IB.




Calculer la distance BE et comparer à la distance $P_1$ $P_2$ obtenue précédemment.
Construire les sommets d'un pentagonne régulier inscrit dans ce cercle à l'aide du compas.

*3) Ne coupons plus*

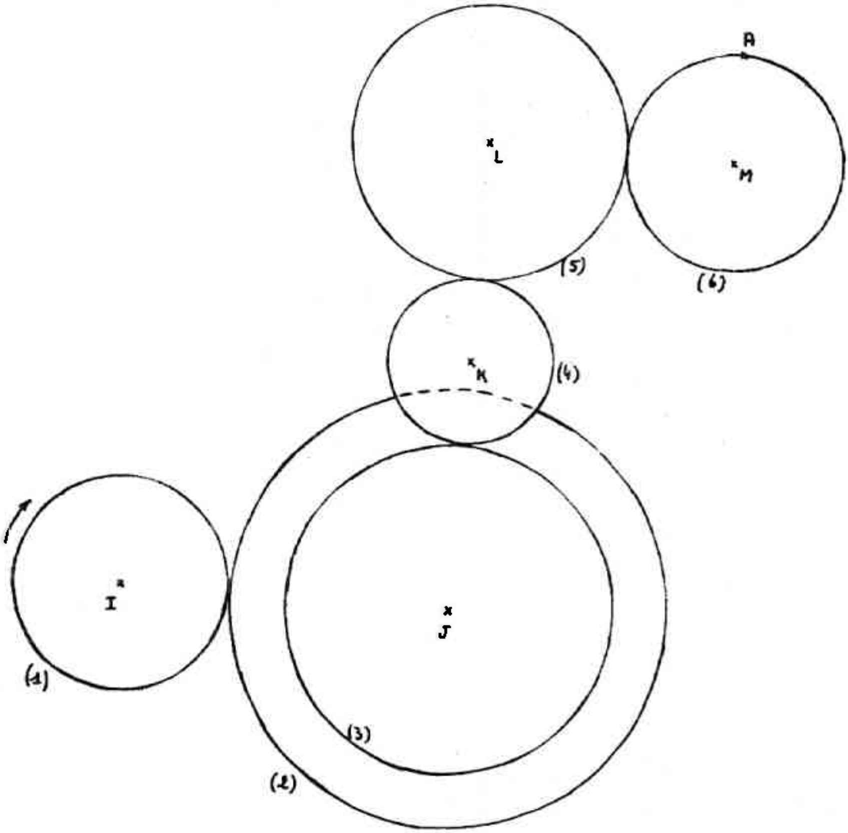
Soit *C* un cercle de centre O et de rayon r, [AA'] et [BB'] deux diamètres perpendiculaires, C le point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tel que AC = r, D le point de l'arc $\overset{\frown}{BA'}$ tel que BD = r, et E le point de [OA'] tel que CE = CD.




Calculer la distance BE et la comparer à $P_1P_2$.
Construire les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans ce cercle à l'aide du compas.

# XIX - ON TOURNE

## ENGRENAGES




Ce dessin représente schématiquement des roues dentées dont les rayons sont respectivement $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 3$, $R_4 = 1{,}5$, $R_5 = 2{,}5$ et $R_6 = 2$. Les roues (2) et (3) sont solidaires l'une de l'autre et les points I, J, K, L, M sont des points fixes.

La roue (1) tourne de $\alpha°$ dans le sens indiqué par la flèche. Que devient le point A ?

1. $\alpha° = 60°$ ; 2. $\alpha° = 90°$ ; 3. $\alpha° = 120°$ ; 4. $\alpha° = 225°$ ; 5. $\alpha° = 360°$.

## "VARIATION 7"

Voici un dessin de Max Bill, peintre et sculpteur suisse, né en 1908. Comme Mondrian, il s'est beaucoup intéressé aux mathématiques pour la réalisation de ses œuvres.

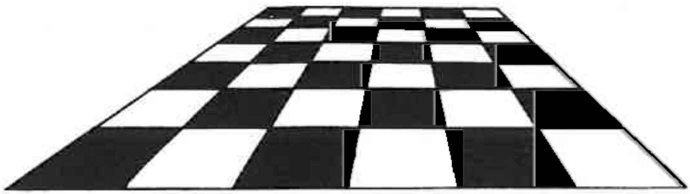
Reproduire ce dessin en doublant ses dimensions.

# XX - PERSPECTIVE

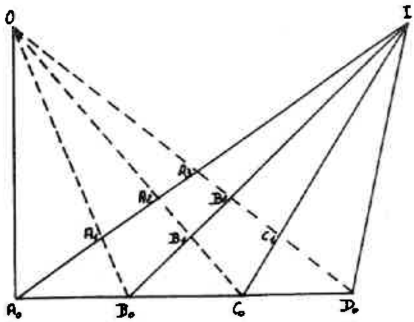
On voit dans cette fiche qu'un même dessin peut-être exploité selon deux points de vue différents qui peuvent être considérés indépendamment l'un de l'autre :

— le premier point de vue (paragraphes I et II) permet un travail de géométrie plane sur les homothéties, le calcul vectoriel et le théorème de Thalès — si l'on veut.

— le second point de vue (paragraphe III) consiste à regarder ce dessin comme la représentation d'un figure de l'espace à l'aide d'une perspective à point de fuite. Il faut bien observer le dessin sans se fier à ses dimensions.



Dessin n°1




Dessin n°2

I - Le dessin n°1 a été réalisé grâce à la construction suggérée au dessin n°2. Reproduire et compléter le dessin n°2 à l'aide des indications suivantes.

— sur la droite $(A_0B_0)$, placer les points $A_0$, $B_0$, $C_0$, $D_0$, $E_0$, $F_0$, $G_0$ régulièrement espacés en prenant $A_0B_0 = 3$ cm.

— $(A_0O) \perp (A_0G_0)$ et $A_0O = 8$ cm

— $(OI) // (A_0G_0)$ et $OI = 10,5$ cm

II - Préliminaire : trouver le réel k tel que $A_1A_0 = k\,A_1I$

1) Quel est le rapport de l'homothétie $h_1$ de centre I qui transforme le point $A_0$ en $A_1$ ?
2) Quel est le rapport de l'homothétie $h'_1$ de centre O qui transforme le point $B_0$ en $A_1$ ?
3) Quelle est l'image de $B_0$ par $h_1$ et quelle est l'image de $C_0$ par $h'_1$ ?
Que peut-ont dire des points $A_1$, $B_1$, $C_1$, ..., $G_1$ ?
4) Que peut-on dire des droites $(A_0B_1)$, $(B_0C_1)$, $(C_0D_1)$... $(F_0G_1)$ ?
5) Quel est le rapport de l'homothétie $h_2$ de centre I qui transforme $A_0$ en $A_2$, celui de l'homothétie $h_3$ de centre I qui transforme $A_0$ en $A_3$, celui de l'homothétie $h_7$ de centre I qui transforme $A_0$ en $A_7$ (comment s'obtient le point $A_7$ ?) ?
6) Dessiner en couleur les droites $(OE_0)$, $(OF_0)$, $(OG_0)$ et (OI).
Ces droites sont coupées par des sécantes issues de I.
Vérifier les égalités :

$$\frac{A_5A_4}{A_5A_6} = \frac{IA_4}{IA_6}, \quad \frac{B_4B_3}{B_4B_5} = \frac{IB_3}{IB_5}$$

$$\frac{E_1E_0}{E_1E_2} = \frac{IE_0}{IE_2}$$

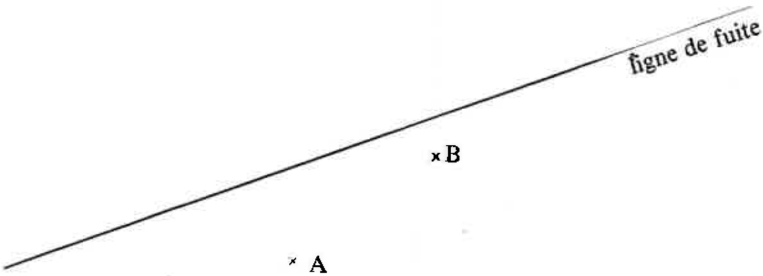
III - D'aucuns prétendent que ce dessin (n° 1) est la représentation en perspective fuyante (voir *) d'un pavage constitué de dalles carrées. Nous voulons savoir si ceci est vrai.
Supposons que $A_0B_0B_1A_1$ est la perspective d'un carré.

1) Le quadrilatère $B_0C_0C_1B_1$ est-il aussi la perspective d'un carré ?
2) Le quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$ est-il aussi la perspective d'un carré ?
3) A-t-on effectivement représenté ici un pavage à dalles carrées ?
4) Le quadrilatère $A_0G_0G_7A_7$ est-il la perspective d'un carré ?

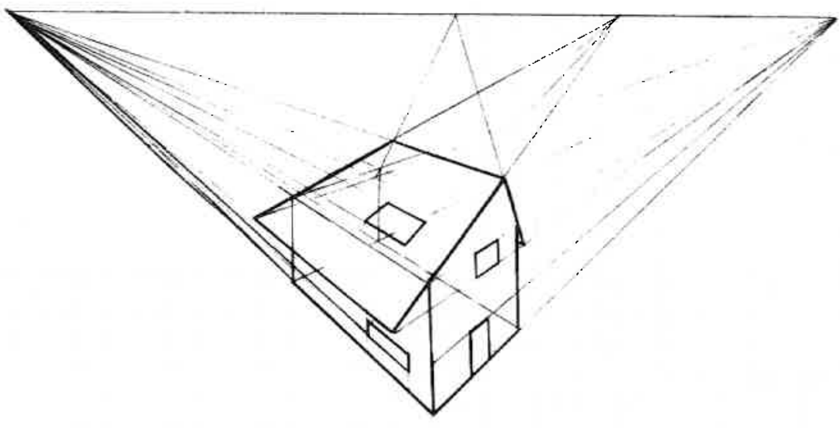
5) Le polygone $A_1B_0C_0C_1B_2A_2$ est-il la perspective d'un hexagone régulier ?

IV - Une construction

Connaissant deux points d'un plan et la ligne de fuite, construire la perspective du milieu de [AB], le dessin étant fait en perspective fuyante.




* Voici les règles de la « perspective fuyante » :
- Les droites sont représentées par des droites.
- Des droites parallèles sont, selon leur position, représentées par des droites parallèles ou par des droites concourantes en un même point appelé point de fuite (de la direction de ces droites).
- Les angles et les distances sont représentés selon des lois trop compliquées pour être données ici.
- Tous les points de fuite de toutes les droites d'un même plan sont alignés.

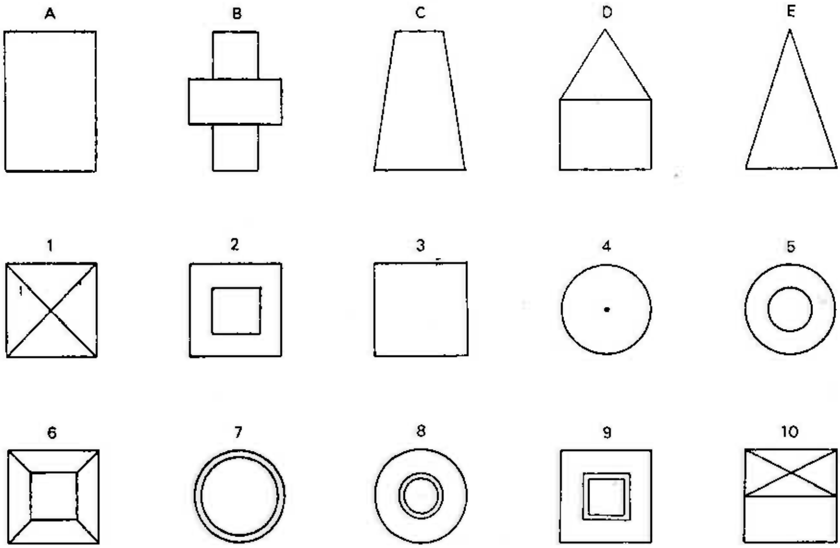


# XXI - VOIR DANS L'ESPACE

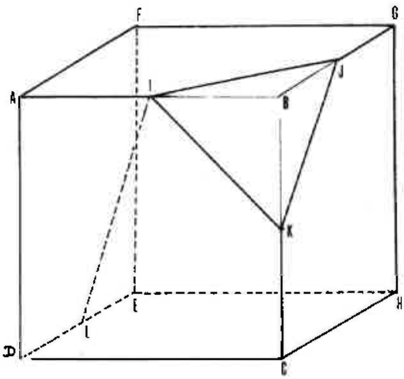
Les figures A, B, C, D et E sont des vues de face. Les figures numérotées de 1 à 10 représentent les mêmes solides vus d'en-haut, mais personnes ne se souvient plus des paires de vues qui se correspondent.

Quelles sont les paires de représentations possibles. Décrire les solides correspondants et en donner une représentation en perspective.

*Exemples :* A,3 parallélépidède rectangle.
A,2 tube carré.



# XXII - AUTOUR DU CUBE




Les points A, B, C, D, E, F, G, H sont les sommets d'un cube.

I est le millieu de AB.
J est le milieu de BG.
K est le milieu de BC.
L est le milieu de DE.

*1)* Parmi les ensembles suivants, cocher ceux qui sont dans un même plan.

{B,J,G,H,K} ☐
{H,D,F,} ☐
{A,F,E,C}☐
{A,G,H,D}☐
{I,J,K,L} ☐
{I,L}☐

*2)* Parmi les paires de droites données ci-dessous, cocher celles qui sont coplanaires.

| AF et AD ; | IJ et AG ; | LK et EF ; | BC et EF ; | IL et LH ; | GH et LH |
|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

*3)* Parmi les paires de droites données ci-dessous, cocher celles qui sont parallèles.

| FE et BC ; | IJ et LH ; | AG et DH ; | IG et AG ; | BJ et DE ; | IK et LC |
|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

*4)* Cocher, parmi les paires de plans définies ci-dessous, les plans parallèles.

| ABC et FGH ; | IJK et ECH ; | IJK et AGC ; | LIK et HJK |
|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

*5)* Parmi les paires de droites données ci-dessous, cocher celles qui sont orthogonales.

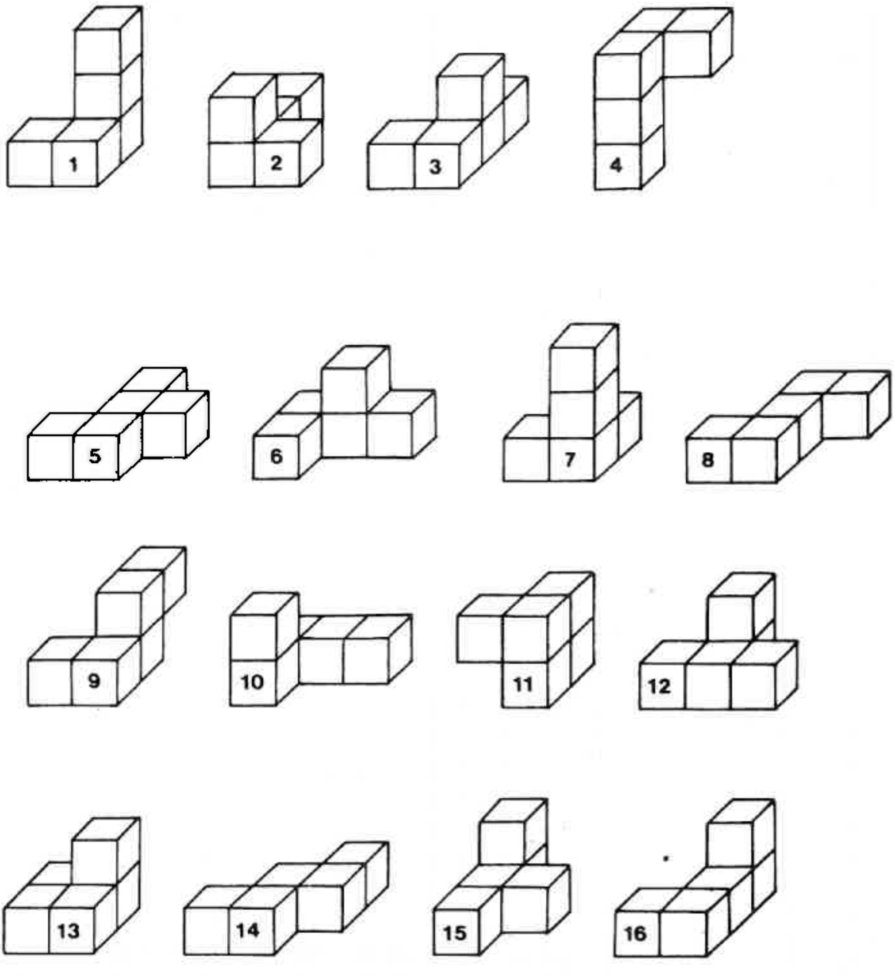
| AB et FE ; | IL et IK ; | CH et HE ; | GF et AD ; | BC et EF |
|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

*6)* Cocher, parmi les paires de plans définies ci-dessous, ceux qui sont perpendiculaires.

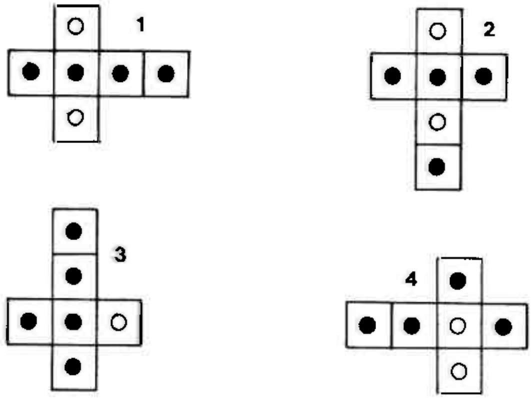
| ABC et CHG ; | ABC et FGH ; | AHD et BCE ; | IJK et BEC |
|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

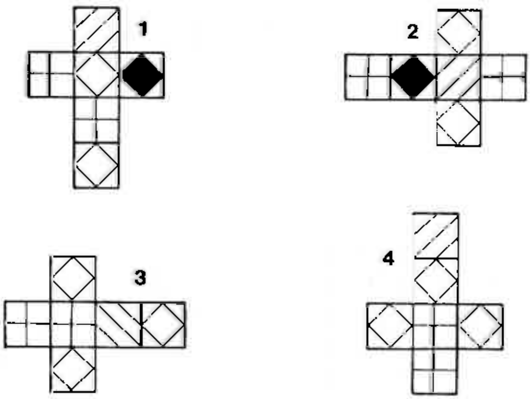
*7)* Construire, en complètant le dessin donné, la droite d'intersection des plans IJK et ECH.

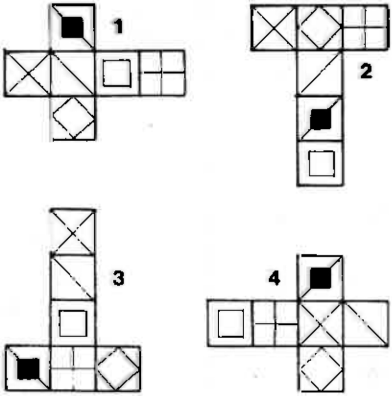
*8)* Les solides représentés ci-dessous sont des assemblages de cubes dont chacun a au moins une face commune avec l'un des autres (des « polycubes »). Certains de ces solides ont été représentés deux ou plusieurs fois ; lesquels ?

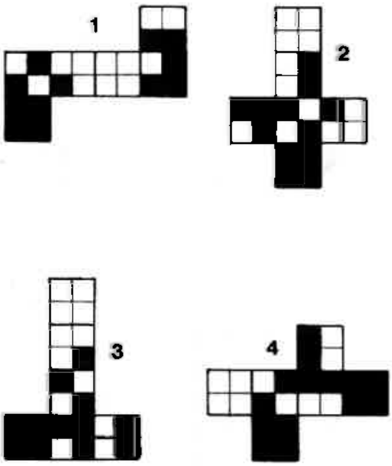


*9)* D'après un test publié par « Le Point » dans son numéro du 8 août 1983, dans chacune des séries de quatre dessins ci-dessous, deux des figures sont l'intérieur et l'extérieur d'un même cube développé d'une autre manière. Lesquels ?




1
2
3
4


1
2
3
4

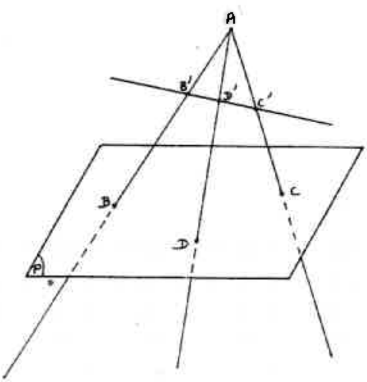
# XXIII - PLAN, PLAN, PLAN ET RANTANPLAN

Pour comprendre la géométrie de l'espace, il est nécessaire de manipuler des solides. Cependant cela ne suffit pas pour bien appréhender les diverses règles d'incidence. La contemplation de représentations erronées de figures de l'espace permet de dégager, en corrigeant les erreurs constatées, les diverses règles d'incidence et en facilite le mode d'emploi.

Cette fiche est composée de deux parties :

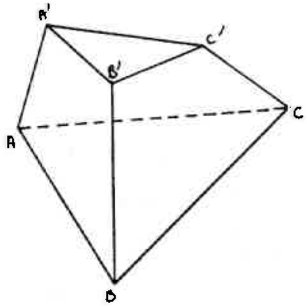
1) Dans la première, on demande d'analyser et de critiquer un dessin d'une figure de l'espace.
2) Dans la deuxième, on demande de reconnaître si un dessin en perspective cavalière représente une figure de l'espace ou non.

**I** - 1) On considère un plan P, deux points distincts B et C de ce plan, et A un point qui n'appartient pas à ce plan.



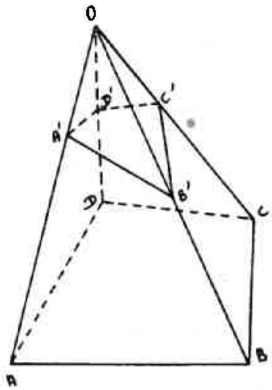

Soit B' un point de (AB) et C' un point de (AC). Une droite passant par A coupe (B'C') en un point D' et le plan P en un point D.
Le dessin est faux. Pourquoi ?
Faire un dessin exact.

2) On a voulu représenter sur le dessin suivant un tétraèdre ABCD tronqué.

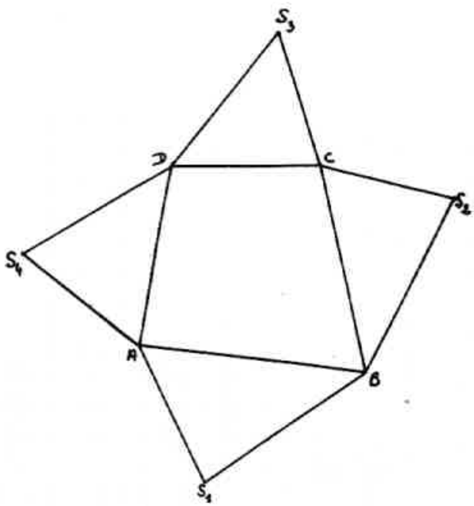



Mais ce dessin est faux. Pourquoi ?
Faire un dessin exact.

3) On considère une pyramide OABCD. L'intersection de cette pyramide et du plan (A'B'C') est un quadrilatère A'B'C'D'.

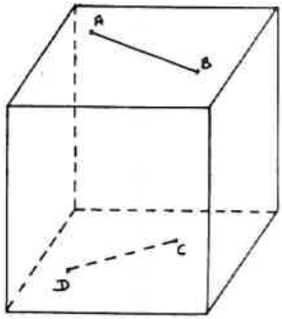



Ce dessin est faux. Pourquoi ?
Faire un dessin exact.

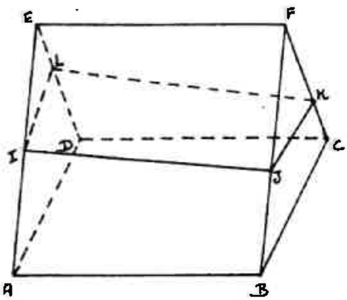



4) Voici un « patron ». Permet-il d'obtenir une pyramide de sommet S et de base ABCD ?
Réaliser le patron d'une pyramide.

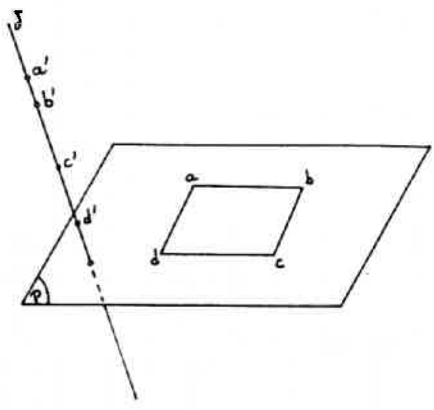
II - 1) Les segments [AB] et [CD] appartiennent à deux faces opposées du cube. Le quadrilatère ABCD est-il un quadrilatère plan ?



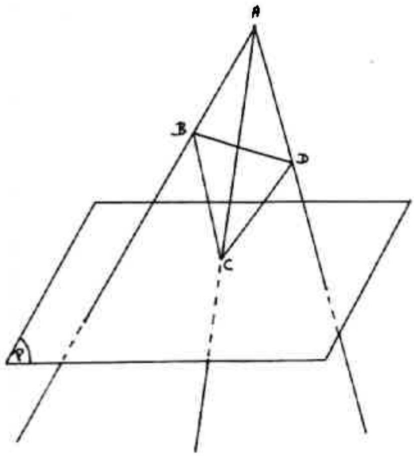

2) ABCDEF est un prisme, les quadrilatères ABCD, ABFE et CDEF étant des parallélogrammes. Le quadrilatère IJKL est-il un quadrilatère plan ?




3) a, b, c, d sont les projections sur P parallèlement à $\delta$ de quatre points, A, B, C, D de l'espace et a', b', c', d' sont les projections sur $\delta$ parallèlement à P de ces mêmes points.
abcd est un parallélogramme ; ABCD est-il un quadrilatère plan ?



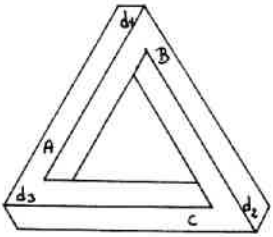
4) Sur le dessin ci-contre, le quadrilatère ABCD est-il un quadrilatère plan ?




## III -

A titre de curiosité

Voici un dessin du triangle de Penrose. Il n'existe pas d'objet de l'espace dont il soit la représentation plane si l'on donne comme hypothèses :




1. Les lignes droites du dessin sont des lignes droites dans le modèle réel.
2. Les parties A, B et C sont des surfaces planes.
3. Les plans A et B se coupent selon la droite $d_1$, les plans B et C selon la droite $d_2$, les plans C et A selon la droite $d_3$.

Démonstration :

Trois plans dont aucun n'est parallèle à l'un des deux autres doivent avoir leurs droites d'intersection soit parallèles, soit concourantes en un point P. Les plans A, B et C sont dans la situation décrite ci-dessus. Cependant les droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$ ne sont ni parallèles ni concourantes. Ce dessin n'est donc pas la représentation plare d'une figure de l'espace.

# XXIV - LES POLYEDRES DE PLATON

## INTRODUCTION

Le travail de cette fiche permet d'utiliser bien des connaissances de géométrie dans l'espace ou d'y accéder. Interviennent entre autres : la représentation plane des figures de l'espace, les constructions de solides, les calculs de volume, la géométrie plane chaque fois qu'on isole une figure plane de la configuration étudiée, la droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

Dans la deuxième activité, plusieurs démonstrations sont proposées. Les unes permettent d'arriver plus vite au but, évitent l'emploi de la droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné, mais utilisent aussi le procédé intéressant de partition d'un ensemble. Les autres fournissent une application des règles de géométrie dans l'espace. Les questions sont détaillées pour demander aux élèves de justifier des résultats qu'ils pourraient se contenter de « lire » sur la figure.

## I - PREMIERE ACTIVITE

Construction des cinq solides dits platoniciens.

**1° Matériel :** 6 allumettes, 2 chemises de carton mince, scotch, règle, crayon, compas, rapporteur, ciseaux.

**2° Définition :** Un polyèdre est un solide limité par des faces planes. Un polyèdre de Platon est un polyèdre convexe et régulier.

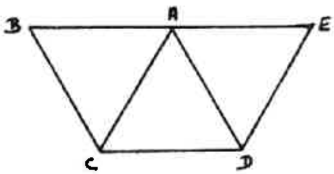
- convexe : il est entièrement situé d'un même côté du plan contenant l'une quelconque de ses faces ;
- régulier : toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques, et en chaque sommet du polyèdre se rejoignent le même nombre de faces.

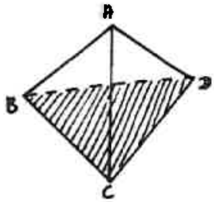
**3° Construction :**

*1) Question :* comment construire quatre triangles équilatéraux avec 6 allumettes ?

*2)* Dessiner des triangles équilatéraux isométriques et les découper. Réunir trois de ces triangles comme l'indique la figure 1 et les assembler à l'aide de scotch de façon que les côtés communs à deux triangles restent bord à bord. Puis amener l'un contre l'autre les côtés AB et AE et scotcher.

L'objet obtenu peut être appelé un toit à trois pentes et il peut être fermé à l'aide d'un quatrième triangle équilatéral : en effet, les points B, C et D déterminent un plan et les segments [BC], [CD] et [BD] ont même longueur. Le solide obtenu vérifie les propriétés d'un polyèdre de Platon ; notamment en chaque sommet du polyèdre se réunissent le même nombre de faces. Le solide est un tétraèdre régulier.




*3)* Commencer maintenant le montage en réunissant à plat quatre triangles équilatéraux au lieu de trois : un dessin semblable à celui de la figure 1 contiendrait en supplément un triangle équilatéral AEF. Puis amener l'un contre l'autre les côtés AB et AF et scotcher.

*Questions :* — Combien de pentes a ce nouveau toit ?
— Combien faut-il ajouter de faces qui aboutissent au sommet B, si l'on veut obtenir un polyèdre de Platon ?
— Peut-on fermer cet objet de façon à obtenir un polyèdre de Platon ?

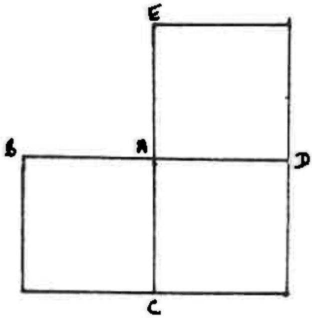
**N.B.** La réponse à la dernière question est « oui » et ce solide s'appelle un octaèdre.

*4)* Recommencer, en démarrant le montage avec cinq triangles équilatéraux réunis en un sommet A.
Le solide obtenu est un icosaèdre : polyèdre limité par vingt faces.

*Question :* Que se passe-t-il lorsqu'on commence le montage en prenant six triangles équilatéraux, sept triangles équilatéraux, etc.

*5)* Dessiner des carrés isométriques et les découper.

Réunir trois de ces carrés de façon qu'ils aient un sommet en commun comme l'indique la figure 3, mettre du scotch sur les côtés AC et AD, plier le long de ces côtés pour amener l'un contre l'autre les côtés AB et AE.




Compléter cette figure de l'espace de façon à obtenir un solide de Platon. Qu'obtient-on ?

*Question :* Peut-on obtenir une figure non plane en assemblant ainsi en un même sommet A plus de trois carrés ?

*6)* Dessiner des pentagones réguliers et isométriques et les découper. Pour ces dessins, on peut représenter le cercle circonscrit au pentagone et tracer les angles au centre à l'aide du rapporteur.

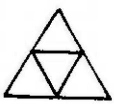
*Question :* En s'inspirant des réalisations précédentes, combien peut-on réunir de pentagones réguliers en un même sommet et accolés bord à bord pour former une figure non plane de l'espace ?

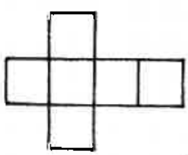
Connaissant le nombre de faces qui se rejoignent en un même sommet, compléter le solide pour obtenir un polyèdre de Platon, si cela est possible.

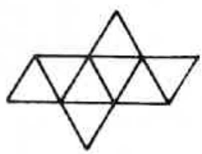
Un dodécaèdre est un polyèdre limité par douze pentagones réguliers et isométriques.

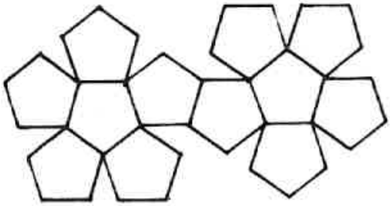
*Question :* Que se passe-t-il lorsqu'on remplace les carrés ou les pentagones par des hexagones ?

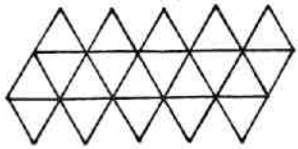
**4° Résumé :** Les polyèdres réguliers de Platon sont au nombre de 5 : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre. Voici des patrons possibles pour chacun de ces polyèdres.











*N.B.* Il ne faudra pas utiliser les patrons dans la dimension donnée si on veut obtenir autre chose qu'une boulette de papier.

## II - DEUXIEME ACTIVITE

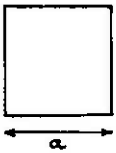
Calcul d'aires et de volumes pour le cube, le tétraèdre et l'octaèdre.

### 1° Rappels

*1)* Aires

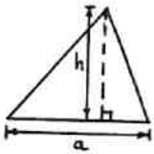
carré

$S = a^2$

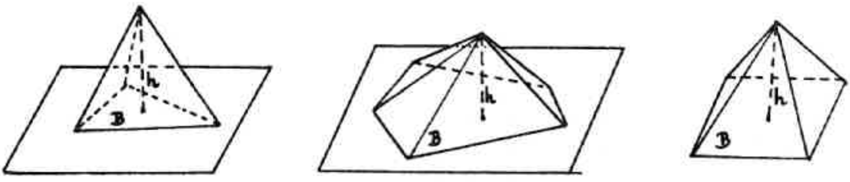



triangle

$S = \frac{ah}{2}$




*2)* Volumes

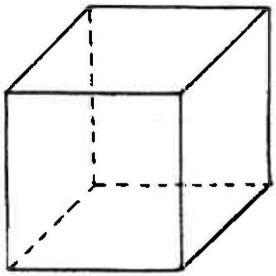



Tétraèdre ou pyramide : $V = \frac{B \times h}{3}$

*3)* Pour les représentations planes des figures de l'espace, nous observons les règles de la perspective cavalière : des segments de même direction et de même longueur sont représentés par des segments de même direction et de même longueur.

Dans la suite nous noterons a la longueur de l'arête du polyèdre régulier pour lequel nous calculerons l'aire S de sa surface extérieure et le volume V.

## 2° Le cube



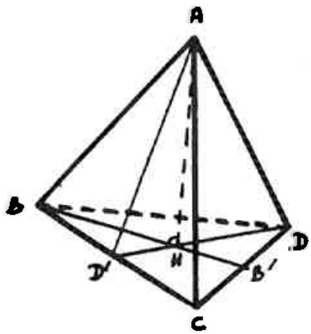
*Questions*

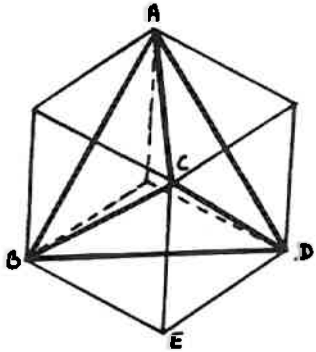
— Vous connaissez un patron de cube. Quelle est l'aire S de la surface extérieure d'un cube d'arête a ?

— Quel est le volume d'un cube d'arête a ?

*Réponses :* $S = 6\,a^2$ et $V = a^3$.

## 3° Le tétraèdre régulier




*1)* Aire

*Question :* Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté a. En déduire l'aire de la surface extérieure d'un tétraèdre d'arête a.

*2)* Volume

Voici deux démonstrations : faites votre choix.

*A - Première démonstration (fig. 5)*

La base du tétraèdre est un triangle équilatéral de côté a. La droite (AH) est orthogonale au plan (BCD). Posons h = AH.

*Questions :* — Calculer l'aire B de la base du tétraèdre.

— Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (AD'D) et que la droite (CD) est orthogonale au plan (AB'B), avec D' milieu de [BC] et B' milieu de [CD].

— Démontrer que les plans (AD'D) et (AB'B) sont sécants et que leur droite d'intersection est orthogonale au plan (BCD).

— Soit H le point d'intersection de cette droite et du plan (BCD). Que représente le point H pour le triangle BCD ? Calculer DH.

— Quelle est la nature du triangle AHD ? Calculer h.

— Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.

*B - Deuxième démonstration (fig.6)*

Le tétraèdre ABCD est inscrit dans un cube. En ôtant du cube quatre tétraèdres identiques à BCDE, nous obtenons le tétraèdre ABCD.

*Questions :* — Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier.

— Calculer l'arête a' du cube en fonction de l'arête a tétraèdre ABCD.

— Calculer le volume du tétraèdre BCDE (base BED, hauteur EC).

— En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

*Réponses :* $S = a^2\sqrt{3}$, $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12} a^3$

### 4° L'octaèdre régulier

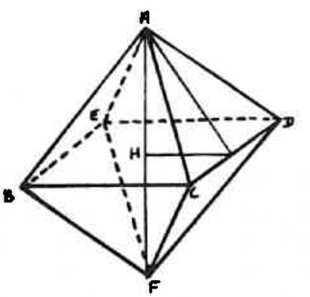



fig 7

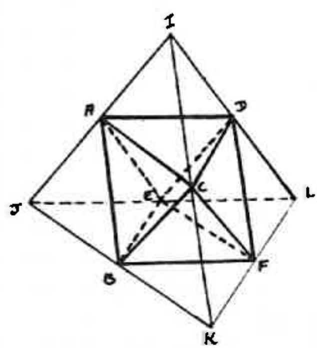



fig 8

*1)* Aire

Comme pour le tétraèdre régulier, les faces de l'octaèdre régulier sont des triangles équilatéraux de côté a.
Calculer l'aire de la surface extérieure de l'octaèdre régulier d'arête a.

*2)* Volume

Voici deux démonstrations : faites votre choix.

*A- Première démonstration (fig.7)*

L'octaèdre est constitué de deux pyramides de même volume : ABCDE et FBCDE.

*Questions :* — Calculer l'aire de la base BCDE.

— Calculer la hauteur AH.

— En déduire le volume d'une pyramide ABCDE puis le volume V de l'octaèdre.

*Remarque :* A est équidistant de B, C, D et E donc H est équidistant de B, C, D et E. Le losange BCDE est donc un carré. De même AEFC et ABFD sont des carrés.

*B- Deuxième démonstration (fig.8)*

Les points A, B, C, D, E et F sont les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier IJKL.

*Questions :* — Démontrer que l'octaèdre ABCDEF est un octaèdre régulier.

— Calculer l'arête a' du tétraèdre IJKL en fonction de l'arête a de l'octaèdre ABCDEF.

— En ôtant du tétraèdre IJKL quatre tétraèdres identiques à IACD, on obtient l'octaèdre ABCDEF. Calculer les volumes des tétraèdres IJKL et IACD. En déduire le volume de l'octaèdre ABCDEF.

*Réponses :* $S = 2\,a^2\sqrt{3}$ et $V = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$

$S = 2a^2\sqrt{3}$

*

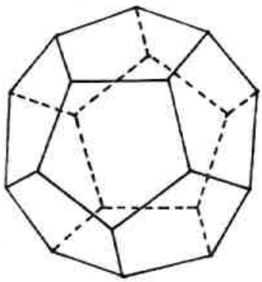
* *

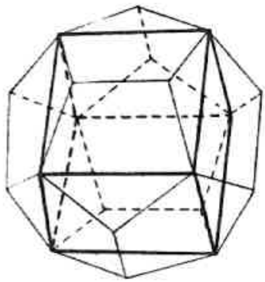
**III - TROISIEME ACTIVITE** pour les curieux et les courageux

Calcul d'aires et de volumes pour le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Cette étude — difficile pour des élèves de seconde — figure ici pour ne pas oublier deux des solides de Platon. Peut-être pourra-t-on la proposer aux plus curieux et courageux des élèves. Nous signalons qu'elle nécessite l'étude préalable de la fiche sur le pentagone régulier.

**1° Le dodécaèdre régulier**





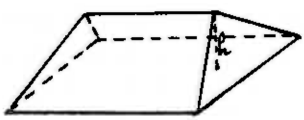
*1)* Aire : les douze faces du dodécaèdre sont des pentagones réguliers de côté a. L'aire d'un pentagone régulier a été calculée dans la fiche « Pentagone et Nombre d'or ».

$$S = 6\,a^2 \left(\sqrt{\Phi^2 - \frac{1}{4}} + \Phi\sqrt{4 - \Phi^2}\right)$$

$$\text{ou } S = 3\,a^2\,(3\Phi + 1)\sqrt{3 - \Phi}$$

*2)* volume : Le dodécaèdre est la réunion d'un cube d'arête d, diagonale d'un pentagone de côté a, et de six « toits ».
L'arête d d'un pentagone est telle que $d = a\Phi$, $\Phi$ étant le nombre d'or ; le cube a donc pour volume $d^3 = a^3\,\Phi^3$.

Cherchons le volume de chacun des toits.



*Questions :*

— Calculer la hauteur h du toit.

— Décomposer le toit en un prisme droit et deux solides dont la réunion est une pyramide de base rectangulaire et de hauteur h.

— Rappeler la formule qui permet de calculer le volume d'un prisme droit et celle qui permet de calculer le volume d'une pyramide.

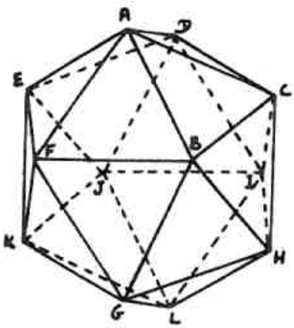
— Calculer le volume v d'un toit.

On obtient $v = \frac{1}{6} a^3 + \frac{1}{4} a^3 \Phi$

Le volume d'un dodécaèdre d'arête a est donc :

$$V = a^3 (\frac{7}{2} \Phi + 2)$$

## 2° L'icosaèdre régulier




*1)* Aire

L'icosaèdre a 20 faces ; ces faces sont des triangles équilatéraux de côté a. Donc :

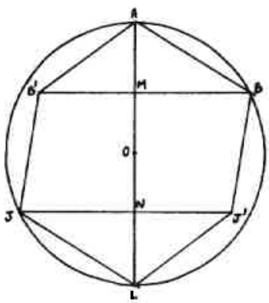
$$S = 5 a^2\sqrt{3}$$

*2)* Volume

L'icosaèdre est inscriptible dans une sphère dont nous pouvons trouver le centre et le rayon. Il est réunion de vingt tétraèdres ; chacun d'eux a pour base une face de l'icosaèdre et pour 4$^e$ sommet le centre de la sphère. Connaissant le volume d'un tel tétraèdre, nous en déduirons facilement le volume de l'icosaèdre.

Attention : un tel tétraèdre n'est pas un tétraèdre régulier. Sa base est un triangle équilatéral de côté a ; il nous faut trouver sa hauteur h.

Construisons la coupe de l'icosaèdre avec un plan de symétrie de l'icosaèdre. La section obtenue est un hexagone dont deux côtés sont des arêtes de l'icosaèdre et les quatre autres côtés sont des hauteurs de triangles équilatéraux. Cet hexagone a pour centre de symétrie le centre de la sphère, mais n'est pas inscriptible dans un cercle. Considérons néanmoins le cercle intersection de la sphère circonscrite à l'icosaèdre et du plan de symétrie. Un diamètre de ce cercle joint deux sommets de l'hexagone : A et L. La droite (AL) coupe le plan du pentagone BCDEF en M et le Plan du pentagone GHIJK en N.



— Calculer les longueurs AM, MN et NL.
— En déduire le rayon R de la sphère.
— Dans le tétraèdre OBGH, le point O est équidistant de B G et H. Il se projette orthogonalement sur le plan BGH en un point équidistant de B, G et H, c'est-à-dire au centre de gravité de ce triangle équilatéral.
Calculer h.
— En déduire le volume v du tétraèdre OBGH et le volume V de l'icosaèdre.

*Réponses :*

$$R = \frac{1}{2} a \frac{3\Phi + 1}{\sqrt{4\Phi + 3}} \; ; \; h = \frac{a\Phi^2}{2\sqrt{3}} \; ;$$

$$v = \frac{1}{24} a^3\Phi^2 \; ; \; V = \frac{5}{6} a^3\Phi^2$$

(indication : des égalités telles que $\Phi^4 = (\Phi + 1)^2 = 3\Phi + 2$ ou $29\Phi + 18 = (3\Phi + 2)(4\Phi + 3)$ peuvent servir dans les calculs).

# XXV -
# ETES-VOUS TROP MATHISES ?

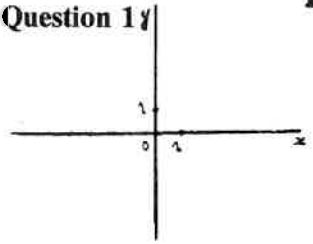
Les trois tests proposés ici sont des tests d'analyse : le premier est un test sur les pré-requis qui semblent indispensables à un élève de seconde pour en suivre l'enseignement avec profit. Dans notre esprit, il a son utilité avant tout enseignement d'analyse et doit permettre les mises au point nécessaires à celui-ci.

Le second est un test sur des acquis jugés fondamentaux dans le programme de seconde. La réussite à un tel test demande un apprentissage sérieux et une compréhension rigoureuse mais ponctuelle de ces concepts.

Le troisième porte à la fois sur des connaissances inscrites au programme de seconde et sur un savoir-faire dans leur mise en œuvre conjuguée : ainsi l'utilisation de transformations géométriques simples est riche de possibilité dans l'étude des fonctions. La réussite à un tel test demande davantage d'imagination et d'organisation de ces connaissances, donc une appréhension plus globale du programme.

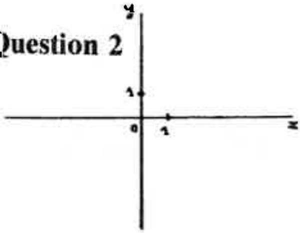
# TEST N° 1

**Question 1**



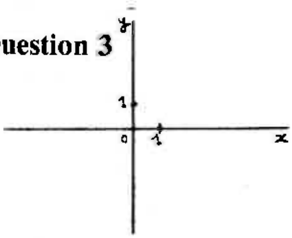
Représenter en rouge l'ensemble E des points dont l'abscisse est strictement positive.
Compléter :
E = {M(x,y) / ......>O}

**Question 2**



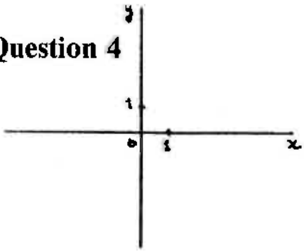
Représenter en rouge l'ensemble E des points dont l'ordonnée est négative ou nulle.
Compléter :
E = {M(x,y) / ......}

**Question 3**



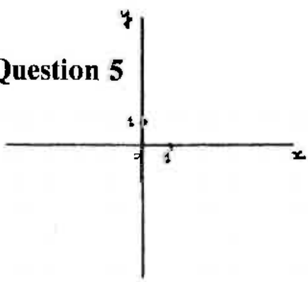
Représenter en rouge l'ensemble E des points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse.
Compléter :
E = {(x,y) / ......}

**Question 4**



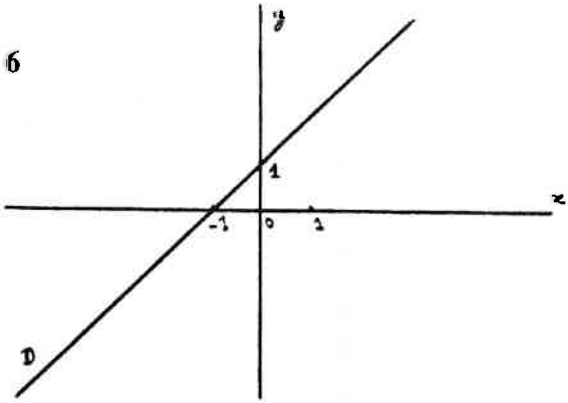
Représenter en rouge l'ensemble E des points dont l'ordonnée est strictement inférieure à l'abscisse.
Compléter :
E = {M(x,y) / ......}

**Question 5**



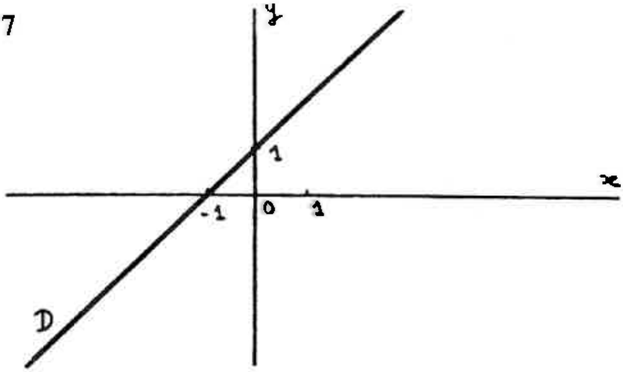
Représenter en rouge l'ensemble E des points dont l'ordonnée est l'opposée du double de l'abscisse.
Compléter :
E = {M(x,y) / ......}

**Question 6**



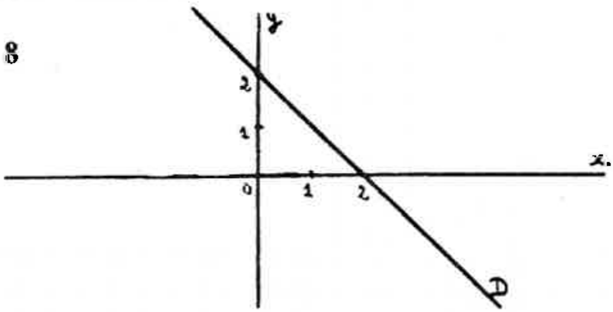

Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une abscisse négative et une ordonnée positive.

**Question 7**



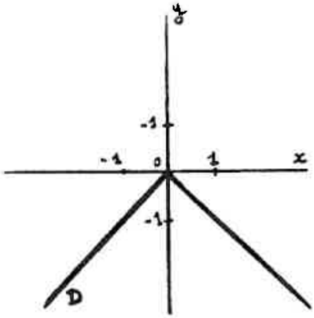

Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une abscisse comprise entre 1 et 2.

**Question 8**




Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une ordonnée comprise entre 1 et 2.

**Question 9**

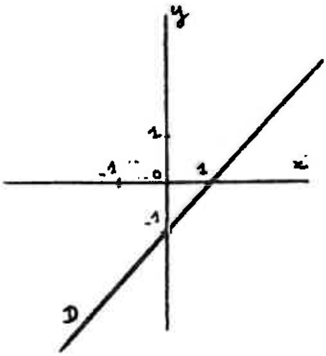



Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une ordonnée et une abscisse de même signe.

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(e) :

| | OUI | NON | JE NE SAIS PAS |
|---|---|---|---|
| $E = \{M(x,y) \in D / x = y\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / xy \geqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / x \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / y \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |

**Question 10**

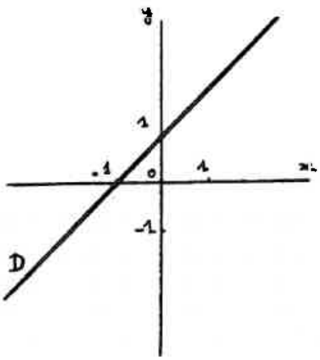



Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une abscisse positive et une ordonnée négative.

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

| | OUI | NON | JE NE SAIS PAS |
|---|---|---|---|
| $E = \{M(x,y) \in D / x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / xy \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |

**Question 11**

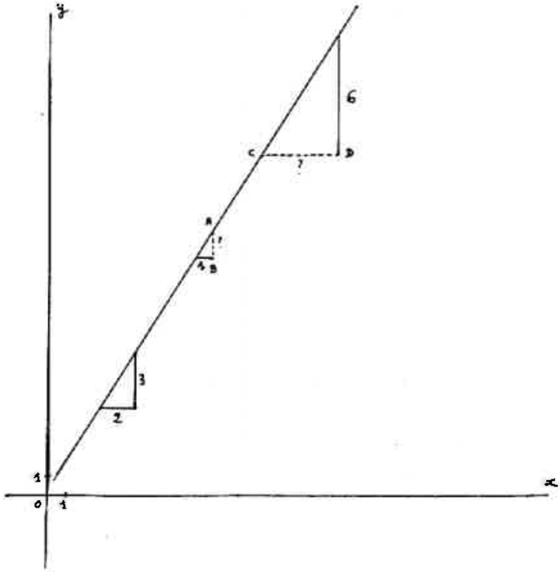



Représenter en rouge la partie E de D dont les points ont une abscisse positive ou une ordonnée négative.

Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

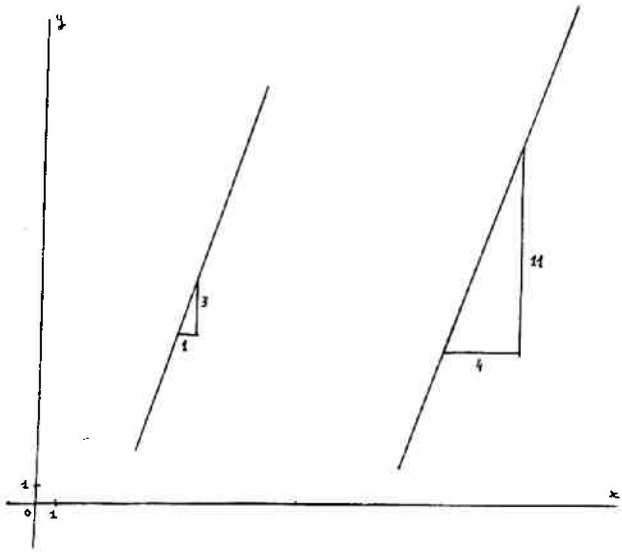
| | OUI | NON | JE NE SAIS PAS |
|---|---|---|---|
| $E = \{M(x,y) \in D / x \geqslant 0$ ou $y \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / xy \leqslant 0\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |
| $E = \{M(x,y) \in D / -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ | ☐ | ☐ | ☐ |

**Question 12**




Quelles sont les mesures des segments AB et CD ?
Remplir :
la mesure du segment AB est : .....................................unités.
la mesure du segment CD est : .....................................unités.

**Question 13**

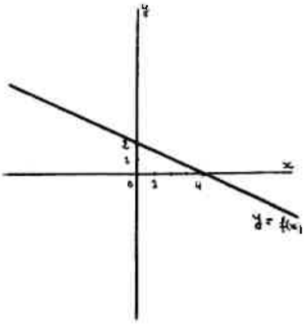


Les deux droites représentées sont-elles parallèles ?

☐ OUI POURQUOI ? ..........................................................
..........................................................

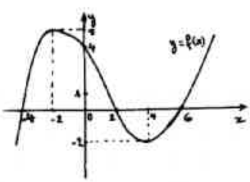
☐ NON POURQUOI ? ..........................................................
..........................................................

**Question 14**

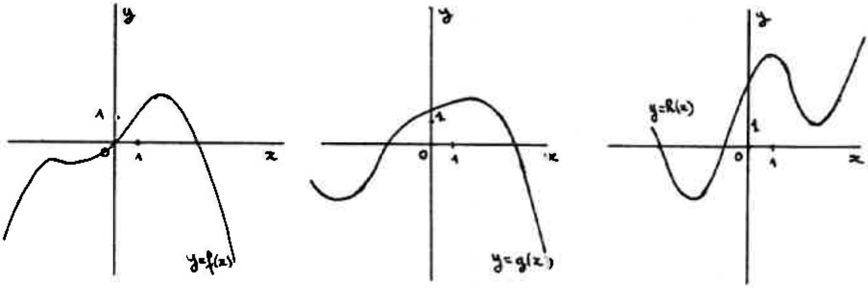



Compléter :
a* f(O) = .....
b* f(−4) = .....
c* f(x) > O si et seulement si x .....
d* f(x) ..... si et seulement si x < O
e* si x varie de − 6 à 4, f(x) varie de ..................................
f* Pour quelles valeurs de x a-t-on
f(x) = O ? ..........................
f(x) = 1 ? ..........................

**Question 15**




Compléter :
a* f(O) = ............................
b* si x varie de O à 4, f(x) varie entre ............... et ...............
c* si x varie de − 4 à 2, f(x) varie entre ........... et ...........
d* si x varie de − 4 à 6, f(x) varie entre ........... et ...........
e* Pour quelles valeurs de x a-t-on
f(x) = O ? ......................
f(x) = 4 ? .........................



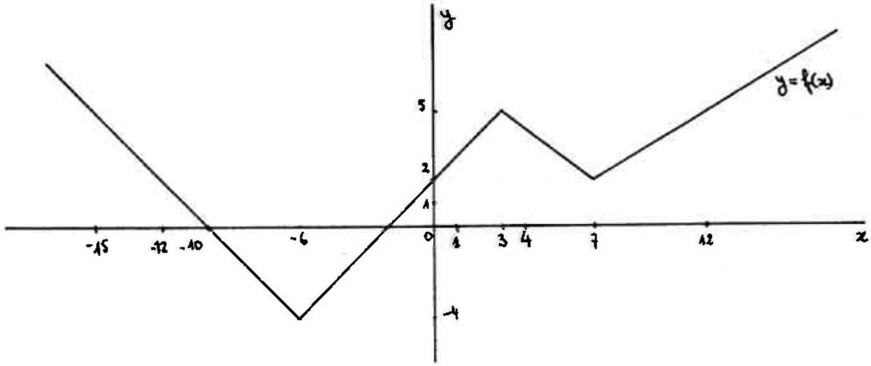

Mettre une croix dans les cases correspondantes :

| Questions | f | g | h |
|---|---|---|---|
| a* Le point A(2,2) appartient à la représentation graphique de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| b* Les points A (2,2), B (−3,−2), C (−1,1) appartiennent à la représentation graphique de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| c* Les points A (2,2), C (−1,1), D (4,−1) appartiennent à la représentation graphique de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| d* Le point C(−1,1) n'appartient pas à la représentation graphique de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| e* Le point E (1,3) n'appartient pas à la représentation graphique de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| f* La représentation graphique qui ne contient pas des points M(x,y) tels que x<0 et y>0 est celle de : | ☐ | ☐ | ☐ |
| g* La représentation graphique qui ne contient pas des points M(x,y) tels que x>0 et y<0 est celle de : | ☐ | ☐ | ☐ |

## Question 17

La représentation graphique de f comprend deux demi-droites et deux segments de droite.

1) Cocher et remplir :
a*Existe-t-il une ou des valeurs de x telles que f(x) = 5 ?
NON ☐
OUI ☐ COMBIEN ? .................. LESQUELLES ? ..................
LE GRAPHIQUE NE PERMET PAS DE REPONDRE ☐




b* Existe-t-il une ou des valeurs de x telles que f(x) = O ?
NON ☐
OUI ☐ COMBIEN ? .................. LESQUELLES ? ..................
LE GRAPHIQUE NE PERMET PAS DE REPONDRE ☐

c* Existe-t-il une ou des valeurs de x telles que f(x) = – 4 ?
NON ☐
OUI ☐ COMBIEN ? .................. LESQUELLES ? ..................
LE GRAPHIQUE NE PERMET PAS DE REPONDRE ☐

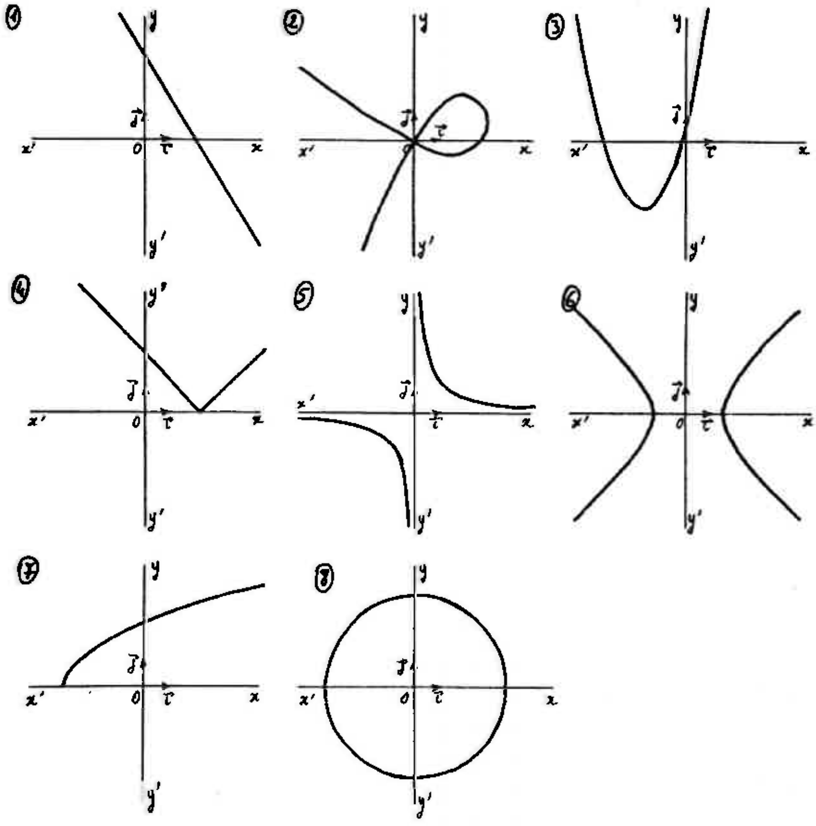
2) Mettre une croix dans les cases correspondantes :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | plus de 4 | on ne peut pas savoir |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a* Combien existe-t-il de valeurs de x telles que f(x) = 5 ? | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| b* Combien existe-t-il de valeurs de x telles que f(x) = 4 ? | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| c* Combien existe-t-il de valeurs de x telles que f(x) = 50 ? | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| d* Combien existe-t-il de valeurs de x telles que f(x) = – 15 ? | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

# TEST N° 2

Nous vous conseillons d'utiliser une feuille de brouillon.

**1. Voici quelques courbes :**




*Questions :* Ces figures sont-elles des représentations graphiques de fonctions* ? Pour chacune d'elles répondre par oui ou par non.

1 :

2 :

3 :

4 :

5 :

6 :

7 :

8 :

* dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$

**2. Voici quelques fonctions :**

$f_1 : x \mapsto 4x - 8$ ; $f_2 : x \mapsto x^2 - 4$ ; $f_3 : x \mapsto x + \dfrac{2}{x-2}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$ ; $f_5 : x \mapsto \dfrac{x-2}{x^2+2}$ ; $f_6 : x \mapsto \dfrac{3}{|x| - 2}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{-5}{|x-2|}$ ; $f_8 : x \mapsto \sqrt{x+2}$ ; $f_9 : x \mapsto \sqrt{2-x}$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

*Question :* Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions puis cocher le résultat obenu dans le tableau suivant

| | $\mathbf{R}$ | $\mathbf{R}-\{2\}$ | $\mathbf{R}-\{-2\}$ | $]-\infty;2]$ | $]2;+\infty[$ | autre ensemble précisez lequel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | | | | | |
| $f_2$ | | | | | | |
| $f_3$ | | | | | | |
| $f_4$ | | | | | | |
| $f_5$ | | | | | | |
| $f_6$ | | | | | | |
| $f_7$ | | | | | | |
| $f_8$ | | | | | | |
| $f_9$ | | | | | | |
| $f_{10}$ | | | | | | |

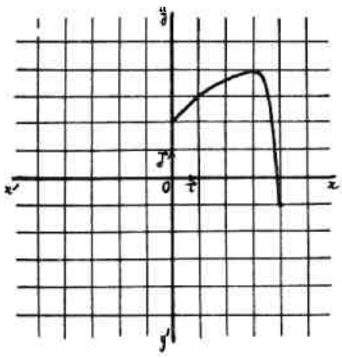
3. Donner un exemple de fonction ayant pour ensemble de définition :

a) $D_1 = \mathbf{R} - \{3\}$ $\qquad g_1 : x \mapsto$

b) $D_2 = \mathbf{R} - \{-5;1\}$ $\qquad g_2 : x \mapsto$

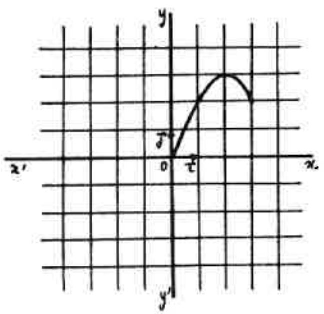
c) $D_3 = [1\ ;\ +\infty[$ $\qquad g_3 : x \mapsto$

4. Voici une partie de la représentation graphique d'une fonction paire définie sur $[-4\ ;\ 4]$. Compléter cette représentation graphique et donner le tableau de variation (complet) de la fonction.




| x |
|---|
| |

5. Voici une partie de la représentation graphique d'une fonction impaire définie sur [ – 3 ; 3]. Compléter cette représentation graphique et donner le tableau de variation (complet) de la fonction.




| x |
|---|
| |

6. Voici quatre fonctions. Dire pour chacune d'elles si elle est paire, ou impaire, ou, ni paire ni impaire. Justifier la réponse.

* $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 4}$

* $f_2 : x \mapsto x^3 + 2$

* $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x + 3}{x}$

* $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

7. Voici le tableau de variation d'une fonction définie sur $[-7 ; 7]$
Cocher les réponses dans le tableau suivant :

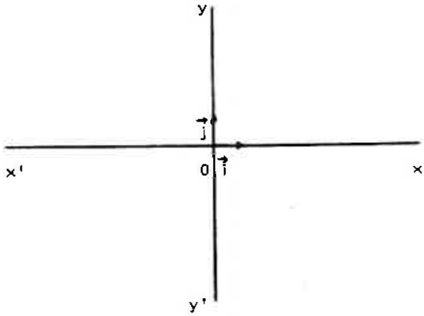
| x | -7 | | -3 | | 1 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | ↗ | 5 | ↘ | -2 | ↗ | 0 |

| | Vrai | Faux | On ne peut pas répondre |
|---|---|---|---|
| (a) $f(5) = -3$ | | | |
| (b) $f(-4) < 5$ | | | |
| (c) $< f(0) < 5$ | | | |
| (d) $-3 < f(0) < 1$ | | | |
| (e) $f(6) = 2$ | | | |
| (f) $f(3) = -1$ | | | |
| (g) f(x) s'annule trois fois sur $[-7;7]$ | | | |

8. Donner le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$ et vérifiant les conditions suivantes :
f est croissante sur $[-2 ; 0]$ ; $f(-2) = -1$ ; f admet en 0 un maximum ; $f(0) = 2$ ; f est décroissante sur $[0 ; 2]$ ; f admet un minimum en 2 ; $f(2) = 1$ ; f est croissante sur $[2 ; 4]$ ; $f(4) = 3$.

| x | |
|---|---|
| f(x) | |

9. Donner la représentation graphique d'une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :




f est définie sur $[-2 ; 5]$ ; f est croissante sur $[-2 ; 1]$ ; f est décroissante sur $[1 ; 5]$ ; $f(-2) = -4$ ; $f(0) = 3$ ; $f(5) = 1$

10. Déterminer l'ensemble de définition et étudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes. Conclure en donnant le tableau de variation de chaque fonction.

a) $f_1 : x \mapsto -2x + 3$

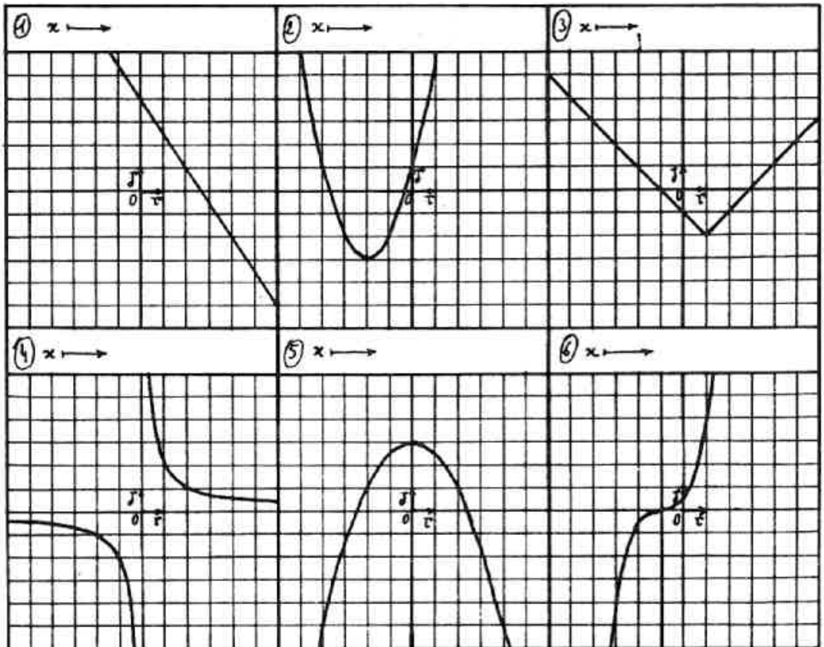
b) $f_2 : x \mapsto 3x^2 - 2$

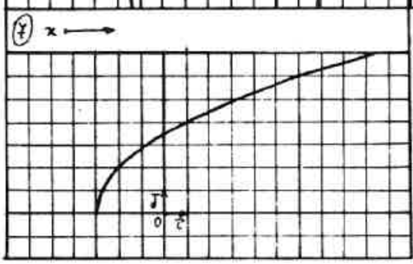
c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{2}{3 - x} + 1$

# TEST N° 3

1. Voici quelques représentations graphiques de fonctions. Chercher parmi les fonctions énumérées en bas de la page celle qui convient à chaque courbe représentative. Donner la réponse en remplissant la case prévue à cet effet.

(On ne demande pas de justificatif).




$x \to |x-1|-2$ ; $x \mapsto (x-2)^2+1$

$x \to |x+1|$ ; $x \mapsto x^2-2x-3$

$x \to |x|-2$ ; $x \mapsto (x+2)^2-3$

$x \to 2\sqrt{x+3}$ ; $x \mapsto -x^2+3$

$x \to \sqrt{x-3}$ ; $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2+3$

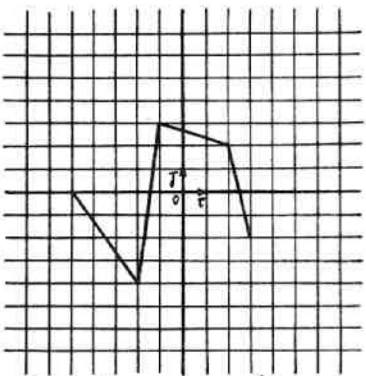
$x \to \sqrt{x+3{,}5}$ ; $x \mapsto 2x^2+3$

$x \mapsto 1{,}5x + 4$ ; $x \mapsto -3x + 4$ ; $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ ; $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$

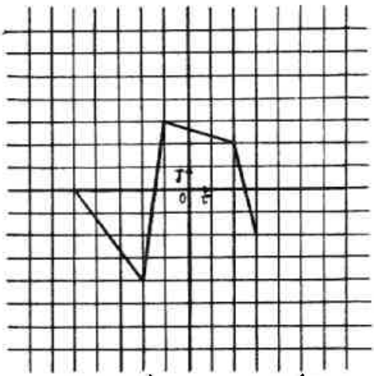
$x \mapsto -1{,}5 + 4$ ; $x \mapsto \dfrac{1}{2}(x+1)^3$ ; $x \mapsto \dfrac{-2}{x}$ ; $x \mapsto +(x+1)^3$

2. Voici la courbe représentative d'une fonction f. En déduire les courbes représentatives des fonctions g, h, i, j définies par g : $x \mapsto f(x) + 2$ ; h : $x \mapsto f(x-3)$ ; i : $x \mapsto f(x-3) + 2$ ; j : $x \mapsto -f(x)$.

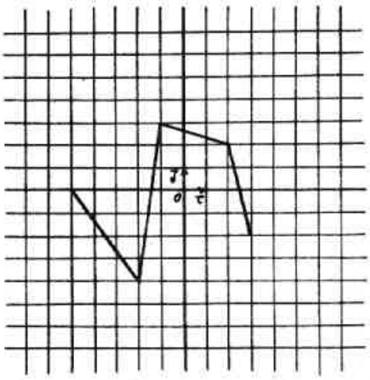
Dans chaque cas, indiquer la transformation qui a permis de construire la nouvelle courbe à partir de celle de f. S'il s'agit d'une translation, préciser le vecteur de translation.



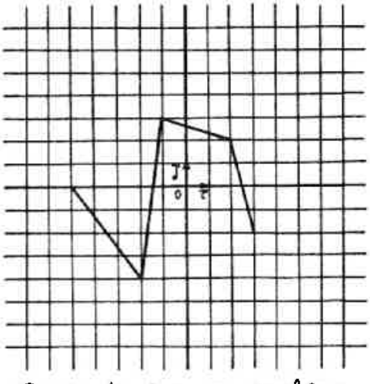
Représenter g sur ce graphique



Représenter h sur ce graphique

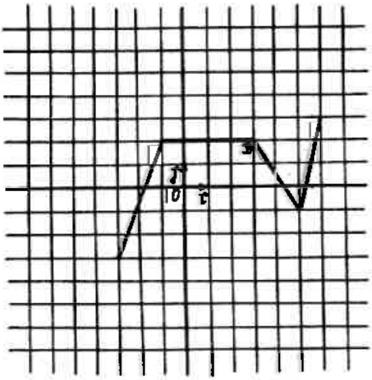


Représenter i sur ce graphique

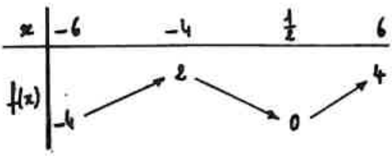


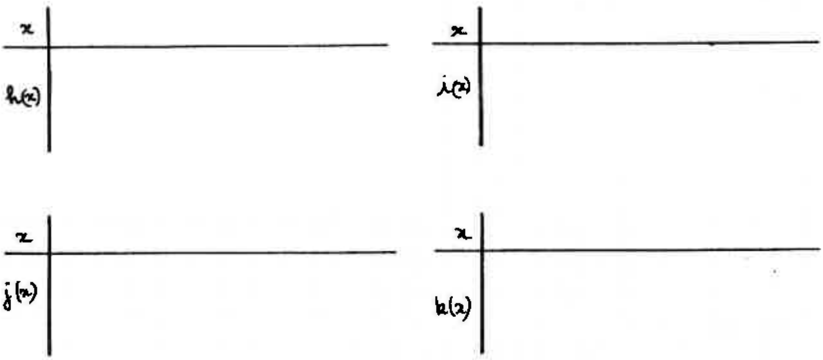
Représenter j sur ce graphique

3. Voici la courbe C représentative de f : x ↦ f(x). Le vecteur de la translation qui transforme B en 0 est : ...(...,...).
Dessiner la courbe C' transformée de C par cette translation. C' est la courbe représentative de g : x ↦ ...



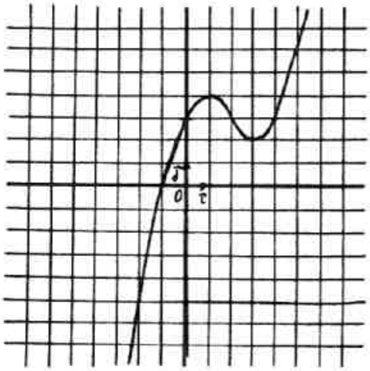
4. Voici le tableau de variation d'une fonction f. En déduire les tableaux de variation des fonctions h, i, j, k définies par :
h : x ↦ 2f(x) ; i : x ↦ − f(x) ; j : x ↦ f(x) + 2 ; k : x ↦ f(x − 3).



5. Voici la courbe C représentative d'une fonction f. On considère la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x ; y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x' ; y') telles que : $x' = -x$ et $y' = y$

Soit C' la courbe transformée de C. Dessiner C'.



Quelle est cette transformation ?...

C' est la courbe représentative de $x \mapsto$ ...

6. Voici la courbe représentative de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On considère l'homothétie du centre 0 et de rapport 2. On appelle C' la transformée de C par cette homothétie.

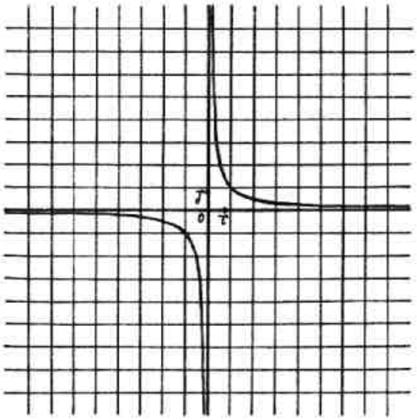
1) Dessiner 8 points de C'.

2) Soit M un point du plan, de coordonnées (x ; y), et M' de coordonnées (x' ; y') son image par cette homothétie. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

| |
|---|
| x' = ... |
| y' = ... |

3) Ecrire une relation reliant x et y, puis une relation reliant x' et y', lorsque M est un point de C et M' un point de C'.

Les points de C' appartiennent à la courbe représentative de : x ↦ ...



## BROCHURES DE L'A.P.M.E.P.

Sont indiqués pour chaque brochure la date de parution et le nombre de pages.

0. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au Calcul des Probabilités,* par L. Guerber et P.L. Hennequin, 1968, 232 p.

1. *Charte de Chambéry,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1968, 32 p.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes* par Jean Itard, 1969, 32 p.

5. *Eléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique* par J. Adda et W. Faivre, 1971, 52 p.

6. *Charte de Caen,* étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, 1972, 32 p.

8. *Mots I,* 1974, 100 p.

9. *Elem-Math I,* 1975, 56 p.

10. *Carrés magiques* par Belouze, Glaymann, Haug et Herz, 1975, 48 p.

11. *Mots II*, 1975, 108 p.

13. *Mathématique pour la formation d'adultes* (CUEEP) par P. Loosfelt et D. Poisson, 1976, 189 p.

14. *A la recherche du noyau des programmes de mathématiques du premier cycle. Savoir minimum en fin de troisième* (IREM de Toulouse - A.P.M.E.P.), 2e édition, 1976, 220 p.

15. *Mots III*, 1976, 136 p.

16. *Elem-Math II*, 1976, 56 p.

17. *Hasardons-nous*, 1976, 220 p.

19. *Elem-Math III, La division à l'école élémentaire*, 1977, 100 p.

20. *Quelques apports de l'Informatique à l'enseignement des mathématiques,* 1977, 280 p.

21. *Géométrie au premier cycle, tome I,* 1977, 208 p.

22. *Géométrie au premier cycle, tome 2,* 1978, 328 p.

23. *Pavés et bulles* par Françoise Pécaut, 1978, 288 p.

24. *Calculateurs programmables et algèbre de quatrième (une recherche inter-IREM),* 1978, 120 p.

25. *Mots IV,* 1978, 152 p.

26. *Elem-Math IV, Aides pédagogiques pour le Cours Préparatoire*, 1978, 64 p.

28. *Analyse des données, tome I,* 1980, 248 p.

29. *Elem-Math V, Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire,* 1979, 192 p.

30. *Les manuels scolaires de mathématiques,* 1979, 280 p.

32. *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978* dans le prolongement des Chartes de Chambéry et de Caen. (Ce texte figure aussi dans le Bulletin n° 314).

33. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome I,* 1979, 248 p.

35. *Du quotidien à la mathématique : une expérience en formation d'adultes,* 1979, 104 p.

36. *Elem-Math VI, Le triangle à l'Ecole Elémentaire,* 1980, 64 p.

37. *Mots V,* 1980, 114 p.

38. *Activités mathématiques en Quatrième-Troisième, tome 2,* 1981, 140 p.

40. *Analyse des données, tome 2,* 1980, 296 p.

41. *Fragments d'histoire des mathématiques,* 1981, 176 p.

42. *"Mini-grille" d'analyse des manuels scolaires de mathématiques,* 1981, 56 p.

43. *Mathématique active en Seconde,* 1981, 228 p.

44. *Jeu 1. Les jeux et les mathématiques,* 1982, 184 p. et 13 fiches.

45. *Mathématiques et Sciences Physiques en L.E.P., brochure U.d.P. — A.P.M.E.P.,* 1981, 48 p., gratuit.

46. *Mots VI : Grandeur — Mesure,* 1982, 134 p.

47. *Obstacles et déblocages en mathématiques, par M. Bruston et C. Rouxel,* 1982, 130 p.

48. *Evariste Galois (1811-1832), format 21×29,7,* 1982, 56 p.

49. *Elem-Math VII, Aides pédagogiques pour le cycle moyen,* 1983, 116 p.

50. *Du matériel pour les Mathématiques* (Journées de Poitiers 82), 1983, 100 p.

51. *Ciel, Passé, Présent,* par G. Walusinski, 1983, 222 p.

52. *Ludofiches 83* (19 fiches de Jeux), 1983.

53. *Musique et Mathématique,* par B. Parzysz et Y. Hellegouarch, 1983, 160 p.

54. *La Presse et les Mathématiques,* par M. Chouchan, 1984, 120 p.

55. *Algèbre des Carrés magiques,* par J.-M. Groizard, 1984, 80 p.

56. *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane,* par G. Audibert, 1984, 830 p.

57. *Mots VII,* 1985, 140 p.

D1. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, dictionnaire de l'A.P.M.E.P.,* 1962-1979, 113 notices, 211 fiches.

D2. *Dictionnaire A.P.M.E.P.,* millésime 1980, 20 fiches.

**Table de calcul des correspondances entre les dates et les jours**

# CALENDRIER PERPÉTUEL

| ANNÉES DE 1857 A 2036 | | | | | | | JANVIER | FÉVRIER | MARS | AVRIL | MAI | JUIN | JUILLET | AOUT | SEPTEMBRE | OCTOBRE | NOVEMBRE | DÉCEMBRE | a | b | JOURS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1857 | 1885 | ** | 1925 | 1953 | 1981 | 2009 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 1 | ** | DIM |
| 1858 | 1886 | ** | 1926 | 1954 | 1982 | 2010 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 2 | ** | LUN |
| 1859 | 1887 | ** | 1927 | 1955 | 1983 | 2011 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 3 | ** | MAR |
| 1860 | 1888 | ** | 1928 | 1956 | 1984 | 2012 | 0 | 3 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 4 | ** | MER |
| 1861 | 1889 | 1901 | 1929 | 1957 | 1985 | 2013 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 5 | ** | JEU |
| 1862 | 1890 | 1902 | 1930 | 1958 | 1986 | 2014 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 6 | ** | VEN |
| 1863 | 1891 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2015 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 7 | ** | SAM |
| 1864 | 1892 | 1904 | 1932 | 1960 | 1988 | 2016 | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 8 | 29 | DIM |
| 1865 | 1893 | 1905 | 1933 | 1961 | 1989 | 2017 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 9 | 30 | LUN |
| 1866 | 1894 | 1906 | 1934 | 1962 | 1990 | 2018 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 10 | 31 | MAR |
| 1867 | 1895 | 1907 | 1935 | 1963 | 1991 | 2019 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 11 | 32 | MER |
| 1868 | 1896 | 1908 | 1936 | 1964 | 1992 | 2020 | 3 | 6 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 12 | 33 | JEU |
| 1869 | 1897 | 1909 | 1937 | 1965 | 1993 | 2021 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 13 | 34 | VEN |
| 1870 | 1898 | 1910 | 1938 | 1966 | 1994 | 2022 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 14 | 35 | SAM |
| 1871 | 1899 | 1911 | 1939 | 1967 | 1995 | 2023 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 15 | 36 | DIM |
| 1872 | ** | 1912 | 1940 | 1968 | 1996 | 2024 | 1 | 4 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 16 | 37 | LUN |
| 1873 | ** | 1913 | 1941 | 1969 | 1997 | 2025 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 17 | ** | MAR |
| 1874 | ** | 1914 | 1942 | 1970 | 1998 | 2026 | 4 | 0 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 18 | ** | MER |
| 1875 | ** | 1915 | 1943 | 1971 | 1999 | 2027 | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 19 | ** | JEU |
| 1876 | ** | 1916 | 1944 | 1972 | 2000 | 2028 | 6 | 2 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 20 | ** | VEN |
| 1877 | 1900 | 1917 | 1945 | 1973 | 2001 | 2029 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 21 | ** | SAM |
| 1878 | ** | 1918 | 1946 | 1974 | 2002 | 2030 | 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 22 | ** | DIM |
| 1879 | ** | 1919 | 1947 | 1975 | 2003 | 2031 | 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 23 | ** | LUN |
| 1880 | ** | 1920 | 1948 | 1976 | 2004 | 2032 | 4 | 0 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 24 | ** | MAR |
| 1881 | ** | 1921 | 1949 | 1977 | 2005 | 2033 | 6 | 2 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 25 | ** | MER |
| 1882 | ** | 1922 | 1950 | 1978 | 2006 | 2034 | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 26 | ** | JEU |
| 1883 | ** | 1923 | 1951 | 1979 | 2007 | 2035 | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 27 | ** | VEN |
| 1884 | ** | 1924 | 1952 | 1980 | 2008 | 2036 | 2 | 5 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 28 | ** | SAM |

## Mode d'emploi

Pour vous permettre de savoir à quel jour de la semaine correspond une date quelconque, il vous suffit de deux repérages et d'une addition :

1° Rechercher dans l'une des colonnes de gauche **l'année** dont il est question.

2° Suivre la ligne horizontale jusqu'au **mois** qui vous intéresse.

3° Le chiffre trouvé à l'intersection des deux colonnes années et mois, doit être ajouté à la **date du jour** que vous recherchez.

4° L'addition de ces deux chiffres permet alors de former un nombre auquel vous vous reportez dans l'une des 2 colonnes de droite et auquel correspond **un jour de la semaine.**

## Exemple

A quel jour de la semaine correspond le 21 juin 1941 ?

1° Rechercher **1941** dans les colonnes des années.

2° Suivre la ligne horizontale jusqu'à la colonne **juin.**

3° Le chiffre **0** que vous lisez alors doit être ajouté à la date du jour de juin que vous voulez identifier, c'est-à-dire au **21**, ce qui donne un total de 0 + 21 = **21.**

4° Dans les colonnes **a** ou **b** rechercher le nombre **21** qui correspond à un **samedi.**

## 1979 Fêtes légales et mobiles

| | |
|---|---|
| Jour de l'An ......... | Lun 1er Janv. |
| Mardi-Gras........... | Mar 27 Fév. |
| Cendres ............. | Mer 28 Fév. |
| Mi-Carême........... | Jeu 22 Mars |
| Rameaux ............ | Dim 8 Avril |
| Pâques ............... | Dim 15 Avril |
| Lundi de Pâques ..... | Lun 16 Avril |
| Souvenir des Déportés. | Dim 29 Avril |
| Fête du Travail ...... | Mar 1er Mai |
| Armistice 1945 ...... | Mar 8 Mai |
| Fête Jeanne d'Arc.... | Dim 13 Mai |
| Ascension ........... | Jeu 24 Mai |
| Fête des Mères....... | Dim 27 Mai |
| Pentecôte ............ | Dim 3 Juin |
| Lundi de Pentecôte... | Lun 4 Juin |
| Fête Nationale ...... | Sam 14 Juil. |
| Assomption ......... | Mer 15 Août |
| Toussaint ............ | Jeu 1er Nov. |
| Armistice 1918 ...... | Dim 11 Nov. |
| Noël.................. | Mar 25 Déc. |

**ISBN 2-902680-34-1**
Imprimerie VAUDREY - LYON - N° d'édition 29257
Dépôt légal Février 1985