DEMARCHES DE PENSEE ET CONCEPTS UTILISES PAR LES ELEVES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN GEOMETRIE EUCLIDIENNE PLANE

VOLUME I

par

Gérard AUDIBERT

PREFACE

Les deux volumes publiés par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public sous le titre :

Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en Géométrie Euclidienne Plane

reproduisent in extenso la thèse de doctorat d'état es Sciences Mathématiques de Gérard AUDIBERT, dont une première diffusion avait été assurée par les soins de l'I.R.E.M. de MONTPELLIER et de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc.

Le volume I contient l'analyse et les résultats ; il fait un tout. Le volume II qui le complète contient les notes, les index, la bibliographie et des protocoles.

Le lecteur devra tenir compte en ce qui concerne les dessins de cette publication des changements d'échelle dus à des réductions photographiques du texte initial.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE

présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le grade de Docteur d'Etat
Mention : SCIENCES MATHÉMATIQUES

DEMARCHES DE PENSEE ET CONCEPTS UTILISES PAR LES ELEVES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN GEOMETRIE EUCLIDIENNE PLANE

VOLUME I

par

Gérard AUDIBERT

Soutenue le 29 Juin 1982 devant la Commission d'Examen.

JURY :	B. MALGRANGE	Président
	F. HALBWACHS	Examinateur
	P. MOLINO	Examinateur
	C. ROUMIEU	Examinateur
	G. VERGNAUD	Examinateur
	M. VINH BANG	Examinateur

ATELIER DUPLICATION
— U.S.T.L. —

TABLE DES MATIERES

			PAGES
GRATITUDES			
AVERTISSEMENT			
INTRODUCTION		La problématique	21
	CHAPITRE I	Contradictions, équilibration - Les processus	23
	CHAPITRE II	Enseignement de la géométrie - Le champ conceptuel	37
	CHAPITRE III	Résolution de problèmes - La méthodologie	53
	CHAPITRE IV	Notre problématique	63
PARTIE A		Le problème CRI	69
	CHAPITRE V	LA TECHNIQUE	71
		1. L'énoncé	72
		2. La solution	72
		3. Expérimentateurs et élèves	73
		4. Le déroulement de l'expérience	74
		5. Les protocoles	77
		6. Les réponses	78
		7. Le problème CRI et notre problématique	82
		8. Les processus élémentaires	83
	CHAPITRE VI	LA COMPENSATION DES LACUNES LOCALES	89
		1. Exemples	90
		2. Lacune locale compensée	92
		3. LL : un observable ?	92
		4. L.L.C. et progrès	93
		5. Hypothèse	95
		6. Fréquence des L.L.C.	98
		7. La négation	98
	CHAPITRE VII	DIFFERENCIATION-INTEGRATION	101
		1. Définition	102
		2. Hypothèse	103
		3. Un exemple : le protocole 3-14;04	104
		4. Vérification de l'hypothèse	108
		5. La preuve	111
		6. Différenciation-intégration et observables	113

PAGES

CHAPITRE VIII EQUILIBRE DANS LE PROBLEME CRI 115

1. Un exemple : le protocole 6-11;07-1 117
2. Définition 118
3. Hypothèses 119
4. Vérification 120
5. Points remarquables 125
6. Equilibre et observables 126

CHAPITRE IX L'EMPIRISME DANS LA RECHERCHE DE L'ELEVE 129

1. Les dessins 130
2. Les variations locales 135
3. Les expérimentations de l'élève 140

PARTIE B Le problème SIM 149

CHAPITRE X LA TECHNIQUE D'EXPERIMENTATION DU PROBLEME SIM 151

1. L'énoncé 152
2. La solution 153
3. Expérimentateurs et élèves 153
4. Le déroulement de l'expérience 154
5. Les protocoles 156
6. Les réponses 157
7. Les ambigüités de l'énoncé 157
8. L'énoncé et le processus de différenciation-intégration 159
9. Les processus élémentaires 159
10. Le problème SIM et notre problématique 160

CHAPITRE XI LA CONSERVATION DES ANGLES 161

1. Angles 162
2. Conservation des angles 162
3. Exemples 163
4. Définition des procédures de conservation des angles 166
5. Conservation des angles chez l'élève 167
6. Les mesures 170
7. Conclusions sur la conservation des angles 170

PAGES

CHAPITRE XII — LA CONSERVATION DES PROPORTIONS 173

1. Conservation des proportions 174
2. Pseudo-proportions 175
3. Six exemples 176
4. Définition des procédures 180
5. Tableau des procédures 183
6. Analyse des procédures 185
7. Conclusions sur la conservation des proportions 189

CHAPITRE XIII — EQUILIBRES DANS LE PROBLEME SIM 191

1. L'horizontale dans le protocole 4-13;04-1 192
2. Les blocages 194
3. Nombre de triangles ayant un côté horizontal ou vertical 196
4. Les positions d'équilibre 198
5. Les blocages dus à l'équilibre en classe de quatrième 199
6. La stabilité de l'équilibre 204
7. Une analyse des protocoles de nos élèves de 6ème 208
8. L'équilibre de la conservation des pentes 215
9. Equilibre et dépassement 222
10. Equilibres et angles 224

CHAPITRE XIV — LES CONTRADICTIONS 229

1. Les contradictions observées : C.O. 230
2. Les contraintes : les champs de contraintes 236
3. Les contradictions logiques C.L. 241
4. Liens entre C.O. et C.L. Les contradictions analysées : C.A. 246
5. L'analyse dialectique 254
6. L.L.C. - sous-problèmes - Champ de contraintes muni d'une variable 264
7. Conservation des angles et conservation des proportions : analyse dialectique 271

PARTIE C — Le problème PEN 285

CHAPITRE XV — LA TECHNIQUE D'EXPERIMENTATION DU PROBLEME PEN 287

1. L'énoncé 288
2. La solution 289
3. Expérimentateurs et élèves 291

PAGES

4. Le déroulement de l'expérience 291
5. Les protocoles 295
6. Les réponses 295
7. Les processus élémentaires 296
8. Le problème PEN et notre problématique 296

CHAPITRE XVI TRANSLATION ET ROTATION 299
1. Translation - mouvement de translation_ mouvement plan sur plan 300
2. Régularité du pentagone ou rotation 308

CHAPITRE XVII SYMETRIE ORTHOGONALE 325
1. Le concept de symétrie 326
2. Le retournement 331
3. La symétrie_technique 337
4. Compléments et conclusion 347

CHAPITRE XVIII LA CONSTRUCTION DU TRIANGLE 357
1. Les deux principales procédures 358
2. Le tâtonnement 361
3. Constructions avec instruments de dessin 369
4. Troisième cas d'égalité 374
5. Conclusions 379

CHAPITRE XIX EQUILIBRES DANS LE PROBLEME PEN 381
1. Triangle dans l'angle du pentagone 382
2. Croisement - Eléments remarquables 396

CHAPITRE XX IMPORTANCE DE LA PRATIQUE CHEZ L'ELEVE 403
1. Le raisonnement de BRA 404
2. La preuve 415
3. L'approximation 424
4. Remarques complémentaires sur la pratique de l'élève 432

PARTIE D Synthèse et conclusion 443

CHAPITRE XXI LES CONCEPTS 445
1. Similitude 446
2. Isométries 449
3. La construction du triangle 451

PAGES

CHAPITRE XXII LES PROCESSUS 455
1. Les processus élémentaires 456
2. Différenciation-intégration 457
3. Les équilibres 458
4. Contradictions 463
5. Pratique et théorie 467

CHAPITRE XXIII CONCLUSIONS GENERALES 471

PARTIE E Compléments 477

CHAPITRE XXIV Notes 479
CHAPITRE XXV Bibliographie 545
CHAPITRE XXVI Index 555

PARTIE F Protocoles 565

CHAPITRE XXVII Protocoles du problème CRI 567
CHAPITRE XXVIII Protocoles du problème SIM 607
CHAPITRE XXIX Protocoles du problème PEN 701

GRATITUDES

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans la force créatrice de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Montpellier.

Je dois, tout d'abord, remercier son Directeur, le professeur Charles ROUMIEU qui, par sa vigilance scientifique et sa chaleureuse amitié, a su conduire ma tâche sur le terrain de l'expérimentation et dans le respect de la rigueur mathématique.

Les éclaircissements que m'ont apportés, par une discussion constante et généreuse, bon nombre de chercheurs de l'I.R.E.M. de Montpellier, et plus particulièrement Sylvette MAURY et Michel FAYOL, font partie d'une dette inestimable.

Mais l'essentiel de ce que j'ai appris sur l'enseignement des Mathématiques durant ces dix dernières années, je le dois aux professeurs de mon Académie. Par leur amitié et leur rigueur professionnelle, ils ont été mes guides. Aussi, je veux citer neuf d'entre eux qui représenteront, à mes yeux, tous les collègues que je ne peux pas nommer ici ; à l'Ecole des C.E.T. (appelés maintenant L.E.P.) j'ai eu pour maîtres, Claude DUCHEIN et Robert SABATIER; à l'Ecole des professeurs de Construction Mécanique, j'ai eu pour maître, Jean GUIRAUDOUX; à l'Ecole des professeurs du Premier Cycle, j'ai eu pour maître, André HERMET; à l'Ecole des professeurs du Second Cycle, j'ai eu pour maîtres, Pierre IGOU, Henri GAUDY et Claudie TOCABENS; à l'Ecole des professeurs de Physique, j'ai eu pour maîtres, Michel GALTIER et André RIEUX.

Mes remerciements s'adressent aussi à Sylvie et Louis HIGOUNET, Reine BONNET, André VACHE et Christine ISSERT qui m'ont entouré de leur compétence et de leur gentillesse.

A travers le Séminaire de Didactique et la C.I.E.A.E.M., je tiens à remercier la communauté des chercheurs et leurs principaux responsables dont le talent, le sérieux et le dévouement sont une des sources primordiale du développement de la recherche que je présente. Mes remerciements s'adressent en particulier à Madame A.Z. KRYGOWSKA, et à Messieurs H. FREUDHENTAL, G. GLEASER et F. PLUVINAGE qui se sont toujours intéressés à mon travail.

Je suis très redevable à Bernard MALGRANGE et Pierre MOLINO d'avoir accepté de se distraire de leur tâche principale qu'est la recherche en Mathématiques pour accueillir mon travail de Didactique. Je suis également reconnaissant envers Gérard VERGNAUD; par ses conseils et ses critiques constructives, il m'a fourni un encouragement indispensable. Messieurs HALBWACHS et VINH BANG en acceptant d'être au jury de cette thèse ne font qu'augmenter ma dette envers l'Epistémologie Génétique de l'Ecole de Genève.

André AUGE, Nicole BELLARD, Robert BRUNET, Bernard CHAUVET, Arlette CHEVALIER, Marie-Thérèse CONEJERO, Claude FABRE, Claude GROS, Maurice LAUZENT, Nicolas LEENHARDT et Bernard PELOUZET méritent plus que ma gratitude. Sans eux, la thèse, présentée ici, n'aurait jamais vu le jour. Cette thèse est l'émanation de notre travail.

A ma femme, Hélène, soutien de tous les instants au long de ces nombreuses années et à mes quatre enfants, je dédie cet ouvrage.

oooooooooooooo

Nous tenons à remercier vivement l'A.P.M.E.P. qui a pris en charge la deuxième édition de notre travail.

oooooooooooooo

AVERTISSEMENT

Les pages qui suivent s'adressent, entre autres, aux professeurs de Mathématiques. Mais les tâches quotidiennes d'un professeur ne leur permettent pas toujours de mener à terme la lecture d'un ouvrage de plus de huit cents pages. Aussi, voulons nous donner quelques suggestions pour aborder la lecture de ce qui suit.

- Si on veut se contenter d'un prototype de notre travail, on peut lire le chapitre IV, puis le chapitre XVIII, ce qui fait un total de trente pages.

- Un autre type d'analyse est présenté avec les chapitres X, XI et XII, ce qui fait au total quarante pages.

- Si un lecteur veut s'intéresser uniquement à quelques recherches d'élèves sans se référer à une analyse plus globale, il peut lire :

Les paragraphes V-1 et 2 et le protocole de KAR du chapitre XXVII
ou bien les paragraphes X-1 et 2 et le protocole de MAP du chapitre XXVIII
ou bien les paragraphes XV-1 et 2 et le protocole de KAY du chapitre XXIX

Chacune de ces trois lectures porte sur dix ou quinze pages.

- Un des chapitres les plus importants pour nous est celui qui traite des contradictions. On peut s'y consacrer, en priorité, en lisant les paragraphes X-1 et 2 puis le chapitre XIV. Ce qui fait un total de cinquante six pages.

- Une connaissance assez complète du type de travail que nous présentons peut être acquise par la lecture des chapitres IV, X, XI, XII, XIII, complétée par la lecture de protocoles se trouvant dans le chapitre XXVIII. Ce qui représente plus de cent cinquante pages.

- Un survol très rapide et très superficiel de l'ensemble de notre travail est obtenu par la lecture des chapitres IV et XXIII (moins de dix pages).

- Pour une connaissance assez rapide de l'ensemble de notre travail, on peut lire uniquement le chapitre IV et la partie D. Ce qui fait un total d'une quarantaine de pages.

Les mots ou les phrases en italique, dans le texte, mettent en évidence des notions ou des résultats essentiels. Les dessins d'élèves reproduits dans ce texte sont, en général, à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou à l'échelle $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ Le plus souvent ceux du problème CRI sont à l'échelle $\sqrt{2}$ et ceux des problèmes SIM et PEN sont à l'échelle $\sqrt{2}$.

oooOOOooo

INTRODUCTION

LA PROBLÉMATIQUE

- CHAPITRE I -

CONTRADICTIONS, EQUILIBRATION - LES PROCESSUS

De 1972 à 1975 nous avons réalisé un travail avec un groupe de chercheurs à l'I.R.E.M. de Montpellier.

Ce travail a donné lieu au compte-rendu de AUDIBERT G., BANTEGNIE A., BERTRAND N., GELY B., HIGOUNET L., JANVIER M. et VACHE Y. (1975) publié par l'I.R.E.M. de Montpellier. Quelques-uns ont prolongé ce travail en 1976 dans une direction à laquelle nous n'étions pas associés.

Le bilan que nous avons tiré en 1975 de ces recherches en Heuristique, grâce notamment aux échanges sur ce sujet que nous avons eus à Montpellier avec Mme A.Z. KRYGOVSKA et M. H. FREUDENTHAL nous laissait quelque peu dans une impasse. Il nous semblait nécessaire d'abandonner une démarche paralysée par un matériel trop onéreux et trop sophistiqué. Les longues expérimentations réalisées ne comportaient pas suffisamment de cas pour qu'elles soient confrontées fructueusement à des hypothèses. Le champ théorique, dans lequel nous nous trouvions était trop vaste, trop flou, trop mal cerné.

Mais nous avions conservé, de ce long travail, la certitude du rôle important joué, dans les processus de recherche de problème, par *les phénomènes dialectiques*.

A cette même époque parurent les études d'épistémologie génétique intitulées : Recherche sur les contradictions de PIAGET J. (1974a,b) Cet ouvrage nous conforta dans la nécessité d'approfondir avec minutie ces phénomènes. C'est ainsi qu'une part du travail en didactique des mathématiques que nous présentons ici est consacrée à une certaine analyse des contradictions.

Un an après les recherches sur *les contradictions*, en 1975, paraît sous la signature de PIAGET J. (1975) la synthèse théorique la plus importante du centre international d'épistémologie génétique, sous le titre de "*L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement*".

De l'aveu même de l'auteur PIAGET J. (1975) "cet ouvrage constitue une refonte complète du volume II des Etudes d'épistémologie génétique qui s'intitulait Logique et équilibre. En effet, les modèles utilisés alors se sont montrés nettement insuffisants et il importait donc de reprendre le problème en son ensemble, d'autant plus qu'il domine toutes les questions du développement des connaissances". J. PIAGET approfondit et renouvelle en partie la théorie qu'il a utilisée jusqu'ici; il réalise une "équilibration majorante" du modèle théorique d'avant 1960.

Pour décrire le fonctionnement de son nouveau modèle J. PIAGET (1975) fait intervenir essentiellement, d'une part "les interactions entre le sujet du niveau considéré et les objets dont il atteint certaines propriétés" et d'autre part "les relations entre les observables et les coordinations".
Nous voyons apparaître les deux dualités que sont d'une part l'objet et le sujet, et d'autre part les observables et les coordinations. C'est une démarche très Piagétienne que de traiter les questions sur la base de deux notions liées entre elles.

Certaines *dualités* sont restées présentes à notre esprit tout au long de nos recherches.

La plus fondamentale peut-être, concerne l'affirmation et la négation. L'attitude de PIAGET J.(1974b) consistant à porter une extrême attention à cette dualité, nous l'avons adoptée lors de notre expérimentation, même si, d'après lui, elle semble présenter un moindre intérêt à l'âge des opérations formelles. Cela nous conduit à une analyse des contradictions où nous retrouvons des contradictions dans l'action et des contradictions entre schèmes. Mais sa distinction entre "contradictions propres à la pensée naturelle" et "principe logique de non contradiction" nous semble sujet à discussion. Et nous ne pouvons pas souscrire à sa conclusion en ce qui concerne la troisième forme de contradiction. Il nous semble en effet trop ambigu de dire que dans"le cas des structures opératoires, les contradictions qui peuvent encore surgir à l'intérieur ou dans les applications immédiates de ces structures ne consistent plus guère qu'en erreurs momentanées ou fautes de raisonnement". Une deuxième dualité importante est celle de l'assimilation et de l'accommodation qui,selon PIAGET J. (1975), constituent "les composantes de tout équilibre cognitif". Dans le domaine qui nous préoccupe, celui de la géométrie, cet équilibre est crucial. En effet, par l'intermédiaire de son dessin en action, l'élève assimile des éléments extérieurs, il adapte son dessin qui doit représenter des schèmes d'assimilation. Et parallèlement, il accommode ses schèmes à ces éléments extérieurs que constituent aussi les figures qu'il vient de réaliser.

Une troisième dualité, celle de la différenciation et de l'intégration, nous paraît essentielle au cheminement mathématique. Mais cette "troisième forme d'équilibration" selon PIAGET J. (1975), nous voulons l'étudier dans le cadre de structures limitées à un simple problème.

Quant à la distinction que fait PIAGET J. (1977b) entre l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante, si elle facilite quelquefois l'analyse, on peut se demander si elle n'est pas, pour l'essentiel,

d'origine idéologique. Nous l'envisageons plutôt comme une dualité présentant une forte interaction en géométrie; ce qui la rapproche de l'abstraction pseudo-empirique. Elle est au coeur de nos préoccupations et rejoint la question posée par les journées nationales A.P.M.E.P. 1981 d'Amiens[1] : les mathématiques sont-elles une science expérimentale ?

A travers toutes les dualités, c'est le modèle du fonctionnement de la connaissance que cherche à saisir J. PIAGET. Et ce fonctionnement, il le fonde sur *l'interaction*, qui est la clé permettant d'accéder à la connaissance du développement cognitif. Ainsi pour PIAGET J. (1975) s'ajoutent aux dualités fondamentales: les notions de *perturbation*, "ce qui fait obstacle à une assimilation"; de *régulation*, "on parle de régulation de façon générale lorsque la reprise A' d'une action A est modifiée par les résultats de celle-ci"; de *compensation*,"une action de sens contraire à un effet donné et qui tend donc à l'annuler ou à la neutraliser"; *d'équilibration majorante*[2].

On peut dire, comme l'affirment INHELDER B., SINCLAIR H., et BOVET M. (1974) que l'Ecole de Genève est guidée "par l'hypothèse que les progrès de la connaissance résultent de processus dynamiques requérant des modèles de régulation". Les différentes dualités piagetiennes sont des concepts permettant l'analyse des interactions et des processus dynamiques. C'est l'aspect fonctionnel de la connaissance qui est ainsi étudié. Mais le complément de cette description fonctionnelle est l'élaboration des mécanismes structuraux; en effet, selon INHELDER B. et Coll. (ibid) "c'est l'aspect structural des notions et opérations sous-jacentes qui délimite les niveaux de la construction cognitive tandis que c'est l'aspect régulatoire qui fournit le modèle de la continuité fonctionnelle entre eux". Nous devons donc être très attentifs à la dualité : fonctionnel - structurel.

Alors se pose à nous une question essentielle car elle est au coeur de l'enseignement des mathématiques :

Que deviennent les processus dynamiques de l'équilibration majorante lorsqu'est atteinte la période des opérations formelles ?

En effet, pour PIAGET J.(1975) les opérations "constituent le point d'aboutissement des régulations en leurs améliorations et représentent ainsi des régulations parfaites".

Il nous dit encore que l'équilibration est indissociable de la construction "jusqu'aux compositions de formes déductives". On est en droit de se demander si le dynamisme de l'équilibration ne s'atténue pas sérieusement pour J. PIAGET, lorsqu'on se trouve sur le terrain des opérations logico-mathématiques; dans ses conclusions PIAGET J.(1977b) estime que"l'abstraction réfléchissante en vient à dégager les raisons intrinsèques des coordinations qu'elle reconstruit et élargit lors de leurs réfléchissements, elle aboutit à ce résultat remarquable qu'un nouveau produit de la réflexion ne saurait contredire les précédents"; pour lui l'abstraction réfléchissante "écarte la possibilité" de contradictions.

INHELDER B.(ibid) de même signale "la présence et même la fréquence des compromis sur le terrain physique, leur absence sur le terrain des opérations logico-arithmétiques".

De façon plus précise INHELDER B.(ibid) déclare que "dans la résolution de problèmes où les schèmes sont enrichis et modifiés par les propriétés de l'objet, le sujet projette des actions dont le résultat ne correspond pas nécessairement à son anticipation tandis que dans le cas de la logique il y a forcément identité, d'où absence de contradiction et de compromis dans les solutions de problèmes de nature logique".

Pourtant le modèle principal de l'Ecole de Genève reste selon PIAGET J.(1975) celui d'un "processus conduisant de certains états d'équilibre à d'autres, qualitativement différents, en passant par de multiples déséquilibres et rééquilibrations".

Si nous insistons sur l'aspect contradictoire de la dualité entre les mécanismes structuraux et la dynamique fonctionnelle, c'est à cause des deux faits suivants :

- d'une part, l'enseignement des mathématiques est fondé sur l'acquisition de structures bien coordonnées dans un cadre logique, d'où l'enchaînement des axiomes, des définitions et des théorèmes.
- d'autre part, le stade opératoire atteint par nos élèves de l'enseignement secondaire semble vouer ces derniers en mathématiques aux seules démarches déductives.

Et nous nous posons à nouveau cette question essentielle :

Un apprentissage bâti sur la dynamique de l'équilibration majorante est-il contradictoire avec le déroulement traditionnel de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire ?

C'est afin d'éclairer partiellement cette question, que nous essayons de connaître les processus de recherche de problème chez l'élève de l'enseignement secondaire. Nous voulons savoir la part que l'élève accorde aux structures acquises pour résoudre ces problèmes. Nous voulons savoir s'il intervient dans sa recherche des processus dynamiques.

Dans son analyse J. PIAGET (1975) se place à différents niveaux. Tout d'abord, il envisage le niveau très général du "développement des connaissances"; ainsi place-t-il son concept central d'équilibration majorante dans "l'explication du développement cognitif (qu'il s'agisse d'histoire des sciences aussi bien que de psychogenèse)". Ensuite, il examine comment l'équilibration "se déroule concrètement lors des interactions entre le sujet et les objets". Enfin, il n'hésite pas, comme il l'écrit page 137, à se placer tantôt dans le cas où "le sujet applique toute une structure (classification, etc ...) à un ensemble d'objets", tantôt dans le cas d'une "conceptualisation d'observables isolés". Nous avons donc ressenti le besoin de préciser à quel niveau nous rattachons les notions mises en évidence au cours de nos recherches.

Nous préférons nous référer à un contenu précis plutôt qu'à une formalisation qui nous échappe, afin d'éviter au maximum les ambiguïtés quant au degré de généralisation de nos résultats.

Nous étudions comment se déroule la recherche d'un problème de géométrie dont la durée n'excède pas 50 minutes. Nous mettons en évidence une première notion de processus élémentaire; chaque processus élémentaire a une durée de quelques minutes, quatre minutes en moyenne, et le déroulement de la recherche s'effectue selon une suite de processus élémentaires. Notre premier travail consiste donc à identifier la notion de processus élémentaire car elle joue un rôle déterminant.

Nous situons alors nos analyses à deux niveaux.

Le premier niveau se place à l'intérieur du *processus élémentaire*; c'est là qu'interviennent les observables ou encore l'anticipation, c'est là qu'apparaissent certaines notions de contradiction.

Le deuxième niveau est celui d'un *problème tout entier traité par un élève*; c'est à ce niveau que nous nous plaçons si nous cherchons à savoir comment l'élève arrive à trouver une solution, ou bien ce qui l'empêche de trouver la solution; c'est à ce niveau que nous mettons en évidence l'existence de l'équilibre ou d'un processus de différenciation-intégration.

Un autre type d'analyse porte sur les phénomènes liés à tout *un ensemble d'élèves* de l'enseignement secondaire. C'est ainsi que nous cherchons à savoir comment se développe la conservation des angles liée à la similitude chez nos élèves du secondaire, ou encore nous cherchons à savoir si un phénomène d'équilibre particulier est propre à une tranche d'âge. Pour avoir des résultats de ce dernier type, nous n'utilisons pas des méthodes statistiques, avec échantillonnages, tests et estimations ou analyse de données, mais nous ne conservons que les résultats apparaissant nettement avec une fréquence élevée.

Nous venons d'affirmer que les contradictions, les interactions, les processus dynamiques sont au coeur de la problématique qui oriente notre recherche, même si nous situons nos résultats dans un cadre beaucoup plus limité que celui proposé par l'Ecole de Genève.

Il nous reste alors à préciser deux points. En premier lieu quels concepts piagétiens nous allons plus particulièrement faire intervenir dans notre travail. Quel est le vocabulaire que nous utilisons.

Nous constatons tout d'abord que la grande variété des concepts utilisés par l'Ecole de Genève fait que ces concepts interfèrent souvent les uns avec les autres. C'est ainsi que de l'aveu même de J. PIAGET (1975) "cette collaboration (sinon identité) des régulations et de l'abstraction réfléchissante, toutes deux évoluant ainsi de paliers en paliers, rend alors compte du processus central du développement cognitif, c'est-à-dire de la formation indéfinie d'opérations sur des opérateurs". Nous retrouvons là une triple conceptualisation constituée par les régulations, l'abstraction réfléchissante et les opérations sur les opérations. Pour PIAGET J. et HENRIQUES G.(1978) c'est l'abstraction empirique qui doit être associée à la généralisation inductive, tandis que la généralisation constructive est inextricablement liée à l'abstraction réfléchissante.

Nous serons, au cours de notre travail, très attentif aux *trois grandes formes d'équilibration*[1]. Comme le résume PIAGET J.(1975) dans ses conclusions "il convient, en effet, de considérer à part (bien qu'en fait ils soient peu séparables) l'équilibre des rapports entre le sujet et les objets essentiels en ce qui concerne les connaissances physiques ou expérimentales, l'équilibre des coordinations entre schèmes ou entre sous-systèmes de schèmes, qui domine les connaissances logico-mathématiques, et l'équilibre général entre le tout et les parties donc entre les différenciations des schémas ou des sous-systèmes et leur intégration".

Nous tiendrons aussi un très grand compte de l'existence ou de la non-existence des *trois principales conduites* α, β et γ^1 du sujet dans l'utilisation des compensations face à une perturbation telles que les définit PIAGET J.(1975).

La première conduite, dite conduite α, consiste soit à compenser la perturbation par une simple modification si la perturbation est faible, soit à écarter la perturbation si elle est plus forte.

La deuxième conduite, dite conduite β, consiste à accommoder la structure à la perturbation de façon à rendre celle-ci assimilable.

La troisième conduite, dite conduite γ, consiste à anticiper les transformations possibles de la structure; la compensation joue sur la symétrie inhérente à l'organisation du système; la fermeture de la structure élimine ainsi toute contradiction émanant du dehors comme du dedans.

Afin d'étudier le fonctionnement de l'équilibration, PIAGET J.(1975) définit un certain nombre de concepts :

"*Un observable* est ce que l'expérience permet de constater par une lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes, tandis qu'une coordination comporte des inférences nécessaires et dépasse la frontière des observables".

"Nous distinguons les observables constatés par *le sujet* sur ses propres actions et les observables enregistrés sur *l'objet*".

"Il convient de distinguer *les coordinations* entre les actions qui sont des préopérations ou des opérations du sujet et les coordinations entre les objets en tant qu'ils sont sensés agir les uns sur les autres. En ce second cas, il s'agit d'opérations attribuées aux objets, donc d'un modèle causal".

"Il existe un troisième cas qui est celui de la coordination portant sur des propriétés momentanées des objets mais introduites en eux par le sujet"[2].

Quoique ces différents concepts, les trois grandes formes d'équilibre, les trois conduites α, β, γ et la double dualité observables - coordination et sujet - objet éclairent constamment notre réflexion, nous ne les utilisons pas tels quels pour notre recherche; une accommodation est nécessaire compte-tenu de la spécificité de notre travail limité à des problèmes de géométrie cherchés par des élèves de l'enseignement secondaire.

Le seul concept que nous utilisons sans modification est celui d'observable.

Nous prenons comme définition d'un *observable* celle de J. PIAGET (1975):

"Un observable est ce que l'expérience permet de constater par une lecture immédiate des faits donnés eux-mêmes".

Par exemple dans le dessin ci-contre, on peut observer que le cercle coupe le rectangle en quatre points; on parlera de l'observable : le nombre de points d'intersection de ce cercle et de ce rectangle est quatre. Mais, comme nous nous intéressons à l'observable de l'élève, il est donc défini par ce que l'élève constate et non pas simplement par ce que l'expérimentateur croit constatable. C'est ainsi qu'un élève peut ne voir, dans la figure 1, que trois points d'intersection entre le cercle et le rectangle; l'observable est alors : le nombre de points d'intersection de ce cercle et de ce rectangle est trois.

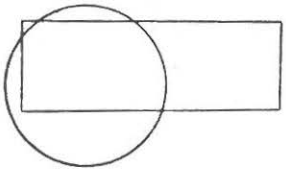


Figure 1

En dualité avec la notion d'observable nous utilisons la notion de *proposition*, mais en un sens plus large que celui ordinairement usité en mathématique.

Une proposition est pour nous une affirmation ou une négation portant sur des objets mathématiques. Elle peut être vraie ou fausse. Elle est déterminée en général par un énoncé de l'élève. Lorsque, par exemple, l'élève énonce qu'il existe un cercle passant par les quatre sommets

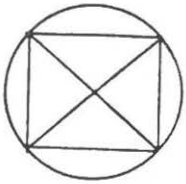


Figure 2

d'un rectangle nous avons affaire à une proposition. Les propositions peuvent ainsi faire appel à des *inférences* plus ou moins élaborées; c'est le cas lorsque par exemple l'élève énonce que si un cercle a pour centre l'intersection des diagonales d'un rectangle et pour rayon la longueur d'une demi-diagonale de ce même rectangle, alors il passe par les quatre sommets du rectangle.

Il arrive quelquefois que l'élève utilise une proposition qui n'est pas énoncée explicitement mais que le contexte de la recherche de l'élève fait apparaître à l'expérimentateur. Nous parlons à ce moment-là de proposition implicite; on peut aussi parler comme VERGNAUD G.(1981) de théorème en acte.

Une notion qui joue un rôle plus important dans nos analyses que la notion de proposition est celle de *contrainte*. Une contrainte est une consigne que veut respecter l'élève dans la réalisation de sa construction géométrique; cette consigne peut être implicite ou explicite. C'est elle, la plupart du temps, qui nous permet, en cas de besoin, de mettre en évidence des propositions implicites.

Nous parlons aussi très souvent de *coordination*. Nous ne cherchons pas à définir rigoureusement ce mot comme veut le faire J. PIAGET (1975); nous attribuons à ce mot le sens qu'on lui donne dans le langage courant. En effet, le but de notre travail est de comprendre comment sont liés les observables et les propositions, et ceci au fil de l'action de l'élève, cette action étant matérialisée par son dessin. C'est donc la coordination de tous ces facteurs (observables, propositions, contraintes, actions, ...) que nous analysons. Nous ne voulons donc pas introduire un concept qui ne nous paraît pas actuellement indispensable dans notre recherche parce que, peut-être, trop général.

Les notions de processus élémentaires, de contradictions, de lacune locale compensée, d'équilibre, de différenciation - intégration,sont définies au cours de l'analyse faite ultérieurement.

Les définitions que nous en donnons ne sont pas celles un peu trop générales pour nous qu'utilise l'Ecole de Genève, mais ce sont des définitions spécifiques à notre étude des problèmes de géométrie chez l'élève du secondaire.

Nous utilisons aussi le vocabulaire traditionnel mathématique largement compréhensible par un licencié es-sciences et même, le plus souvent, par un bachelier; nous renvoyons à l'occasion aux ouvrages classiques des mathématiques.

oooOOOooo

- CHAPITRE II -

ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE - LE CHAMP CONCEPTUEL

Nous allons examiner la situation de la géométrie dans l'enseignement secondaire français depuis 1968. Nous distinguons deux programmes de mathématiques : celui mis en place de 1969 à 1972 qui est resté en vigueur une dizaine d'années et celui qui se met en place depuis Septembre 1977[1].

Durant la mise en application des programmes de la décennie 70-80, la géométrie est traitée comme une théorie algébrique.

Donnons un seul exemple de présentation algébrique de la géométrie même s'il s'agit d'un des exemples les plus caricaturaux. La droite euclidienne, proposée par le Bulletin Officiel de l'Education Nationale (1971b), bénéficie de la présentation mathématique suivante :

Par définition, une droite euclidienne D est un ensemble E muni d'une famille F de bijections de E sur $\mathbb{R}$, telle que :

a) pour tout élément f de F et pour toute constante réelle a, les applications définies par $g(M) = f(M) + a$ et $g'(M) = -f(M) + a$ appartiennent aussi à F ;

b) réciproquement, si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de F, alors l'une des deux éventualités suivantes est réalisée :

- ou bien il existe un réel α tel que $f_2(M) = f_1(M) + \alpha$
- ou bien il existe un réel β tel que $f_2(M) = -f_1(M) + \beta$

L'ensemble E est appelé le support de la droite euclidienne D, un élément M de E est appelé un point de la droite euclidienne D[1].

Malgré quelques précautions oratoires prises par les responsables de cette orientation de l'enseignement des mathématiques, les livres et la plupart des professeurs, inspirés par les commentaires des programmes, ont développé essentiellement cet aspect algébrique de la géométrie. Ce courant algébrique a été renforcé par le traitement général de l'enseignement des mathématiques qui fut fondamentalement axiomatique et structuraliste.

Dans le cadre de cette conception algébrique, les deux principales caractéristiques de l'enseignement de la géométrie durant cette dizaine d'années sont d'une part le fait que la géométrie vectorielle et affine est nettement séparée de la géométrie euclidienne[2], et d'autre part le fait que la progression pédagogique place chronologiquement la géométrie affine et vectorielle avant la géométrie euclidienne. C'est ainsi que la classe de quatrième est réservée exclusivement à la géométrie affine et vectorielle alors que la géométrie euclidienne n'est introduite qu'en classe de troisième. Cet ordre qui consiste à faire précéder l'euclidien par l'affine et le vectoriel est aussi scrupuleusement respecté dans chaque classe du second cycle.

De plus, ces programmes accordent une place importante aux transformations. Les projections, translations et symétries par rapport à un point sont présentées en classe de quatrième. Les isométries (sans les rotations) sont au coeur de la géométrie de troisième. La classe de seconde qui développe surtout la géométrie vectorielle, voit apparaître les applications linéaires et comme exemples d'applications affines : les homothéties et les transformations déjà étudiées en quatrième. En classe de première la géométrie développe

l'étude analytique des rotations et des symétries. Enfin, en classe de terminale C comme le précise le BOEN (1971c), les transformations jouent un rôle dominant; nous y trouvons le groupe linéaire, les applications affines déjà étudiées en seconde, le groupe orthogonal, le groupe des isométries des espaces affines euclidiens de dimensions 2 et 3.

Mais dès 1972, une fois achevée la mise en place de ce nouvel enseignement des mathématiques, l'erreur saute aux yeux. D'éminents scientifiques s'insurgent; le mathématicien THOM R. (1972) dans son pamphlet intitulé "les mathématiques modernes : une erreur pédagogique et philosophique ?"s'inquiète en particulier de l'élimination de la géométrie. Il considère comme "une erreur considérable que de croire faciliter l'acquisition des mathématiques en remplaçant la géométrie par des structures algébriques inculquées massivement et prématurément faute d'une motivation convenable". De son côté, l'APMEP (1972) s'émeut, réclame pour les quatrième-troisième des allègements qu'elle considère comme un minimum indispensable jusqu'à la mise en application, après expérimentation favorable, de nouveaux programmes. Sous sa pression, le Ministère de l'Education Nationale par voie du BOEN (1973) donne le jour à la circulaire n° 73087 du 19 Février 1973; sur les cinq pages qui sont des commentaires des programmes de quatrième et troisième, cette circulaire en consacre trois à la géométrie. A l'I.R.E.M. de Montpellier, dans le cadre de la formation des professeurs et tout particulièrement ceux de C.E.T., nous nous sommes heurtés aux difficultés pédagogiques créées par les "mathématiques modernes" et plus spécialement par la géométrie; dans certains documents préparés pour la classe, l'I.R.E.M. de Montpellier (1973a) affirme : "Nous avons volontairement abandonné un certain nombre de concepts ... Nous avons laissé de côté des axiomes ... Nous avons toujours donné la priorité au mot le plus usuel". Pour l'information des professeurs l'IREM de Montpellier (1973b) a été obligé de donner "une traduction des commentaires de programmes dans un vocabulaire plus usuel illustré de figures les plus simples possibles".

C'est encore, durant cette même année 1973 que, face aux problèmes posés par l'enseignement des "mathématiques modernes" se met en place la recherche Inter-IREM de l'EQUIPE OPC (1979)· GRAS R.(1979) dans sa "contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques" enrichit cette recherche d'une analyse statistique soignée. Il aboutit à la conclusion que "l'usage de méthodes dynamiques, de recherche systématique d'une donnée de sens aux activités didactiques par une approche sensible et un bouclage environnement - modèle mathématique - environnement permettent un meilleur passage du stade des opérations concrètes au stade logico-formel" et cela de façon très nette en géométrie "domaine où étaient concentrés les efforts de l'expérimentation du fait du semi-échec (sinon de l'échec) de l'enseignement traditionnel".

L'inquiétude grandissante que causent les programmes de la décennie 70-80 dans divers milieux (I.R.E.M., A.P.M.E.P., utilisateurs des mathématiques, etc ...) amène l'ACADEMIE DES SCIENCES à intervenir. Elle propose un programme[1] pour les classes de quatrième-troisième. Les trois pages de remarques précédant l'énoncé du programme proprement dit sont pour l'essentiel consacrées à la géométrie.

De nouveaux programmes paraissent; c'est la réforme des années 80 qui va entrer en application, de Septembre 1977 pour la classe de sixième à Septembre 1983 pour la classe de terminale[2].
En ce qui concerne la géométrie du premier cycle, il y a tout d'abord un changement d'état d'esprit; l'axiomatique est étouffée; certains concepts comme le groupe des isométries ou le barycentre disparaissent; le vocabulaire est réduit, ainsi "angle géométrique" et "écart angulaire" sont abandonnés; le dessin et les instruments de dessin prennent beaucoup plus d'importance. Le deuxième changement conséquent consiste à réintroduire la géométrie euclidienne plane en classe de quatrième. Ce qui caractérise la réforme des programmes en classe de seconde, c'est l'abandon de la prééminence de la structure d'espace vectoriel. Cette réforme des années 80 fait penser à certains qu'on revient à la géométrie d'avant 1970. Si cette réforme est un aveu

de l'échec qu'a subi l'enseignement de la géométrie, entre autres, depuis les années 70, elle met à jour, en fait, plus de problèmes que de solutions concernant ce que doit être la géométrie dans notre enseignement secondaire.

Examinons quelques questions soulevées par l'enseignement des principaux concepts de géométrie.

(1) Tout d'abord, *quelle place faut-il donner au concept de groupe de transformations?*

En 1872, *Félix KLEIN* présente, pour la première fois, une vision unitaire de la géométrie en introduisant les groupes de transformations. Il ramène l'étude de chaque géométrie à la proposition générale suivante :
"Etant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe" .
Il caractérise ainsi la géométrie euclidienne au moyen du "groupe principal des transformations de l'espace" constitué par "les déplacements de l'espace, ses transformations avec similitude et celles par symétrie ... et les transformations composées avec les précédentes"[1] précise KLEIN F.(1891)

En 1899, *David HILBERT* écrivant ses "fondements de la géométrie" qui est un "essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simples que possible" prend comme axiomes les cinq groupes composés des axiomes d'appartenance, d'ordre, de congruence, des parallèles, de continuité, mais n'aborde les groupes de transformation que dans des appendices joints à la deuxième édition de ses "fondements". HILBERT D.(1899) déclare d'ailleurs dans sa conclusion "nous avons exclu de notre étude la question importante de savoir s'il est possible, en employant la notion des groupes de déplacements, d'édifier la géométrie d'une manière logique"[2]. On peut donc situer à la fin du siècle dernier la prise de conscience chez les mathématiciens du rôle fondamental joué par les groupes de transformations en géométrie.

Dans l'enseignement secondaire, si la transformation géométrique est utilisée depuis 1900 comme le montrent clairement les "leçons de géométrie" de Jacques HADAMARD[1] dont la première édition est antérieure à cette date, il faut attendre les programmes publiés par *l'arrêté du 6 Mars 1962* pour que soit officiellement introduits les groupes de transformations. Mais cela ne concerne que des classes de terminale et les seuls groupes de transformations explicitement introduits sont : le groupe des translations, le groupe des déplacements, le groupe des homothéties-translations. Bien entendu, les groupes de transformations sont introduits avant cette date dans certains ouvrages scolaires mais ils ne sont vraiment étudiés que dans les classes de préparation aux grandes écoles[2]. Avec la réforme des années 70, la notion de groupe est mise au programme de quatrième, le groupe des isométries est explicitement au programme de troisième[3].
La réforme des années 80 ne fait pas apparaître les groupes de transformations avant la classe de première.
En définitive, nous pouvons représenter sur le graphique ci-dessous cette évolution historique de l'enseignement du concept de groupe de transformations:

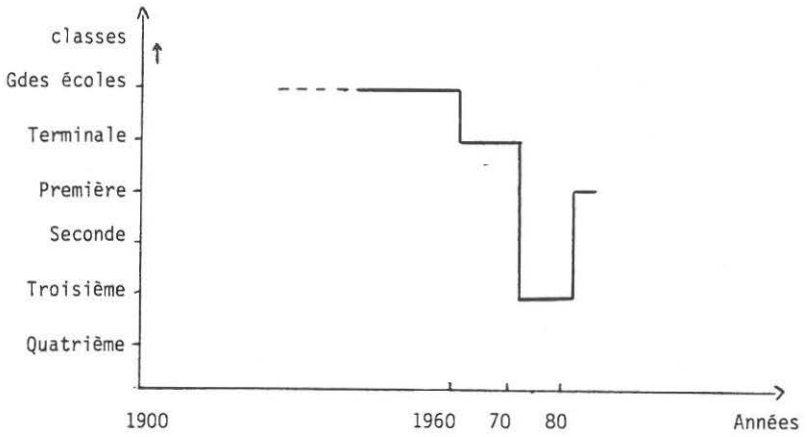


Figure 3

Mais qu'en est-il des possibilités d'acquisition de ce concept dans l'enseignement secondaire ?

GRECO P.(1964) publie dans le volume XVIII des études d'épistémologie génétique un article intitulé "I.VHR Etude génétique d'un système de représentations imagées concernant un groupe de transformations spatiales"; cette étude porte sur le groupe diédral D_2. L'étude génétique d'ensemble amène GRECO P. (1964) à conclure que "l'adolescent du niveau IV, le niveau n'étant pas atteint par tous les sujets de 11-13 ans, ne découvre pas la structure de groupe sous le diffus de l'intuition sensible". Encore faut-il remarquer que la prise de conscience de la structure de groupe chez les enfants observés par P. GRECO semble difficile à déterminer si l'on en croît la discussion qui eut lieu au VI SYMPOSIUM du 19-24 Juin 1961 à ce propos et qui est relatée par PIAGET J.(1964). La question de l'acquisition des concepts de groupe de transformations ou de sous-groupes du groupe euclidien[2] reste ouverte et de façon particulièrement cruciale concernant les élèves de notre enseignement secondaire.

Mais cette dernière question est accompagnée inévitablement de deux autres interrogations :

(2) *Les isométries sont-elles à bannir de notre premier cycle ?*

(3) *Les cas d'égalités des triangles sont-ils définitivement éliminés de notre enseignement ?*

On peut examiner la géométrie euclidienne sous trois aspects différents. Un premier aspect consiste à observer diverses figures usuelles, triangles, rectangles, trapèzes, cercles, ... ce qui conduit à l'analyse de figures isolées qu'on peut d'ailleurs comparer deux à deux comme dans l'étude des cas d'égalité des triangles. Un deuxième aspect consiste à faire intervenir les transformations, rotations, translations, symétries, similitudes, ... Avec le troisième aspect, nous retrouvons le groupe des transformations dont nous avons parlé aux pages 42 et 43, et alors la géométrie euclidienne,

comme les autres géométries, se fonde sur la structure de groupe. Ces trois aspects correspondent aux trois étapes intrafigurale, interfigurale et transfigurale telles que les présente GARCIA R. (1980)[1]. Jusqu'aux années 1970, ces trois aspects étaient traités, dans l'ordre où nous venons de les décrire, respectivement dans le premier cycle du secondaire, dans le deuxième cycle du secondaire et dans l'enseignement supérieur. La réforme appliquée durant la décennie 70-80 atténue considérablement la pratique intrafigurale, introduit très tôt et en même temps, l'interfigural et le transfigural. Pour nous, comme nous l'affirmons à travers nos questions (3), (2) et (1) la place qu'on doit donner à ces trois aspects est loin d'être claire et nécessite une minutieuse recherche.

Sur ces trois principales questions se greffent un certain nombre d'interrogations. Nous tenons à en présenter quelques-unes parmi les plus caractéristiques. La *rotation* est bannie du premier cycle, complètement d'ailleurs depuis le remplacement de l'enseignement de la technologie en 1980 par un enseignement de physique[2], elle est réservée au second cycle depuis cette date. Est-ce dû à une incapacité des élèves de moins de 16 ans à comprendre le concept de rotation ? Est-ce dû au fait que la connaissance de la rotation est secondaire pour les élèves de l'école obligatoire qui vont quitter l'école en fin de Troisième ? Ou bien est-ce parce qu'il est impossible de l'enseigner de façon formelle en toute rigueur que la rotation est bannie de notre premier cycle ? Les concepts de rotation et de translation doivent-ils être coordonnés dans l'apprentissage aux *mouvements de rotation et de translation ?*[3]. A propos de la *symétrie orthogonale* on doit se demander quelle coordination s'établit entre la symétrie d'une figure et la symétrie en tant que transformation; on doit aussi observer chez l'élève comment apparaît le lien entre la symétrie orthogonale, introduite par le BOEN (1978) depuis Septembre 1979 en quatrième et *l'orientation* dont l'étude commence avec les angles orientés en seconde selon le BOEN (1981) et se prolonge en première avec l'orientation du plan.

Un concept essentiel à la géométrie euclidienne est celui d'angle; ce fut certainement le concept le plus malmené tout au long de la décennie 70-80[1], et les difficultés de cet enseignement (4)démontrent *l'urgence de l'étude didactique de la notion d'angle.* Comment allons-nous ajuster entre eux les classes de couples de demi-droites, le rapporteur préconisé en sixième, en cinquième et en seconde, le produit scalaire, la trigonométrie, les angles orientés?

Nous devons réfléchir aux affirmations de J. PIAGET, B. INHELDER, SZEMINSKA A. (1948) selon lesquelles dès l'entrée en sixième la notion d'angle est bien installée dans les conceptions géométriques de l'enfant; c'est ainsi que J. PIAGET et coll.(ibid) estime que la "propriété selon laquelle la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, ... est, au stade IV des enfants de 10-12 ans, conçue comme *générale et nécessaire*[2].

Une autre question accompagne encore la géométrie euclidienne: (5)*la similitude est-elle une notion marginale ou essentielle ?*

Nous constatons tout d'abord que si les proportions, le théorème de Thalès et les homothéties figurent respectivement aux programmes de sixième, troisième et seconde, il faut attendre la classe de terminale C pour rencontrer les similitudes en tant que transformations et c'est surtout la présentation analytique dans le plan complexe qui semble prévaloir[3].

Toutes les questions que nous venons de poser nous obligent à centrer notre recherche sur le groupe euclidien, les isométries, les cas d'égalité des triangles, les angles et la similitude qui sont au coeur de la géométrie euclidienne.

Nous adoptons la définition donnée par VERGNAUD G. (1981) : "un champ conceptuel est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion".
Selon cette définition *nous choisissons comme champ conceptuel la géométrie euclidienne plane.*

Nous nous sommes limités à la géométrie plane, car la géométrie de l'espace constitue à notre avis un champ conceptuel beaucoup plus large nécessitant une méthodologie beaucoup plus complexe, notamment à cause des manipulations aussi bien que des images mentales intervenant dans les procédures[1]. La géométrie euclidienne plane est enseignée dans toutes les classes du secondaire; c'est tout au long de ces sept années que nous étudions chez l'élève ce domaine de connaissance; nous limitons notre investigation en ne prenant pas en compte dans nos expériences les enfants de moins de 11 ans.

Le champ conceptuel de la géométrie euclidienne plane implique un ensemble de concepts beaucoup plus large que les cinq cités en (1), (2), (3), (4) et (5). Nous allons examiner d'autres concepts qui s'y rattachent, et tout d'abord *les concepts d'espace vectoriel et d'espace affine.* Ces deux concepts qui dominaient dans les programmes de 1970, voient leur hégémonie disparaître avec les programmes de 1980. Le fait que l'axiomatique d'un espace vectoriel ou affine soit plus restreinte que celle d'un espace euclidien, conjugué avec le fait que pour une dimension donnée l'espace euclidien, est unique face aux nombreux espaces de la géométrie orthogonale, nous laisse jusqu'à présent dans l'incertitude quant à la progression pédagogique à suivre[2]. De plus, la distinction entre espace vectoriel et espace affine s'appuie dans notre enseignement sur une différenciation entre les deux espaces ou "multitudes" comme dit KLEIN F.(1891) alors que la

seule inclusion stricte entre groupes de transformations peut être didactiquement suffisante[1].

Citons une partie du texte de l'ACADEMIE DES SCIENCES (1978) qui caractérise assez bien l'état dans lequel se trouve la réflexion pédagogique à ce propos :

"La géométrie plane euclidienne, on le sait aujourd'hui, n'est autre, en fin de compte, que l'étude d'un espace affine associé à un espace vectoriel réel de dimension deux, muni d'un produit scalaire défini positif. Mais il va de soi que ce n'est pas de cette façon que la géométrie peut être présentée à un enfant de 13 ans ...
Il faut partir de l'intuition acquise par l'usage expérimental des instruments de dessin.... Amener l'élève à raisonner ... pour lui faire acquérir la notion de plan euclidien ...".

Derrière ce programme se profile toute la recherche en didactique qui reste à faire ...

Dans le domaine de la *mesure des longueurs, des surfaces et des volumes* de sérieuses recherches ont été entreprises par PIAGET J.; INHELDER B. et SEZMINSKA A. (1948). Un peu plus tard, VINH BANG (1965) étudie la coordination entre surface et périmètre. Ces deux études portant sur des enfants de 5 à 12 ans mettent en évidence le rôle primordial joué par la conservation mais font apparaître aussi les difficultés avec la multiplication[2]. C'est dans le champ conceptuel des "structures multiplicatives" que VERGNAUD G., ROUCHIER A., RICCO G., MARTHE P., METREGISTE R. et GIACOBBE G. (1979) sont amenés pour les produits de mesure à étudier surfaces et volumes[3].

Nous minimisons volontairement nos études portant sur les concepts d'espaces vectoriels et affines et sur les aires et les volumes dans le champ conceptuel que nous avons choisi[4].

La géométrie euclidienne a des liens très étroits avec d'autres champs conceptuels notamment *ceux centrés sur les nombres et ceux attachés à des disciplines comme la physique et la technologie.*

Les nombres, les équations, les fonctions ont contribué au développement de la géométrie analytique; mais la géométrie analytique n'apparaît pas avant la classe de troisième[1], elle risque donc de ne concerner que les élèves du second cycle. Nous avons laissé de côté ce secteur de la géométrie analytique au moins dans nos recherches actuelles. Par contre, dans notre étude de la similitude, nous avons confronté angles et proportions.

AUDIBERT G.(1978) a expliqué sommairement combien l'interférence entre les mathématiques et les autres disciplines est profonde, mais pour ne pas développer démesurément notre étude, nous essayons de ne pas nous affronter aux sujets qui concernent le secteur pluridisciplinaire[2]. La méthode de recherche que nous employons nous donne très peu d'information sur la représentation symbolique, nous avons par contre des informations abondantes sur le vocabulaire de l'élève que nous n'exploitons pas de manière à mieux canaliser notre recherche[3].

Grâce à une analyse de l'enseignement de la géométrie guidée par le fil conducteur que constituent les programmes officiels, nous avons délimité les principaux concepts sur lesquels nous voulons travailler. *Qu'en est-il des procédures impliquées par notre champ conceptuel ? Pour les dégager, nous fixons notre attention essentiellement sur les dessins réalisés par les élèves.* En effet, notre travail portant sur la géométrie, le dessin de l'élève joue un rôle central. Le dessin est pour l'élève la source de ses observables et un représentant de ses concepts, et surtout un représentant de ses concepts en formation. De plus, il nous fournit l'un des deux éléments objectifs, l'autre étant l'élément verbal enregistré. Nous analysons donc les procédures de coordination à travers la réalisation des dessins et leur évolution.

Cette importance que nous donnons au dessin est a priori justifiée par les recherches sur l'image qui se sont considérablement développées ces vingt dernières années comme l'indique DENIS M. (1979). Nous relevons donc, dans ce domaine, un certain nombre de résultats que nous confrontons à notre travail.

C'est ainsi que HATWELL Y.(1964) montre, dans ses recherches sur les jeunes aveugles, l'influence des structures figuratives sur l'accomodation et l'assimilation. Elle déclare en conclusion de son expérimentation que "le figuratif met l'enfant en contradiction avec les faits et avec lui-même" et en conséquence "tient une place de choix dans la genèse des opérations spatiales".

Liée au domaine de la représentation imagée qui selon BLANC-GARIN J. (1974) est "l'évocation intérieure des qualités perceptives d'un objet en l'absence de cet objet" nous retenons la séduisante théorie des doubles codages qui selon DENIS M.(1979) "postule que le traitement des aspects verbaux et celui des aspects non verbaux de l'information sont assurés par des systèmes cognitifs indépendants".

Nous restons très attentifs aussi à la liaison entre "la valeur d'imagerie et la dimension concret-abstrait" ainsi qu'à "l'examen du degré d'abstraction des concepts à apprendre" en fonction des variables d'imagerie, présentées par DENIS M.(1979).

L'ensemble des conceptions de PAIVIO A. longuement analysé par DENIS M.(1979) qui fournit à son sujet une bibliographie très complète, retient particulièrement notre attention dans le domaine de l'imagerie comme système symbolique de représentation.

Nous voulons aussi insister sur les recherches de Eleanor ROSCH qui, dans ses travaux sur la représentation cognitive, a dégagé la notion de *prototype*; pour ROSCH E.(1976) "comme de nombreuses expériences l'ont montré, les catégories ne sont codées dans l'esprit ni au moyen de listes de tous les membres individuels de la catégorie, ni au moyen d'une liste de critères formels nécessaires et suffisants pour définir l'appartenance à la catégorie, mais plutôt sous forme de

prototype d'un membre caractéristique de la catégorie". Ceci nous amène à la question suivante : quel rôle joue la notion de prototype dans la conceptualisation mathématique ? Si certains concepts s'accompagnent de prototypess'agit-il d'"image concrète" d'un représentant de ce concept ? .

Pour terminer ce rapide coup d'oeil en psychologie cognitive, précisons que nous attachons une grande importance aux résultats de PIAGET J.(1966).Son expérimentation est d'autant plus intéressante pour nous qu'elle utilise abondamment des situations géométriques, et notamment la rotation. Son travail débouche sur une mine de questions fondamentales pour la géométrie. C'est ainsi que ses recherches sur l'image mentale concernant des enfants de moins de 11 ans nous incitent à chercher comment se développe "l'interaction fonctionnelle du figuratif et de l'opératif" pour nos élèves du secondaire dans la pratique géométrique ? Nos élèves donnent-ils à leurs images anticipatrices de transformation (AT) toute la mobilité voulue pour anticiper des résultats (ATP) comme pour anticiper des trajets ou des modifications successives (ATM) ? Est-ce qu'on peut conclure avec PIAGET J.(1966) que "l'image constitue un auxiliaire indispensable au fonctionnement de la pensée en son dynamisme même, mais à condition de demeurer sans cesse subordonnée à ce dynamisme opératoire qu'elle ne saurait remplacer et dont elle n'est jamais en fait que l'expression symbolique plus ou moins, selon les cas, déformante ou fidèle ?"[1].

Pour en revenir aux procédures suivies par l'élève, nous nous posons à leur sujet un certain nombre de questions :

le dessin intervient-il de façon importante ? Quelle est son importance relativement à l'explication verbale, relativement à l'écriture en langage naturel ou symbolique ?

Peut-on décomposer la recherche d'un problème de géométrie en périodes caractérisées par des représentations figurales ?

Quels liens y-a-t-il entre les dessins et les inférences ? Entre

le dessin et la démonstration?[1]
Les dessins d'élèves sont-ils précis ? L'approximation joue-t-elle un rôle dans la réalisation des dessins ? Les unités[2] de mesures sont-elles maîtrisées ou entraînent-elles des perturbations ?
Toutes ces questions nous conduisent à examiner les instruments de dessin dont la liste que nous avons établie est la suivante : papier, crayon, stylo noir, stylos de couleur, taille-crayon, gomme, règle, double décimètre, compas, rapporteur, équerre, épingle, scotch, ciseaux, papier transparent, papier millimétré.
Nous essayons de connaître leur degré d'utilisation ainsi que leur rôle dans l'interaction entre le figuratif et l'opératif.

Dans le premier chapitre de cette introduction, nous avons montré notre intérêt pour les processus. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté le champ conceptuel sur lequel nous travaillons et situé les procédures qui nous paraissent les plus importantes. Pour nous, les procédures sont indissociables du champ conceptuel choisi tandis que les processus dépassent largement ce champ et ont donc une existence en dehors de la géométrie euclidienne plane. Mais concepts, procédures et processus ne nous apparaissent chez l'élève qu'à travers une méthodologie que nous devons maintenant préciser. Cette méthodologie est fondée sur la recherche faite par les élèves, de problèmes de géométrie euclidienne.

oooOOOooo

- CHAPITRE III -

RESOLUTION DE PROBLEMES - LA METHODOLOGIE

La résolution des problèmes est étudiée depuis fort longtemps.

Pour les *associationnistes*, le sujet, face à un stimulus, qui est un problème donné, fournit une réponse qui est un comportement particulier visant à la résolution du problème; le sujet dispose d'un ensemble de réponses associées à un type de problème. Entre le stimulus initial et la réponse finale s'intercale une chaîne d'associations de même type : stimulus-réponse. Ce modèle fonctionne ainsi pour résoudre, par exemple un anagramme.

Par contre, comme le dit FAYOL M.(1981)"*la théorie de la forme* traite de ces questions en les abordant de manière globale, c'est-à-dire en refusant la procédure analytique ... Selon les gestaltistes l'unité de pensée est une forme c'est-à-dire une organisation et la résolution de problème va exiger le réarrangement des éléments en une nouvelle forme"[1].

Nous retiendrons des gestaltistes deux aspects. Tout d'abord, les questions qu'ils abordent ont un rapport étroit avec les problèmes de géométrie qui nous préoccupent. Il en est ainsi de l'organisation sensorielle analysée par KÖHLER W .(1929) et notamment du "groupement spontané dans le champ sensoriel". Les gestaltistes comme GUILLAUME P. (1947) analysent des problèmes de géométrie tels que le problème

suivant "démontrer que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont bissectrices des angles du triangle DEF obtenu en joignant les pieds de ces hauteurs" qui a parfaitement sa place dans une actuelle classe de seconde. Le deuxième aspect que nous retenons est la précision des observations faites sur les sujets en situation de recherche de problèmes qui offre de très grandes possibilités quant à la connaissance des processus fondamentaux; c'est ainsi que nous pouvons encore aujourd'hui analyser des situations décrites minutieusement par KÖHLER W. (1927)[1].

Un autre secteur de recherche important dans le domaine de la résolution des problèmes s'est développé durant ces 25 dernières années autour des travaux de NEWELL A. et SIMON H.A. (1972). Ces travaux portent sur l'homme, mais sont pour l'essentiel fondés sur l'informatique et l'intelligence artificielle. Les tâches proposées sont d'ailleurs des problèmes de nature symbolique : les échecs, la logique symbolique, les énigmes de type algébrique, intéressant certains apprentissages mais s'éloignant quelque peu des processus de pensée que nous rencontrons dans la résolution de problèmes de géométrie[2].

Dans ces différents domaines, nous sommes encore assez loin de la problématique propre à l'enseignement des mathématiques. C'est avec POLYA G.(1945) qu'apparaît une volonté au sujet des problèmes, de "répondre tout particulièrement aux exigences des élèves et des professeurs de mathématiques". Ce mathématicien dont, depuis 35 ans, l'autorité est reconnue en ce qui concerne la résolution de problèmes fait paraître en 1954 un remarquable ouvrage intitulé "Mathematics and plausible reasoning" dans lequel il met en avant le rôle essentiel joué par l'induction. Il est le promoteur d'une réflexion analysant les liens étroits entre le raisonnement mathématique et le raisonnement expérimental. POLYA G.(1954) montre aussi son intérêt pour les démarches de découverte dans l'histoire[3]. Cette analyse des démarches

de pensée fondée sur une étude historique de certains problèmes a été aussi utilisée de façon encore plus explicite par LAKATOS I. (1976) qui a proposé comme prototype l'histoire du théorème d'Euler. Les grands mathématiciens encore de nos jours prennent la peine de présenter des problèmes élémentaires et leurs solutions; c'est le cas par exemple de STEINHAUS H(1959; 1960) RADEMACHER et TOEPLITZ O. (1967) SIERPINSKI W. (1970).

Mais POLYA G. et les autres mathématiciens tout en s'intéressant aux résolutions de problèmes utiles pour l'enseignement des mathématiques et en fournissant une analyse très riche des processus de recherche ne proposent bien souvent qu'une étude introspective[1] Ils ne mettent en place aucune expérimentation.

C'est avec la volonté de pratiquer une expérimentation minutieuse que la recherche en didactique des mathématiques s'est de plus en plus intéressée à la résolution de problèmes.

L'I.R.E.M. de Strasbourg (1973a)publie son premier livre du problème qui est une "réflexion sur la pédagogie de l'exercice et du problème" et peu après, en 1975, cet IREM organise à ALBE un colloque sur l'heuristique dont un compte-rendu est donné par le bulletin Inter-IREM (1975). Il y est fait état d'observations d'étudiants en situation de recherche de problèmes. Dans son cours d'heuristique générale puis dans son cours de 3ème cycle GLAESER G. (1976a, 1976b) organise une réflexion théorique, en prenant en compte des recherches de problèmes faites par des élèves. AUDIBERT G. et Coll. (1975) étudient aussi les processus de résolution de problèmes.

KRYGOVSKA A.Z. et CIOSEK M. (1973) dans un article consacré au comportement des élèves concernant les problèmes mathématiques font les remarques finales suivantes :

"Nous pouvons néanmoins entrer plus profondément dans le mode de la pensée mathématique de nos élèves et (dans) les cheminements de leur pensée mathématique ... Nous ne connaissons pas suffisamment nos élèves de ce point de vue".

CIOSEK M.(1976) déclare encore que "l'étude plus approfondie des processus de résolution de problèmes de mathématiques qui demeure un domaine très obscur de recherche aujourd'hui ... révèle la grande variété des cheminements possibles pour la résolution d'un problème simple"[1].

On peut dire qu'actuellement tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques admettent avec KRYGOVSKA A.Z.(1976) que "l'éducation mathématique n'est rien d'autre que le développement de l'activité mathématique de l'élève et il n'y a pas d'activité sans problème". Les principaux colloques sur l'enseignement des mathématiques consacrent une part non négligeable de leurs travaux à la résolution des problèmes[2].

En ce qui concerne l'étude de la résolution des problèmes de mathématique on peut distinguer en particulier trois sortes d'activités.

1. *Une première activité* consiste à utiliser directement la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques; c'est dans cette perspective qu'on été conçus les différents livres du problème de l'I.R.E.M. de Strasbourg (1973a; 1973b; 1973c; 1974; 1975) C'est dans cette perspective qu'on aborde en général les méthodes d'enseignement de la résolution de problèmes;c'est dans cette perspective qu'est conçue en grande partie la réflexion de POLYA G.

2. *Une deuxième activité* consiste en recherches fondamentales sur les processus intervenant dans la résolution de problèmes. Nous sommes alors dans le secteur de la didactique des mathématiques. BALACHEFF N.(1979; 1980; 1981) qui poursuit une telle activité de recherche a pour objectif de "comprendre les rapports entre l'élaboration d'explicationsen mathématiques et l'activité de preuve pour des élèves du premier cycle"[3] KRYGOVSKA A.Z. et CIOSEK M.(1973), CIOSEK M.(1976), GLAESER G.(1976a, 1976b), AUDIBERT G.(1980; 1981) font des recherches dans ce même secteur d'activité.

3. *Une troisième activité* consiste à utiliser la résolution de problèmes comme un moyen de répondre à des questions posées par la didactique des mathématiques. C'est ainsi que COMITI C., BESSOT A., PARISELLE C. (1980) l'utilise pour étudier "l'appropriation de la notion de nombre naturel par l'élève du cours préparatoire", BESSOT A., RICHARD F. (1980) l'utilise pour étudier le fonctionnement du schéma arbre[1]. Et un certain nombre de chercheurs en viennent alors à élargir la notion de problème pour passer à celle de "situation-problème", c'est-à-dire de situations dans laquelle on place les élèves et où d'une part la résolution de certains problèmes va être l'activité la plus importante de l'élève et où d'autre part l'expérimentateur se propose de maîtriser et d'analyser le contexte didactique dans lequel se trouve l'élève. Des didacticiens comme ROUCHIER et Coll.(1980), DOUADY R.(1980), BROUSSEAU G.(1981) bâtissent l'essentiel de leur recherche sur des situations-problèmes.
Le travail que nous présentons ne participe pas à la première activité décrite ci-dessus, par contre il tient des deux autres activités. Toute notre expérimentation est fondée sur l'analyse de la résolution de problèmes de géométrie euclidienne plane faite par les élèves de l'enseignement secondaire.
Nous voulons tout d'abord approfondir le champ de la géométrie euclidienne plane; la résolution de problèmes est donc pour nous un moyen et fait donc partie de notre méthodologie. Par exemple, si nous posons un problème sur le pentagone régulier, c'est en fait pour connaître entre autres la place occupée par la rotation et la symétrie dans les conceptions de l'élève. Mais les procédures employées par les élèves sont profondément liées à leurs concepts et les procédures sont les clefs de la résolution du problème, par conséquence, le problème revient au centre du champ conceptuel étudié. Il justifie aussi parfaitement la définition de VERGNAUD G. (1981) que nous avons rappelée à la page 47. De plus, certaines

procédures qui ont un degré de généralité suffisant deviennent pour nous des processus.
En adoptant une méthodologie fondée sur l'analyse des résolutions de problèmes, nous poursuivons un double objectif :

l'étude de processus de recherche de problèmes,

l'étude de concepts de la géométrie.

Examinons maintenant nos exigences vis-à-vis du problème[1] posé car elles sont déterminantes pour notre méthode de travail.

1. Le problème fait intervenir essentiellement un secteur du champ conceptuel choisi.

2. L'énoncé du problème ne laisse pas apparaître le secteur du champ conceptuel propice à la solution; nous disons que le problème n'est pas localisé pour l'élève.

3. Nous n'utilisons pas d'habillage[2] demandant une mathématisation du problème.

4. Le problème s'adresse à tous les élèves, de la sixième à la terminale.

5. N'importe quel élève du secondaire comprend parfaitement, lorsqu'on le lui explique, un processus de résolution du problème.

6. L'énoncé est compris par les élèves en quelques minutes.

7. La solution n'est immédiatement évidente pour personne.

8. Le problème intéresse l'élève; son intérêt est soutenu pendant au moins une heure; et la recherche de ce problème entraîne chez l'élève une activité importante.

9. La solution du problème n'offre aucune ambiguïté.

10. Le problème est traité avec succès par au moins un quart des élèves et conduit à un net échec au moins un quart des élèves, et ceci en une heure de recherche.

Notre expérimentation est la dernière étape d'un travail qui se déroule en trois temps : la pré-expérimentation sauvage, la pré-expérimentation et l'expérimentation. *Dans un premier temps, nous pratiquons une pré-expérimentation dite sauvage*, qui a pour objectif de préparer un ou plusieurs énoncés associés à la partie du champ conceptuel que nous voulons analyser. Nous essayons en classe divers problèmes laissés à l'initiative de chaque membre du groupe; cette phase dure plusieurs semaines pour ne pas dire plusieurs mois. Plusieurs centaines d'élèves sont ainsi observés.

Dans un deuxième temps, se déroule la pré-expérimentation. Muni d'un énoncé, chaque expérimentateur procède à des entretiens individuels de types cliniques et critiques. Plusieurs dizaines d'élèves sont ainsi observés et plusieurs problèmes peuvent être ainsi testés. Cette pré-expérimentation donne lieu à un rapport général mais aucun protocole d'élève n'est rédigé par les expérimentateurs. La pré-expérimentation dure elle aussi plusieurs semaines.

Le troisième temps est consacré à l'expérimentation proprement dite. Le problème choisi selon les critères présentés ci-dessus, est cherché individuellement par des élèves. Chaque élève est assis à côté d'un expérimentateur qui observe sa recherche. Plusieurs élèves, et donc plusieurs expérimentateurs, se trouvent ensemble dans une même classe. L'observation de chaque élève donne lieu à la rédaction d'un protocole . Pour rédiger son protocole, l'expérimentateur prend en compte son observation , les notes relevées au cours de cette observation, le brouillon de l'élève , l'enregistrement de ce que dit l'élève auquel il est recommandé de penser tout haut, et ses propres interventions. Les interventions de l'expérimentateur sont soit celles programmées dans le déroulement prévu du problème, soit des interventions devant susciter des explications, mais ne devant

pas faire référence à des éléments liés au contenu du problème, nous disons alors qu'il s'agit d'interventions neutres. Les résultats dont nous faisons état sont fondés sur les protocoles; ils ne s'appuient donc que sur l'expérimentation proprement dite.

Toutes ces contraintes portant sur le problème ou la procédure expérimentale sont réalisables car notre méthode s'appuie sur une condition nécessaire : le travail collectif d'une équipe d'enseignants en activité[1].

Le travail d'une équipe d'enseignants est nécessaire pour trois raisons principales.

Tout d'abord, le souci permanent qu'ont ces enseignants de répondre aux questions essentielles soulevées par leur fonction, évite à cette recherche de sortir du cadre de la didactique des mathématiques.

Ensuite, la connaissance des élèves et le nombre important d'élèves (un millier environ) directement en contact avec le groupe permet au cours de la pré-expérimentation sauvage de mettre au point efficacement l'énoncé (ou les deux ou trois énoncés possibles) du problème, et l'essentiel de la procédure d'observation.

Enfin, le fait que les protocoles soient rédigés indépendamment les uns des autres rend beaucoup plus crédible un résultat qui apparaît chez tous les expérimentateurs.

Nous présentons de façon détaillée notre méthode dans les chapitres consacrés à la technique d'expérimentation.

oooOOOooo

- CHAPITRE IV -

NOTRE PROBLEMATIQUE

Nous avons présenté les trois principales sources d'où découle notre problématique dans les trois précédents chapitres qui contiennent donc implicitement ou explicitement cette problématique.

La première source est la théorie de l'évolution des connaissances de l'école de Genève fondée essentiellement sur l'étude des enfants de moins de onze ans. *Mais alors qu'en est-il de l'évolution des connaissances mathématiques de nos élèves de 11 à 19 ans ?*

La deuxième source est la situation de l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement de la géométrie de ces quinze dernières années. *Quel sens donner à la géométrie dans l'enseignement secondaire ?*

"Je crois profondément, dit HALMOS P.R., que les problèmes sont le coeur des mathématiques". Cette phrase citée par BOUVIER A. (1981) correspond à notre conviction. La troisième source de notre problématique est *la recherche de problèmes* et les processus qui la régissent. Nous estimons aussi que les élèves en situation de recherche de problèmes fourniront des réponses à nos deux premières questions.

Nous reconnaissons avec les didacticiens français la nécessité de recourir à une diversité de méthodes et de développer l'expérimentation en classe. Mais notre contribution à cette recherche collective ne peut être que très partielle, et notre méthode de travail doit se satisfaire de nos possibilités, celles d'un I.R.E.M. de moyenne dimension dans une période particulièrement difficile pour ces instituts.

Nous avons donc ramené notre problématique à deux questions principales :

Quels sont les procédures et les processus de pensée les plus généraux qu'utilise l'élève face à un problème de géométrie euclidienne plane ?

Quelles sont les connaissances de géométrie euclidienne plane de l'élève de l'enseignement secondaire à l'heure actuelle et comment évoluent-elles de la sixième à la terminale en tant qu'outil permettant la résolution d'un problème ?

Ces deux questions contiennent un certain nombre de sous-questions que nous allons énumérer.

L'élève utilise-t-il le dessin dans ses procédures de résolution ?

Les instruments de dessin interviennent-ils de façon importante ?

Quel rôle jouent l'approximation et les unités de mesures ?

L'image mentale intervient-elle ? Quel est son degré de mobilité ?

La démarche déductive fondée sur l'utilisation de propositions domine-t-elle une démarche expérimentale fondée sur les réalisations de dessin ?

Comment interfèrent les réalisations concrètes et les concepts plus abstraits ?

La procédure amène-t-elle le concept ou bien est-ce le concept qui implique une certaine procédure ? Ou encore, les liens entre concepts et procédures se présentent-ils autrement ?

Comment apparaissent les démonstrations ? Les preuves ? Les explications ? Y-a-t-il des procédures particulièrement fréquentes chez l'élève ? Le hasard intervient-il dans les procédures ?

La recherche se fait-elle au moyen d'une stratégie d'ensemble ou au moyen de séquences assez courtes et se succédant de façon relativement indépendantes ?

Qu'est-ce qui permet à l'élève de trouver la solution ? Qu'est-ce qui le bloque ? Le débloque ? Qu'est-ce qui entraîne un échec ?

Après cette série de questions concernant procédures et processus, examinons des questions concernant le champ conceptuel.

L'élève utilise-t-il les groupes de transformations?

Utilise-t-il les trois isométries : translation, rotation, symétrie orthogonale ?

Comment apparaît, si elle apparaît, l'orientation du plan ?

La similitude a-t-elle un sens pour les élèves ? Est-elle envisagée par conservation des angles ? Par conservation des proportions ?

Les angles sont-ils facilement utilisés ?

Que signifie pour lui l'égalité des figures ? Des triangles ?

Les dessins, les instruments, les mesures jouent-ils un rôle dans l'évolution de tous ces concepts ?

Bien entendu, nous n'espérons pas donner des réponses argumentées et développées à chacune de ces questions, mais nous comptons par les questions énumérées orienter de façon la plus précise possible nos choix.

Nous devons pour terminer signaler les limites qui restreignent les possibilités de réponse aux questions que nous nous posons.

Tout d'abord, nous ne traitons dans le cadre du travail présenté ici que trois problèmes et nous n'observons au total qu'environ deux cents élèves en consacrant approximativement cinquante minutes à chaque élève.

Nous évitons au maximum toutes les difficultés dues à la lecture de l'énoncé, ce qui élimine une question de la didactique des mathématiques très importante. Nous créons une situation artificielle et ludique par rapport à la réalité quotidienne de la classe pour donner à l'élève envie de chercher le problème, ce qui supprime toute information sur l'intérêt des élèves vis-à-vis des problèmes.

Le problème est présenté de façon complètement indépendante par rapport au déroulement des classes qui ont lieu à l'époque où nous le posons, ce qui nous interdit de nous référer à une progression pédagogique suivie à ce moment-là par l'élève.

Nous effaçons les rapports maître-élève pour n'utiliser que des rapports élève-expérimentateur où l'expérimentateur est sympathique toujours intéressé et ne critique jamais.

Malgré cette situation très peu scolaire, mais grâce au fait que l'élève concentre toute son attention pendant trois bons quarts d'heure sur une résolution de problème, nous pensons arriver à une meilleure connaissance des processus de pensée et des champs conceptuels des élèves du secondaire.

oooOOOooo

PARTIE A

LE PROBLÈME CRI

- CHAPITRE V -

LA TECHNIQUE D'EXPERIMENTATION DU PROBLEME CRI

1. L'ENONCE

L'énoncé du problème proposé est le suivant :

On donne deux cercles et un rectangle, quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection ?

Nous appelons problème CRI le problème dont nous venons de donner l'énoncé.

2. LA SOLUTION

La réponse à ce problème est 18.

Pour nous, une démonstration du fait que 18 est la réponse au problème consiste à dire que, puisqu'une droite coupe un cercle en deux points, au plus, un rectangle coupe un cercle en 8 points, au plus; l'intersection de 2 cercles et d'un rectangle comporte donc 18 points, au plus; mais puisque nous pouvons trouver deux cercles et un

rectangle ayant 18 points d'intersection, comme l'indique la figure4,

ou comme le montreraient des inégalités, nous en concluons donc que le maximum cherché est égal à 18.

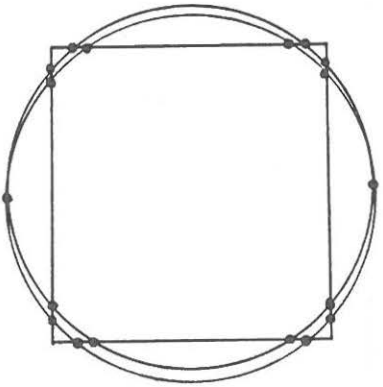


Figure 4

3. EXPERIMENTATEURS ET ELEVES

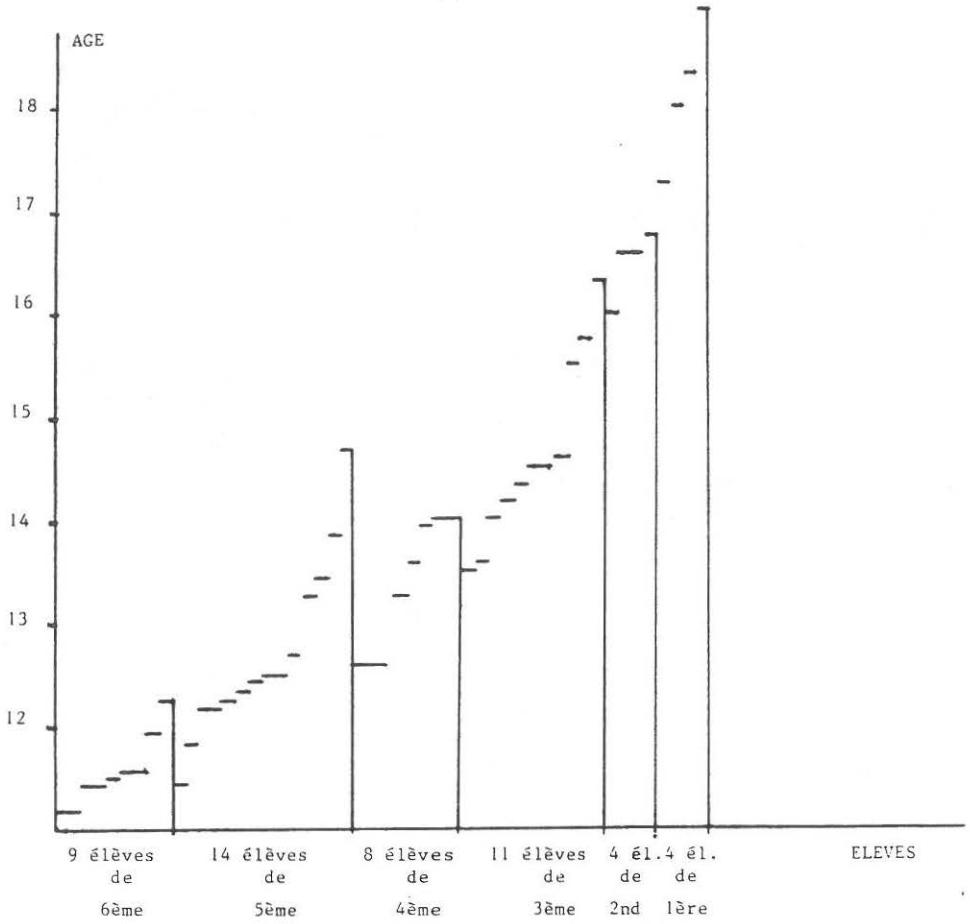
L'expérimentation qui est décrite ci-après a été menée par les neuf enseignants de mathématiques suivants : AUDIBERT G., AUGE A., BELLARD N., BRUNET R., CHAUVET B., CHEVALIER A., CONEJERO M.T., GROS C., LEENHARDT N.[1]

Elle s'est déroulée durant les mois d'Octobre et Novembre 1979. Mais la pré-expérimentation sauvage et la pré-expérimentation qui ont préparé cette expérimentation ont été effectuées durant l'année scolaire 1978-1979. Cette expérimentation a eu lieu dans trois établissements scolaires différents qui sont :

le collège de Castries - Hérault
le collège des Escholiers de la Mosson - Montpellier
le lycée technique Mermoz - Montpellier

Elle a porté sur 50 élèves, répartis comme suit : 9 élèves de sixième; 14 élèves de cinquième; 8 élèves de quatrième; 11 élèves de troisième; 4 élèves de seconde T; 4 élèves de première G.

L'âge des élèves évolue selon le graphique 5. Nous représentons chaque élève par un trait de $\frac{2,5}{\sqrt{2}}$cm ; l'ordonnée de ce trait est l'âge de l'élève. Les élèves sont regroupés classe par classe.



Graphique 5

4. LE DEROULEMENT DE L'EXPERIENCE

Lors de l'expérimentation, la totalité ou une partie de l'équipe des expérimentateurs est présente en même temps que les élèves dans une salle de l'établissement scolaire. La plupart du temps, les expérimentateurs rencontrent les élèves au début d'une heure de classe dans la salle où travaillent habituellement les élèves, ils restent ensemble durant toute l'heure.

Dès les premières minutes de la séance, les expérimentateurs prennent la classe en charge. Le professeur de cette classe peut

d'ailleurs être absent. *Ils se présentent aux élèves en donnant les motifs de leur intervention* et en insistant sur le fait que le problème n'est pas comptabilisé dans leur scolarité, qu'il n'est pas nécessairement en rapport avec ce qu'ils étudient en mathématique actuellement et que par certains côtés, il ressemble plutôt à un jeu-devinette. Ils demandent aussi aux élèves de donner le maximum d'explications, de penser tout haut, et de ne pas effacer ce qu'ils écrivent mais de barrer simplement s'ils en éprouvent le besoin, ceci afin que leur démarche soit bien comprise et plus facile à analyser quelques jours plus tard.

Le plus souvent, l'exposé des motifs des expérimentateurs a été développé par le professeur lors d'une heure de classe antérieure. Les expérimentateurs, durant ces premières minutes, essaient de créer une ambiance détendue.

Ensuite, expérimentateurs et élèves s'installent côte à côte. S'il y a plus d'élèves que d'expérimentateurs, le professeur ou l'un d'entre nous prend en charge le groupe des élèves en surnombre.

Le problème est ensuite énoncé et écrit au tableau par un expérimentateur :

On donne deux cercles et un rectangle, quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection ?

Il répète la phrase en permutant les mots "rectangle" et "deux cercles". Il explique la signification de l'expression "points d'intersection", en traçant au tableau la figure 6.

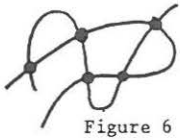


Figure 6

Chaque expérimentateur tient à la disposition de l'élève auprès duquel il se trouve les instruments de dessin suivants : papier, stylos, double-décimètre, règle, rapporteur, équerre, compas. Si l'élève le lui demande, il lui prête un de ces instruments qui se trouvent soit en évidence sur la table, soit dans une sacoche hors du regard.

L'expérimentateur reste attentif à ce que l'énoncé soit très vite assimilé sans erreur. Nous avons rencontré au total dans le problème quatre interprétations erronées de l'énoncé; la rectification s'obtient par la demande d'une lecture attentive de cet énoncé. Les dessins de la figure 7 donnent deux exemples de mauvaise interprétation de l'énoncé.

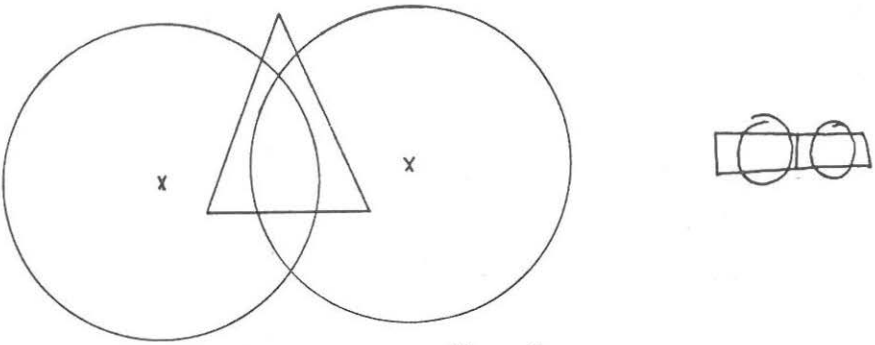


Figure 7

Dans le premier cas, l'élève prend un triangle et 2 cercles, dans le deuxième cas, il prend deux rectangles et 2 cercles. Dans les deux cas, l'expérimentateur invite l'élève à relire l'énoncé et immédiatement, ce dernier est compris correctement.

Pendant toute la durée de la recherche du problème faite par l'élève, l'expérimentateur prend des notes et sollicite des explications.

Dans la plupart des cas, il enregistre sur magnétophone.

Certains expérimentateurs, parce que l'élève ou eux-mêmes étaient réticents, n'ont pas utilisé les toutes premières fois le magnétophone; mais par la suite, cet appareil a été mis en service sans exception (sauf panne technique) et s'est avéré un outil indispensable[1].

Avant chaque dessin, il essaie de savoir ce que veut faire l'élève, il essaie donc de connaître les anticipations faites par l'élève et les raisons qui justifient ces anticipations. Pour cela, il pose les questions suivantes : "qu'est-ce que tu vas faire ?"

"Pourquoi ?". S'il varie un peu ses questions, ce sont toujours des questions neutres, c'est-à-dire ne devant faire appel à aucun élément du problème ni à aucune notion mathématique. Il prend en note les phrases de l'élève.

Pendant la réalisation du dessin, il essaie de savoir exactement ce que fait l'élève et note aussi quels instruments de dessin ou quels autres outils ce dernier utilise, dans quel ordre et avec quelle facilité (la main seule, le double décimètre, la règle, ...).

Après la réalisation du dessin, lorsque l'élève observe son dessin, l'expérimentateur essaie de connaître ses observations et les raisonnements qu'elles déclenchent : il essaie donc de connaître les observables de l'élève que donne une lecture immédiate du dessin réalisé, mais aussi les observables constatés par le sujet (l'élève) sur sa propre réalisation du dessin. Il essaie ensuite de connaître quelle relation l'élève établit entre ses observables et ses idées et comment il coordonne le tout. Pour cela, il pose à l'élève après qu'il ait réalisé son dessin, la question : "Qu'est-ce que tu en penses ?", ou une question analogue.

Les observations de l'expérimentateur reposent sur le schéma du processus élémentaire que nous décrivons plus loin.

Si l'élève résout le problème avant la fin de la séance, l'expérimentateur lui propose un deuxième problème dont l'énoncé est : "On donne un cercle et deux rectangles, quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection ?".

5. LES PROTOCOLES

Chaque expérimentateur rédige ensuite un compte-rendu, ou protocole, pour chaque élève qu'il a observé.

Pour effectuer cette rédaction, il essaie d'appliquer avec la meilleure approximation possible les règles suivantes :

- rendre compte de l'intégralité des actions de l'élève et minuter le déroulement de sa recherche.

- reproduire fidèlement tous les dessins de l'élève au début de chaque protocole, le dessin étant ou bien décalqué ou bien reproduit à une échelle précisée.
- indiquer la succession des traits constituant un dessin et expliquer le pourquoi de chacun de ces traits.
- reproduire intégralement les paroles prononcées par l'élève et l'expérimentateur, les expliquer.
- effectuer un compte-rendu en langage naturel, en s'appuyant sur des figures constituées pour l'essentiel par les dessins de l'élève.
- diviser, quand cela est possible, le texte en séquences, chaque séquence étant associée à un même dessin et comportant la description de ce qui se passe avant, pendant et après la réalisation du dessin.

Une dernière page du compte-rendu portant des indications générales concernant la façon de chercher de l'élève, et divers commentaires personnels, est quelquefois rédigée par l'expérimentateur. Cette page fort utile à l'analyse globale des protocoles que nous sommes amenés à faire n'est pas conservée dans le fascicule des protocoles.

Dans la partie F se trouvent cinq protocoles du problème CRI numérotés[1] :

6-11;07-2 / 5-11;05 / 4-14;00-1 / 3-14;07 / 1-18;00

Nous appelons respectivement Kar, Fen, Jos, Mic et Lou les élèves correspondant à ces protocoles.

6. LES REPONSES

Nous voyons au cours de l'analyse des protocoles que les élèves proposent essentiellement l'une des quatre réponses[2] suivantes :

le plus grand nombre possible est 10 ;
le plus grand nombre possible est 14 ;
le plus grand nombre possible est 16 ;
le plus grand nombre possible est 18 .

Ces réponses correspondent pour eux respectivement aux figures 8, 9 , 10, et 4 .

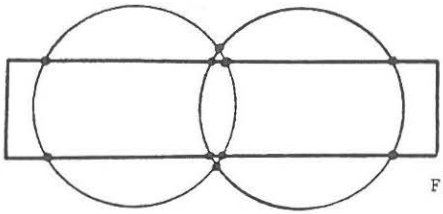


Figure 8

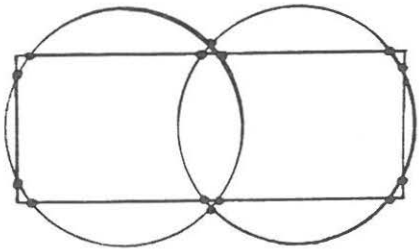


Figure 9

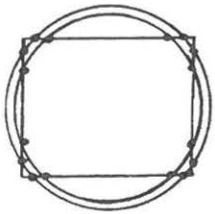


Figure 10

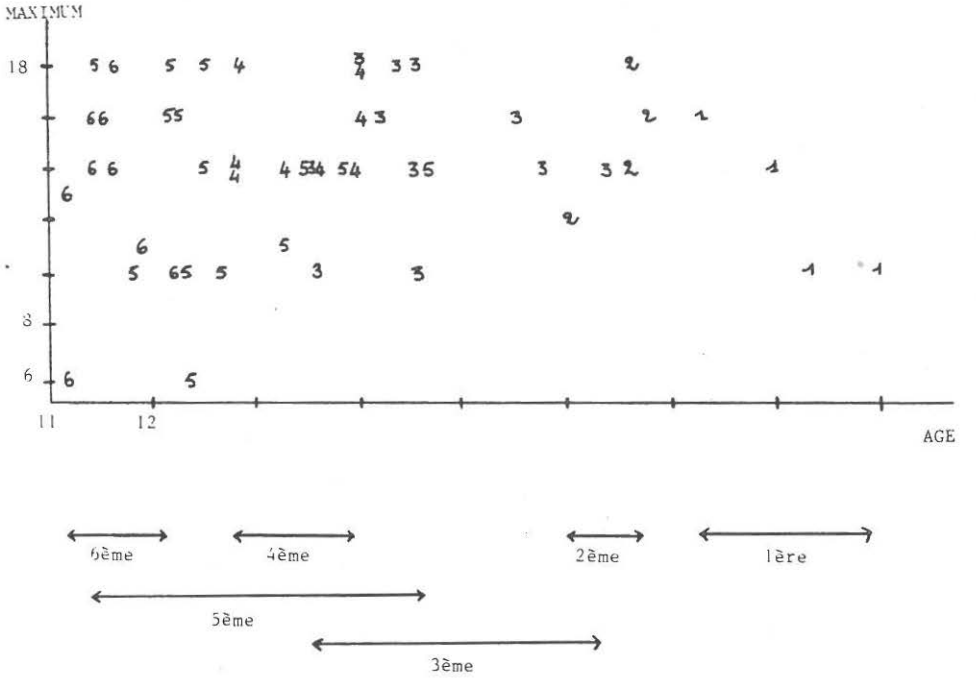
Ces quatre solutions et les dessins qui les accompagnent illustrent de façon importante l'analyse du concept d'équilibre que nous étudions à l'occasion de ce problème.

Le tableau 11 représente pour chaque élève le maximum obtenu. Nous ne retenons un tel maximum que s'il est explicite et s'il correspond à un raisonnement ou à une figure correcte. Si ce maximum comporte deux résultats, par exemple "10 et 12", cela signifie que le deuxième résultat a été obtenu après une intervention de l'expérimentateur et que, sans cette intervention, l'élève se serait arrêté après avoir obtenu le premier résultat.

PROTOCOLES	MAXIMUM
6-11;02-1	6
6-11;02-2	13
6-11;05-1	14
6-11;05-2	16
6-11;06	16
6-11;07-1	14
6-11;07-2	18
6-11;11	11
6-12;03	10
5-11;05	18
5-11;10	10
5-12;02-1	16
5-12;02-2	18
5-12;03	16
5-12;04	10 et 12
5-12;05	6
5-12;06-1	18
5-12;06-2	14 et 18
5-12;08	10
5-13;03	11
5-13;05	14
5-13;10	14
5-14;08	14
4-12;10-1	14
4-12;10-2	18
4-12;10-3	14
4-13;03	14
4-13;07	14 et 16
4-13;11	14
4-14;00-1	18
4-14;00-2	16
3-13;06	14 et 18
3-13;07	10 et 18
3-14;00	18
3-14;02	16
3-14;04	18
3-14;06-1	14
3-14;06-2	18
3-14;07	10
3-15;06	16
3-15;09	14 et 18
3-16;04	14
2-16;00	12
2-16;07-1	18
2-16;07-2	14
2-16;09	16
1-17;03	16
1-18;00	14
1-18;04	10
1-19;00	10

Tableau II

On peut représenter ces résultats sur le graphique 12 où l'âge est en abscisse et le maximum obtenu par l'élève en ordonnée. Le point correspondant à un élève est représenté au moyen d'un chiffre désignant la classe de l'élève.



graphique 12

On peut voir immédiatement qu'il n'y a pas un progrès net dans les réponses en fonction de l'accroissement de l'âge, puisque la moyenne des réponses obtenues

entre 11 ans et 13 ans est de 13,6, pour 22 élèves ;

entre 13 ans et 15 ans, elle est de 14,5 , pour 17 élèves ;

entre 15 ans et 19 ans, elle est de 14, pour 11 élèves.

De même, nous n'avons pas un progrès net avec le niveau de scolarisation, puisque la moyenne des réponses obtenues est de

13,8 en 6ème, pour 9 élèves,
13,5 en 5ème, pour 14 élèves,
15,3 en 4ème, pour 8 élèves,
14,8 en 3ème, pour 11 élèves,
13,8 en 2ème et 1ère, pour 8 élèves.

7. LE PROBLEME CRI ET NOTRE PROBLEMATIQUE

Les exigences vis à vis du problème que nous avons explicitées page 59 dans notre introduction sont-elles réalisées ?

Les 8 dernières le sont. Grâce aux longues pré-expérimentations, nous avons pu respecter ces exigences. Par contre, les deux premières ainsi que notre problématique face au problème CRI nécessitent quelques explications.

Si nous sommes bien avec nos 2 cercles et notre rectangle dans le champ de la géométrie euclidienne plane, il peut sembler que le problème CRI soit un problème combinatoire.

En fait, les élèves abordent ce problème essentiellement de deux manières qui n'ont rien à voir avec les questions combinatoires. D'une part, ils se trouvent confrontés à des difficultés purement géométriques qui n'apparaissent pas dans l'énoncé : nombre de points d'intersection de deux cercles, intersection d'un cercle et d'une droite qui le coupe presque tangentiellement, points multiples, figures très symétriques. D'autre part, ils font intervenir des démarches qui mettent en évidence des processus dépassant largement les particularités du problème.

Dans l'expérimentation du problème CRI, nous avons choisi de négliger l'analyse des concepts de géométrie pour être plus attentifs aux processus.

Ce choix nous a conduits à introduire des êtres géométriques tels que le cercle, le rectangle, l'intersection, bien connus déjà dans l'enseignement élémentaire et qui nous paraissent susceptibles d'une part d'éviter les difficultés dues à des concepts plus élaborés et d'autre part, de laisser beaucoup plus en évidence les processus.

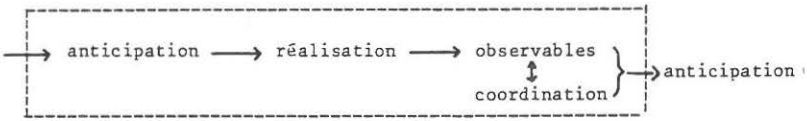
Ce choix nous est aussi imposé par notre manque d'habileté dans l'expérimentation et dans la rédaction des protocoles. Nous pensons éviter ainsi la complexité due à l'interaction entre le fonctionnel et le structurel.

Il correspond enfin à un a priori qui nous fait penser que les processus sont plus importants que le contenu conceptuel; mais nous sommes amenés à rectifier ce point de vue dans la suite de nos expériences, et à attacher autant d'importance aux concepts qu'aux processus.

8. LES PROCESSUS ELEMENTAIRES

Pour organiser notre observation, rédiger nos protocoles et élaborer notre analyse, nous sommes partis de l'hypothèse suivante : *la recherche d'un problème de géométrie est la succession d'un certain nombre de processus élémentaires. Un processus élémentaire est composé d'une première étape qui consiste à anticiper une image, d'une deuxième étape qui consiste à réaliser un dessin et d'une troisième étape qui consiste à enregistrer des observables (tant sur la réalisation proprement dite que sur le dessin achevé) et à coordonner observables et idées ; ce qui conduit à une nouvelle anticipation.*

A la fin du processus élémentaire, nous avons un autre état des coordinations. Nous schématisons cette hypothèse de la manière suivante :



Examinons, à titre d'exemple, le protocole 5-11;05; nous appelons FEN l'élève correspondant à ce protocole; on trouve les dessins cités sur la figure 13.

A la 25ème minute, Fen vient de dessiner et d'observer la figure (19).

Alors commence un processus élémentaire, nous dirons qu'il s'agit du $n^{ième}$ processus élémentaire. FEN anticipe le dessin (20) en disant : "on fait un rectangle et on dessine un rond qui coupe pareil les deux côtés". Il réalise le dessin (20) . Il obtient 8 points; il coordonne alors ce résultat partiel, portant sur l'intersection d'un cercle et d'un rectangle, avec le problème plus général de l'intersection de 2 cercles et d'un rectangle, comme le montre son anticipation du dessin (21) .

Le $(n + 1)^{ième}$ processus élémentaire commence donc par une anticipation de FEN qui déclare que "si on fait un autre cercle qu'on peut mettre pareil ça en fait plus", il ajoute que son dessin (21) va être plus grand que (20) . Il réalise sa figure (21) , qui est effectivement deux fois plus grande que la figure (20) . Il observe ensuite que "c'est pas très net". Il en vient donc à coordonner cet observable avec l'idée de cercles rigoureusement définis; et c'est pour cela qu'il ajoute : "il faudrait faire des ronds plus ronds que ça".

Il en arrive donc à une nouvelle anticipation qui est le début du $(n + 2)^{ième}$ processus élémentaire; il veut refaire sa figure en utilisant le compas, et aussi une règle pour le rectangle. Il réalise alors la figure (22) , etc...

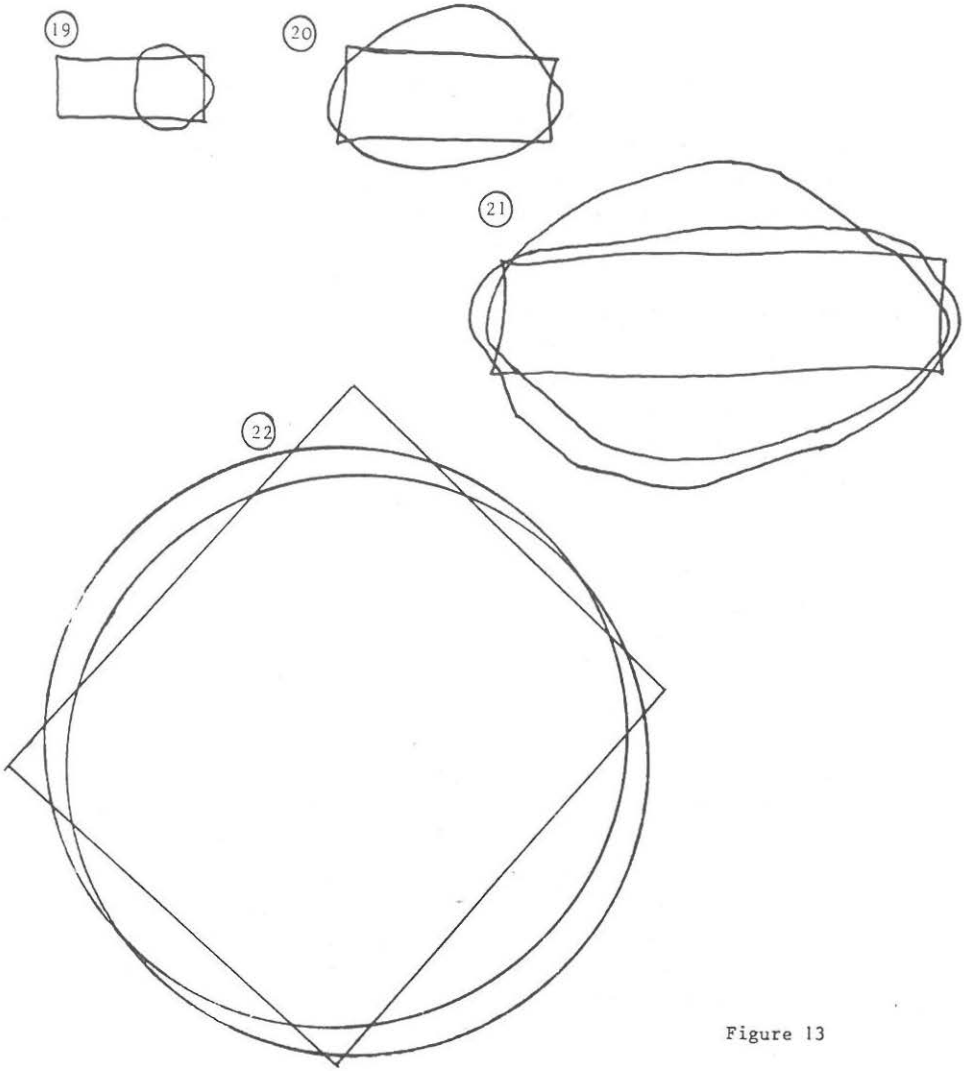


Figure 13

Nous devons tout de suite préciser qu'il n'est pas du tout commode d'obtenir de l'élève des processus élémentaires explicites, c'est-à-dire, en général, accompagnés d'explications orales complétant les dessins. Nous relevons deux principales raisons à cela. D'une part, les observables et la confrontation que le sujet fait entre ses observables et sa coordination peuvent ne pas donner lieu à une prise de conscience nette de sa part. D'autre part, la succession des processus élémentaires est trop rapide ou à vitesse trop variable et alors l'expérimentateur n'ose pas intervenir de peur de perturber le processus.

D'une manière générale, nous nous heurtons constamment au degré d'explicitation des faits que nous analysons. Aussi, nous contrôlons tout d'abord nos hypothèses sur les faits explicites, puis nous regardons s'il n'y a pas de contradictions flagrantes entre ces mêmes hypothèses et les faits implicites qui s'y rapportent.

Comment avons-nous vérifié l'existence des processus élémentaires ? Nous avons fait deux sortes de vérifications. Une première vérification directe consiste à relever des suites de processus élémentaires explicites chez l'élève; nous venons de donner un exemple d'une telle suite à la page 84.

Une deuxième vérification provient de notre technique d'observation et d'interrogation des élèves. En effet, notre observation repose sur ce qui se passe avant, pendant, et après chaque dessin, comme nous l'avons dit lors de la présentation du déroulement de l'expérience (page 76). Ces 3 temps correspondent aux trois étapes d'un processus élémentaire. Puisque nous utilisons cette technique d'observation et d'interrogation pendant la recherche de l'élève sans créer, semble-t-il, de perturbation notable, nous estimons

que nous avons là une vérification indirecte de notre hypothèse. Cette deuxième vérification est renforcée par notre méthode de rédaction des protocoles. En effet, dans la grande majorité des cas, nous avons pu rédiger les protocoles comme une succession de textes décrivant chacun un processus élémentaire. On peut examiner à ce titre les protocoles qui se trouvent dans la partie F de notre travail.

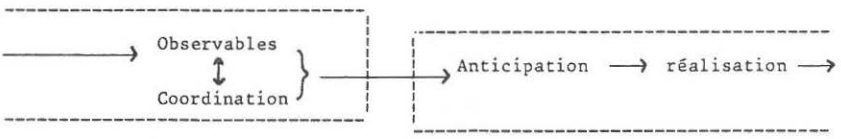
Nous ne perdons pas de vue qu'une théorie de la connaissance des plus enrichissantes pour l'étude des processus heuristiques est, selon nous, celle développée par PIAGET J.(1975). Sans rechercher à assimiler nos résultats expérimentaux à cette théorie, ni à accommoder cette théorie aux faits que nous mettons en évidence au cours de nos expériences, nous tenons à confronter ces faits et cette théorie. En particulier, il nous semble que la notion de processus élémentaire doit être comparée à l'étude des interactions entre sujet et objet présentée par PIAGET J.(1975) dans son chapitre II.

Sans nous étendre outre mesure dans ce texte sur cette comparaison, nous devons remarquer que les processus liés à la recherche d'un problème de géométrie font intervenir des interactions entre sujet et objet proches du type II B (page 64 de PIAGET (1975)). En effet, nous sommes dans une situation où le sujet (l'élève) applique ses opérations à des objets qui ont un statut intermédiaire entre celui d'objet matériel (par exemple la trace, appelée cercle, laissée par un compas utilisé normalement) et celui de pur concept (par exemple le cercle, ensemble de points équidistants, etc ...). L'élève obtient ainsi en observant ses dessins des observables relatifs à l'objet (Obs O). L'action du sujet consiste à réaliser

des dessins. Les observables relatifs à l'action du sujet (Obs S) sont des observations que fait l'élève sur sa propre réalisation avec une prise de conscience plus ou moins nette de ses intentions opératoires. Ces observables sur l'action (Obs S), nous les avons décomposés en anticipation d'une part et en réalisation d'autre part. Quant aux coordinations inférentielles des actions (ou opérations) du sujet (coord S), que le sujet projette, vérifie, ou découvre après coup par comparaison avec les Obs O et les Obs S, nous les retrouvons dans notre schéma ci-dessous sous le simple nom de coordination.

En définitive, le schéma, qu'on peut associer à un état tel que le définit PIAGET J. dans le cas des interactions II B, se présente sous la forme suivante :

il nous apparaît, compte tenu de ce que nous avons dit précédemment, très semblable au schéma que nous avons associé au processus élémentaire :



Précisons cependant que notre découpage fait qu'un processus élémentaire est décalé par rapport à un état.

oooOOooo

- CHAPITRE VI -

LA COMPENSATION DES LACUNES LOCALES

Dans un processus élémentaire, c'est à la charnière entre les observables et la construction de nouvelles coordinations que se jouent pour l'élève les progrès vers la solution du problème. Or, il nous est apparu que, très souvent, cette charnière reposait sur ce que nous appelons une lacune locale. C'est cette lacune locale que nous étudions maintenant.

1. EXEMPLES

Considérons tout d'abord le protocole 4-14;00-1 de l'élève que nous appelons JOS. Nous trouvons ce protocole dans la partie F.

Lorsque JOS observe son premier dessin que nous représentons sur la figure 14 , elle constate que le cercle supérieur ne touche pas la longueur L du rectangle située à droite. Elle se propose donc de déplacer ce cercle vers la droite de façon à obtenir un point de plus.

Elle dit explicitement : "Mais si je pousse par là ça me fera un point de plus donc 13". Elle réalise alors son projet, et trace la figure 15.

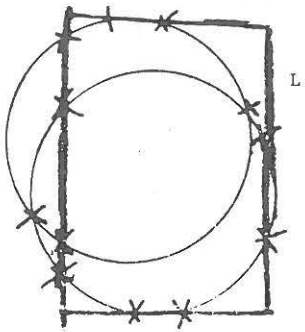


Figure 14

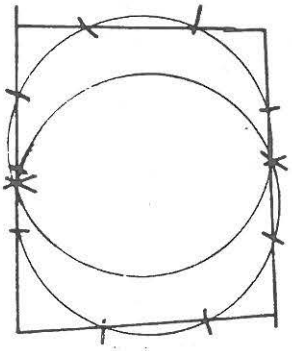


Figure 15

La démarche de JOS s'inspire d'une lacune portant sur un observable localisé : le fait qu'un cercle ne touche pas une longueur du rectangle. Nous disons donc que le passage du processus élémentaire correspondant à la figure 14 au processus élémentaire correspondant à la figure 15 se fait sous l'impulsion d'une lacune locale. De plus, la deuxième réalisation de JOS consiste alors à compenser cette lacune de manière à amener dans la solution du problème proposé un progrès plus ou moins précis sur un point particulier, cette compensation ayant été anticipée avant sa réalisation. Nous disons à cause de cela que cette lacune est compensée, ou encore que nous avons affaire à une compensation de lacune locale.

Considérons maintenant comme deuxième exemple l'élève FEN déjà cité page 84 · En réalisant son dessin (19) , qui se trouve

à la page 85 , FEN observe, comme lacune locale, le fait que son cercle ne coupe pas la longueur du rectangle qui se trouve à gauche. Il décide donc, pour compenser, de "couper pareil" les deux côtés au lieu d'en couper un seul. Il réalise alors son dessin (20) (page 85); et il obtient huit points d'intersection entre un cercle et un rectangle au lieu de six.

2. LACUNE LOCALE COMPENSEE

Nous disons, par définition, qu'il y a lacune locale compensée ou encore que le sujet (l'élève) procède par compensation de lacune locale s'il effectue la démarche suivante :

- *le sujet au vu d'une réalisation A met en évidence un observable qui est, pour lui, une lacune ou un défaut constaté au cours d'une lecture immédiate des faits et portant sur un aspect localisé de façon assez précise ;*
- *il procède alors à une nouvelle réalisation A' qui compense le défaut constaté sur A; de plus, cette réalisation A' est anticipée avant d'être réalisée; enfin, cette réalisation A' amène, pour lui, dans la solution du problème proposé un progrès.*

Nous utilisons L.L. pour lacune locale et L.L.C. pour lacune locale compensée.

3. LL : UN OBSERVABLE ?

Les premières questions que nous nous posons compte-tenu de notre problématique est la suivante : une L.L. est-elle un observable ? Le figuratif domine-t-il l'opératif ?

Examinons le premier exemple décrit dans ce chapitre VI et extrait du protocole de Jos. Cette élève ayant observé que le cercle supérieur ne touchait pas une des longueurs du rectangle veut déplacer ce cercle de manière à obtenir un point de plus et réalise la figure 15. Elle a donc certainement l'idée que d'autres positions sont possibles pour un cercle, ce qu'elle explicite d'ailleurs au début du processus élémentaire suivant en disant "... en changeant les positions des deux cercles ...". Elle ne perd pas non plus de vue l'objectif du problème qui est de trouver toujours plus de points. Et enfin, elle lie sûrement cette lacune au fait que l'autre cercle coupe la longueur L du rectangle (voir la figure 14) ou que les deux cercles coupent la longueur du rectangle située à gauche.

Il nous apparaît donc qu'une L.L. est un observable à situer dans un état préalable de coordination, c'est une perturbation dans un ensemble conceptualisé; il faut donc que l'élève soit en possession d'une coordination et que l'observable perturbant cette coordination apparaisse pour qu'il puisse y avoir L.L.

Une L.L. est donc bien un observable, mais pas un observable à l'état pur, tout simplement parce qu'il n'existe pas d'observable détaché de tout contexte de coordination.

4. L.L.C. ET PROGRES

Si, comme nous le verrons un peu plus loin, les découvertes dans la recherche du problème sont accompagnées très fréquemment de L.L.C., la réciproque n'est pas vraie; en effet, on peut avoir des L.L.C qui ne font pas progresser la solution, du moins immédiatement.

Pour justifier notre affirmation, prenons un exemple extrait du protocole 5-13;10.

Dans un dessin que nous représentons à la figure 16 , l'élève décompte 7 ou 8 points mais n'est pas satisfait de la situation au point A. Il refait alors son dessin de manière à éliminer cette difficulté.

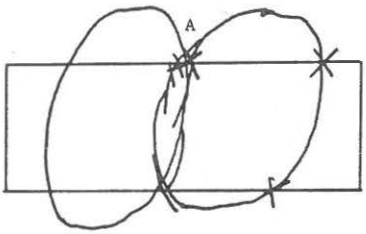


Figure 16

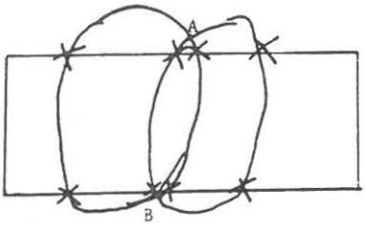


Figure 17

Il obtient donc la figure 17 où apparaissent très distinctement dans la région A l'intersection du premier cercle et du rectangle d'une part et celle du deuxième cercle et du rectangle d'autre part; mais par contre c'est en B que se situent les difficultés. Nous pensons donc que l'élève passe de la figure 16 à la figure 17 au moyen d'une L.L.C., mais il n'y a pas progrès immédiat puisque ce qui est gagné d'un côté, en A, est perdu d'un autre, en B. Ainsi, le caractère local de la correction peut ne pas amener un progrès immédiat.

5. HYPOTHESE

L'hypothèse que nous faisons au sujet des L.L.C. est la suivante : *les principales découvertes de l'élève dans la recherche de son problème sont accompagnées très fréquemment de L.L.C.*

Pour vérifier cette hypothèse, compte-tenu des réponses étudiées au chapitre V, nous examinons tous les élèves ayant obtenu des maxima égaux à 14, à 16, à 18. Nous examinons donc 36 protocoles. Pour chacun de ces élèves, nous regardons le moment de leur processus de recherche où apparaissent pour la première fois les 14 points, les 16 points et les 18 points. Puisqu'il y a 17 élèves ayant trouvé un maximum de 14, 9 élèves ayant trouvé un maximum de 16 et 10 élèves ayant trouvé un maximum de 18, nous examinons 65 passages différents; en effet,

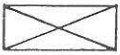
$$17 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 10 = 65$$

Nous cherchons à savoir pour chacun de ces passages, s'il est accompagné ou non d'une L.L.C.

Nous ne reproduisons pas dans ce texte l'analyse qui nous conduit à dire qu'il y a ou qu'il n'y a pas L.L.C., car cela l'alourdirait démesurément.

Nous présentons nos résultats dans le tableau 18 . Pour chacun des passages analysés, nous utilisons diverses abréviations.

: le passage n'est pas atteint.

 : le passage est absent de la recherche.

(n) Oui : existence d'une L.L.C., explicite, débouchant sur le dessin (n) du protocole.

(n) oui : existence d'une L.L.C., peu ou pas explicite, débouchant sur le dessin (n) du protocole

(n) non : passage, n'ayant rien à voir avec une L.L.C. ; et aboutissant au dessin (n).

(n) ? : passage, aboutissant au dessin (n), et ne permettant pas de se prononcer de façon suffisamment nette, quant à l'existence d'une L.L.C.

Numéro du protocole	Maximum	1er passage à 14	1er passage à 16	1er passage à 18
6-11;05-1	14	③ oui		
6-11;05-2	16	⑨ ?	⑮ ?	
6-11;06	16	④ oui	⑧ ?	
6-11;07-1	14	⑧ oui		
6-11;07-2	18	② Oui	⑥ non	⑫ ?
5-11;05	18	⑱ Oui		㉑ non
5-12;02-1	16		⑦ oui	
5-12;02-2	18	③ Oui		⑧ non
5-12;03	16	⑮ Oui	㉒ ?	
5-12;06-1	18		⑨ non	⑫ oui
5-12;06-2	14	④ Oui		
5-13;05	14	⑧ ?		
5-13;10	14	⑬ Oui		
5-14;08	14	⑫ Oui		
4-12;10-1	14	④ Oui		
4-12;10-2	18	⑧ oui	⑨ non	⑩ oui
4-12;10-3	14	④ oui		
4-13;03	14	④ oui		
4-13;07	14	⑥ non		
4-13;11	14	⑬ oui		
4-14;00-1	18			⑥ oui
4-14;00-2	16	② ?	③ ?	
3-13;06	14	⑤ Oui		
3-14;00	18	⑥ ?		⑨ ?
3-14;02	16	① ?	② oui	
3-14;04	18	⑤ ?	⑧ oui	⑨ oui
3-14;06-1	14	⑰ Oui		
3-14;06-2	18			⑪ non
3-15;06	16	⑦ ?	⑨ ?	
3-15;09	14	⑥ Oui		
3-16;04	14	⑨ Oui		
2-16;07-1	18	③ oui	④ non	⑥ Oui
2-16;07-2	14	㉔ oui		
2-16;09	16	⑦ oui	⑫ non	
1-17;03	16	⑥ ?	⑪ ?	
1-18;00	14	⑧ Oui		

Tableau 18

Nous avons analysé 56 passages puisque parmi nos 65 passages initiaux, neuf sont absents des processus.

En définitive, les L.L.C. sont présentes une fois sur deux environ, et absentes avec certitude une fois sur huit environ. Nous estimons donc, suffisamment fondée l'hypothèse énoncée plus haut.

6. FREQUENCE DES L.L.C.

Nous ne cherchons pas à montrer par des résultats numériques globaux l'importance des L.L.C., tant leur existence est évidente et leur apparition fréquente. Nous insistons beaucoup sur le rôle qu'elles jouent dans les processus de découverte comme le montre la vérification précédente.

AUDIBERT G. et Coll.(1975) ont déjà entrevu l'importance de la L.L.C. Ils avaient introduit alors une notion d'"opposition" pour analyser les processus de recherche de problèmes; ils s'agissait de recherches collectives effectuées par un groupe de quatre étudiants. Ceci nous permet de supposer qu'on dispose avec les L.L.C. d'un moyen de comparaison entre la recherche individuelle et la recherche collective[1].

7. LA NEGATION

Si, pour ne pas avoir à introduire de nouveaux exemples, nous nous en tenons aux trois exemples précédemment cités dans ce chapitre VI, nous voyons que, dans le premier cas, la L.L.C. apparaît lorsque Jos constate que le cercle supérieur ne touche pas la longueur du rectangle située à droite, dans le deuxième cas la L.L.C. apparaît lorsque Fen observe que son cercle ne coupe pas la largeur du rectangle

qui se trouve à gauche, dans le troisième cas (protocole 5-13;10) la L.L.C. apparaît parce que l'élève n'est pas satisfait de ce qui se passe en A. Ces lacunes ou ces défauts reposent donc fondamentalement sur une négation.

Nous savons quel rôle très important a la négation dans la théorie des structures cognitives fondée sur l'équilibration. Nous estimons de plus que, en regard d'une telle théorie, très générale (voir par exemple les trois dernières pages de la conclusion de PIAGET J. et HENRIQUES G.(1978) ou encore le paragraphe VII de la conclusion générale de PIAGET J.(1974b)), l'observation d'individus en situation de recherche de problèmes permettant précision et minutie, donne une autre approche des structures de la connaissance. Nous estimons que la mise en évidence des L.L.C. contribue à cette approche de la connaissance du réglage des négations qui, comme le disent PIAGET J. et HENRIQUES G.(1978) à la page 244, est "fort loin d'être simple".

oooOOooo

- CHAPITRE VII -

DIFFERENCIATION ET INTEGRATION

Une constatation importante que nous faisons sur l'ensemble de ces 50 protocoles est que nous trouvons peu de démonstrations spontanées de l'élève. La démonstration telle que nous la concevons au chapitre V-2, pour donner une réponse au problème, n'est pas utilisée par l'élève. Dans sa recherche, l'élève, au mieux, élabore un processus bâti sur la dualité différenciation-intégration et cette dualité lui permet d'aborder ce que nous appelons traditionnellement la démonstration; c'est du moins l'hypothèse que nous faisons.

1. DEFINITION

Avant de vérifier cette hypothèse, essayons d'expliquer ce qu'on entend par processus de différenciation-intégration dans le cas spécifique du problème proposé, et dans le cas d'un problème quelconque.

A l'occasion de la recherche du problème que nous avons proposé, des problèmes plus simples peuvent être extraits du problème général; ce sont notamment les questions particulières :

(a) Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection de deux cercles ?

(b) Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection entre un cercle et un rectangle ?

(c) Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection entre un cercle et une droite ?

Si, au cours de sa recherche, l'élève aborde des questions particulières qui peuvent être considérées comme des sous-problèmes du problème général posé, nous disons qu'il y a différenciation entre les questions particulières et le problème général. Nous parlons donc de différenciation si l'élève aborde les questions (a), (b), ou (c), lors de sa recherche du problème proposé. Nous laissons de côté des sous-problèmes autres que (a), (b) et (c) dont le rôle ne semble pas essentiel à notre analyse au stade où nous voulons la présenter. Si de plus les solutions particulières de ces questions sont coordonnées entre elles et conduisent ainsi à la solution générale, nous disons qu'il y a intégration des sous-problèmes dans le problème général.

2. HYPOTHESE

Notre hypothèse est la suivante :

Le plus souvent, la découverte de la solution est fortement corrélée à l'existence d'un processus de différenciation-intégration; c'est-à-dire que d'une part, lorsque les élèves sont assez loin de résoudre le problème, les processus de différenciation-intégration sont quasiment absents; d'autre part, c'est un processus de différenciation-intégration qui contribue le plus souvent à la découverte de la solution.

De plus, c'est ce processus de différenciation-intégration qui engendre une preuve.

3. UN EXEMPLE : LE PROTOCOLE 3-14;04

Nous allons examiner tout d'abord le protocole particulier 3-14;04 et mettre en évidence le processus de différenciation-intégration qui explique la recherche de cet élève.

Durant les dix premières minutes, l'élève construit des dessins composés de deux cercles et d'un rectangle, ce sont les dessins ① ② ③ ④ ⑤ , représentés sur la figure 19 ci-dessous.

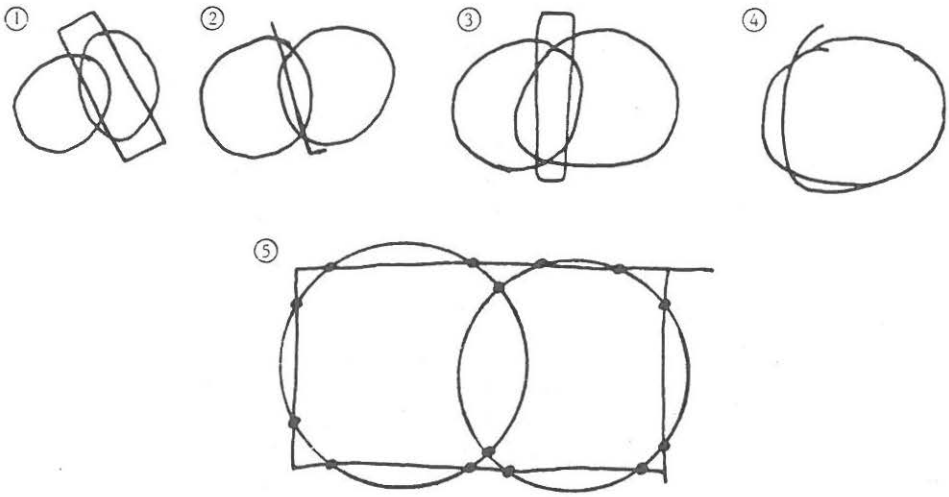


Figure 19

Il aboutit à la solution à 14 points en (5) . Mais à ce moment-là, il a bien différencié la question particulière (a) du problème général puisqu'il dit : "je pense qu'avec les deux cercles, on ne peut pas en avoir d'autres ...". Il veut dire qu'il ne peut pas obtenir plus de deux points d'intersection avec deux cercles. Ce sous-problème avait certainement été abordé au cours de la figure (4) .

Il cherche ensuite à voir comment placer le rectangle, une fois donnés les deux cercles sécants en deux points. Il cherche donc à résoudre le problème général après y avoir intégré la solution du sous-problème (a); cela le conduit aux deux dessins (5') et (5'') , que nous présentons à la figure 20 ci-dessous :

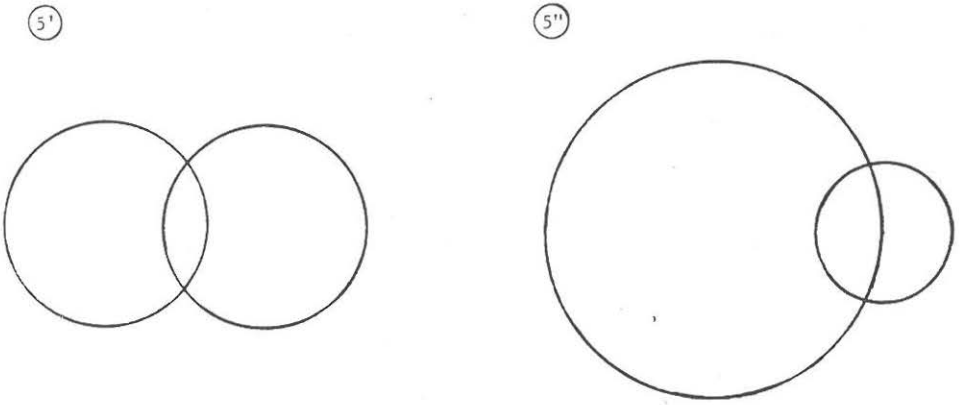


Figure 20

Il faut attendre la 20ème minute pour qu'apparaisse le deuxième sous-problème (b) et sa solution, car il dit :

"avec un cercle il y en a huit".

Il veut dire qu'un cercle et un rectangle peuvent se couper en huit points, ce qui est clair sur son dessin ⑥ représenté à la figure 21 ci-dessous, si on observe le cercle supérieur.

⑥

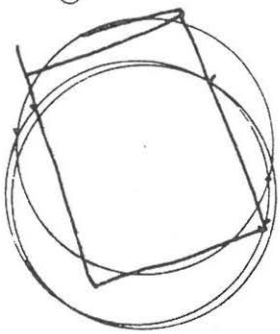


Figure 21

⑦

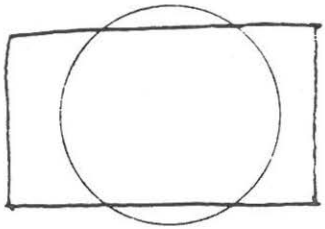


Figure 22

C'est ensuite un long processus d'intégration qui commence (de la 20ème à la 40ème minute). ⑥ et ⑦ que nous représentons aux figures 21 et 22 sont des tentatives d'intégration avortées confirmées par ses dires :

"mais si je ne croise pas les cercles, j'en perds 2".

"il faudrait essayer d'en mettre un autre et qu'ils se croisent".

On voit sur ⑥ la difficulté qu'il a à placer des cercles donnant le plus grand nombre possible de points d'intersection.

En observant ⑥ , il dit : "avec un cercle, j'en ai huit et en tout 15, je devrais en trouver un peu plus".

C'est à la 32ème minute qu'il réussit une intégration partielle. En effet, il trace (8) , représenté à la figure 23 ci-dessous, et dit "ça m'en fait 8 + 8".

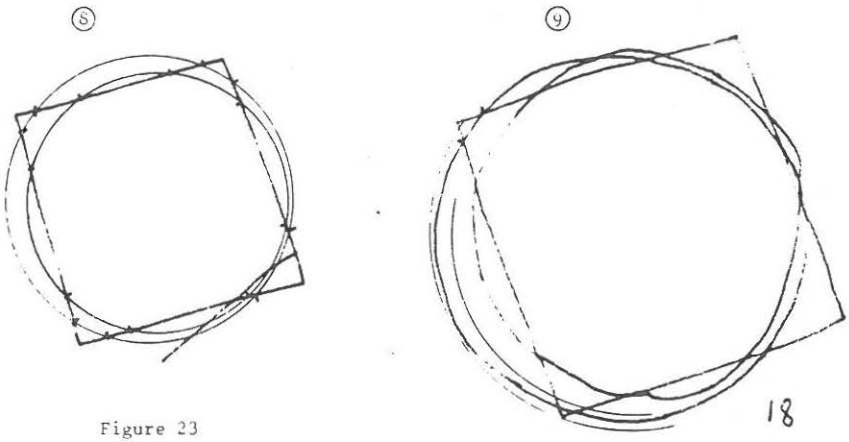


Figure 23

Figure 24

Il a donc réussi à intégrer le sous-problème (b) au cas général; il lui reste donc à intégrer (a), ce dont il a parfaitement conscience en disant : "je pourrais faire croiser les cercles, là ils se croisent presque"; il veut parler alors de la figure (8) . Et il arrive enfin à obtenir (9) représenté à la figure 24; où il compte 18 points avec la certitude d'avoir obtenu le maximum. Il dit alors : "il n'y a pas d'autre, j'en suis sûr, avec un cercle 8 maximum, avec l'autre 8, pour deux cercles, 2".

Ainsi, nous observons qu'en premier lieu, un processus de différenciation-intégration est à l'origine de la découverte de la solution. Ensuite, nous remarquons que le raisonnement qui accompagne sa conviction, est la reproduction du processus de différenciation et d'intégration; ceci nous fait dire que le processus de différenciation-intégration constitue l'ossature de sa démonstration générale.

4. VERIFICATION DE L'HYPOTHESE

Par le protocole 3-14;04 nous avons illustré notre hypothèse, il nous faut maintenant la vérifier sur l'ensemble de nos 50 élèves.

Vérifions tout d'abord que les processus de différenciation-intégration sont quasiment absents dans les protocoles où les élèves sont assez loin de résoudre notre problème. Nous allons donc examiner la place que tient le processus de différenciation-intégration dans les 14 protocoles où les élèves ont obtenu un maximum strictement inférieur à 14 points. Ces protocoles sont les suivants :

6-11;02-1 (6points) , 6-11;02-2 (13 points) ,
6-11;11 (11 points), 6-12;03 (10 points) , 5-11;10 (10 points)
5-12;04 (10 et 12 points), 5-12;05 (6 points) , 5-12;08 (10 points)
5-13;03 (11 points), 3-13;07 (10 et 18 points) 3-14;07 (10 points)
2-16;00 (12 points), 1-18;04 (10 points) , 1-19;00 (10 points)

On peut dire que les différenciations (a) (b) (c) et a fortiori l'intégration sont complètement absentes dans 11 de ces protocoles. Les trois protocoles restants sont : 3-14;07 / 3-13;07 / 5-13;03.

Dans le protocole 3-14;07 les différenciations (a) et (b) sont fortement présentes, mais les solutions des sous-problèmes correspondants sont fausses et l'intégration est un échec.

Dans le protocole 3-13;07 l'élève procède de façon très consciente selon un processus de différenciation-intégration, et arrive à un maximum de 18 points après une intervention de l'expérimentateur, lui permettant de dépasser son blocage à 10 points dû à une forte position d'équilibre (la notion d'équilibre est étudiée dans le chapitre suivant).

Dans le protocole 5-13;03 le sous-problème (b) est nettement résolu, par contre la solution du sous-problème (a) apparaît à l'élève alors que cette élève n'avait pas explicitement différencié (a) du problème général; l'intégration est un échec.

On affirme donc que le processus de différenciation-intégration est quasiment absent des protocoles où les élèves sont assez loin de résoudre le problème.

On peut remarquer aussi que la différenciation, qui peut paraître très simple a priori, n'est pas obtenue facilement puisque près d'un quart des protocoles ne l'introduisent pas . Cela confirme le résultat de VERGNAUD G. et Coll.(1978) où l'on constate que les enfants "réussissent à traiter les relations en jeu lorsqu'elles sont présentées isolément".[1]

Nous allons maintenant examiner la place tenue par le processus de différenciation-intégration dans les 10 protocoles où a été trouvée, sans intervention importante de l'expérimentateur, la solution du problème. Il s'agit des protocoles :
6-11;07-2 , 5-11;05 , 5-12,02-2 , 5-12;06-1 , 4-12,10-2, 4-14;00-1, 3-14;00 , 3-14;04 , 3-14;06-2 , 2-16;07-1.

Nous obtenons globalement les résultats suivants :

- 1 seul élève (3-14;00) n'a semble-t-il pas fait usage de ce processus de différenciation-intégration; (a) et (b) n'apparaissent pas dans la résolution du problème réalisé en 20 minutes. Au cours de la résolution d'un second problème qu'on lui a posé, à savoir "on donne un cercle et deux rectangles, quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection ?" la différenciation (b) apparaît.
- 1 seul élève (2-16;07-1) quoique utilisant les différenciations (a) et (b), ne procède pas par intégration pour obtenir le résultat; ce résultat est obtenu par L.L.C. uniquement.
- 2 élèves (5-12;02-2 et 4-14;00-1) trouvent les 18 points avant de développer explicitement le processus de différenciation-intégration, mais dans les deux cas, ce processus apparaît très explicitement ensuite.
- les 6 autres procèdent explicitement par différenciation et intégration pour aboutir à la solution. Si dans deux cas (a) n'est pas explicite, nous pensons que cette différenciation (a) est acquise implicitement. Nous laissons au lecteur le soin d'analyser attentivement les protocoles de KAR et FEN présentés dans la partie F qui sont, avec le protocole 3-14;04, examinés dans ce chapitre VIII, trois des six protocoles dont nous venons de parler.

Parmi les 9 élèves ayant utilisé le processus de différenciation-intégration, tous, sauf un, ont terminé leur travail par un raisonnement reproduisant ce processus ("8 + 8 + 2 = 18") qui peut être considéré comme une éventuelle démonstration.

Toujours parmi ces 9 élèves, 6 ont eu des difficultés sérieuses avec l'intégration et quatre parmi ces 6 sont passés par l'étape à 16 points, les cercles étant concentriques, avant d'arriver à 18 points.

En résumé, un peu plus d'un quart de nos élèves n'ont même pas abordé la différenciation, et il s'agit des élèves ayant obtenu un maximum autour de 10. La moitié des élèves donnant des solutions à 14 ou 16 points ont nettement utilisé la différenciation, mais ne sont pas parvenus au stade de l'intégration. Moins du quart de nos élèves, ceux donnant les solutions à 18 points, ont parcouru à peu près complètement le processus de différenciation-intégration.

Nous considérons donc que la première partie de notre hypothèse est confirmée.

5. LA PREUVE

Il est actuellement difficile de caractériser les diverses démarches d'élèves qui semblent avoir un rapport avec la démarche déductive couramment utilisée en mathématique. BALACHEFF N. (1980; 1981) distingue les notions d'explication, de preuve, de démonstration, de raisonnement[1] et ses travaux sur l'élaboration d'explications et l'activité de preuve permettent d'avancer dans cette voie. Au stade où nous en sommes de notre travail expérimental nous utilisons deux vocables : la démonstration et la preuve. La démonstration, en référence à la démarche déductive la plus traditionnelle, se présente comme une suite d'affirmations fondées sur des théorèmes mathématiques souvent explicites, et sur des théorèmes de logique très peu explicites ayant pour objectif de rendre indubitable la valeur de vérité d'un résultat. La preuve est une explication donnée par l'élève pour renforcer par des arguments explicites le caractère de vérité d'un résultat. La démonstration

est un type tout particulier de preuve. La preuve a un sens plus large, mais aussi plus vague pour nous. L'élève y ayant recours peut avoir pour objectif de convaincre un interlocuteur précis ou d'accroître simplement sa propre conviction.

Pour démontrer que 18 est le plus grand nombre possible de points d'intersection de deux cercles et d'un rectangle, nous montrons d'une part que 18 est un maximum et d'autre part que 18 peut être atteint. Nous n'avons pas rencontré de *démonstration* parfaitement maîtrisée et suffisamment explicite dans nos protocoles. De plus aucun élève, au cours de sa recherche, ne s'appuie sur une démarche déductive ayant quelque ressemblance avec la démonstration proposée au chapitre V§2.

Ces faits doivent, dès maintenant, nous faire réfléchir sur notre enseignement des mathématiques tel qu'il se pratique traditionnellement. Mais, comme nous ne voulons pas rester sur un résultat négatif, nous nous sommes penchés sur ce qui ressemble le plus à une démonstration, qu'on peut considérer comme une preuve, et nous avons fait un certain nombre de constatations.

On peut inventorier 8 preuves; elles correspondent aux protocoles 6-11;06-2 , 6-11;07-2 , 5-11;05 , 5-12;02-2 , 4-12;10-2 , 4-14;00-1 , 3-14;04 , 3-14;06-2.

Toutes ces preuves n'apparaissent qu'à la fin de la recherche de l'élève.

Toutes, sauf celle du 6-11;06-2, se trouvent dans des protocoles où le processus de différenciation-intégration est très net. Ces preuves nous apparaissent comme une description synthétique d'un processus de différenciation-intégration. Le lecteur peut examiner de près quatre de ces huit preuves; celles de KAR, FEN et JOS se trouvent dans la partie F de notre texte; la quatrième apparaît dans l'analyse du protocole 3-14;04 faite à la page 104.

Nous avons étudié encore les 6 protocoles dans lesquels on trouve un raisonnement qui ressemble à une preuve même si cette démonstration est fausse puisqu'elle aboutit à un maximum égal à 10, 14 ou 16. Ces 7 protocoles sont les suivants : 6-11;07-1 , 5-12;03 , 5-12:06-2 , 5-13;10 , 3-13;07 , 3-14;06-1 , 2-16;09 .
Dans ces protocoles, le raisonnement apparaît au bout d'un long processus de recherche, il ne fait que décrire succinctement ce processus, ce qui renforce encore notre hypothèse sur le rôle de la preuve chez l'élève.

Nous ne voulons pas pousser plus loin l'analyse de ce qu'est la preuve chez l'élève, avant de pouvoir la faire porter sur les protocoles de plusieurs problèmes; mais pour l'instant nous pensons que la deuxième partie de notre hypothèse est suffisamment établie.

6. DIFFERENCIATION-INTEGRATION ET OBSERVABLES

Quelle est la place tenue par les observables dans les processus de différenciation et d'intégration ? Les observables semblent tout à fait indispensables à la différenciation, comme le montrent clairement les recherches de KAR (protocole 6-11;07-2) et de FEN (protocole 5-11;05). Par contre l'intégration, si difficile pour la quasi-totalité de nos élèves, demande plutôt un certain recul par rapport aux observables, et une bonne coordination d'idées, devant d'ailleurs déboucher, comme nous l'avons montré, sur une preuve. Mais, c'est, semble-t-il, une confrontation entre une coordination d'idées et d'observables d'une part et la découverte de nouveaux observables d'autre part qui permet à ce processus de fonctionner.

- CHAPITRE VIII -

EQUILIBRE DANS LE PROBLEME CRI

Comme le montre l'étude réalisée au chapitre V et en particulier le tableau 11 de la page 80 , les solutions proposées par l'élève sont essentiellement de quatre types : le maximum est 10, le maximum est 14, le maximum est 16, le maximum est 18. A ces quatre réponses correspondent généralement les quatre figures 8, 9, 10 et 4 (voir pages 79 et 73). En effet, 35 élèves obtiennent une de ces 4 réponses comme solution du problème; et parmi les 15 élèves qui ne donnent pas une de ces quatre réponses, 10 d'entre eux arrivent difficilement à en trouver une et cette dernière est toujours inférieure à 13.

Ce n'est pas prioritairement le type de solution trouvé par l'élève qui nous intéresse, mais plutôt le rôle joué par ces réponses, au cours du processus de recherche de l'élève. Aussi avant de pousser plus loin notre analyse, examinons plus attentivement un protocole.

1. UN EXEMPLE : LE PROTOCOLE 6-11;07-1

Nous prenons en considération le protocole 6-11;07-1.

A la septième minute, l'élève propose le dessin que nous représentons à la figure 25 , tel qu'il est dessiné par l'élève. Il obtient 10 points.

Figure 25

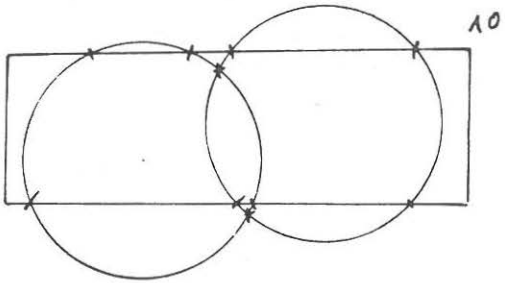


Figure 26

Puis, il utilise la règle et le compas pour tracer la figure 26.

Il obtient encore 10 points. Il se déclare alors convaincu que 10 est le maximum et ceci à la 12ème minute. L'expérimentateur lui demande : "Pourquoi est-ce le maximum", l'élève répond : "Je n'arrive pas à trouver plus ...". Suit alors un long blocage qui dure jusqu'à la 21ème minute, où il redit encore qu'il est assuré que le nombre cherché est 10. Puis une nouvelle idée arrive. Il dessine d'abord un rectangle, puis un premier cercle qui coupe 6 fois le rectangle; c'est alors un nouveau dessin, réalisé à la 22ème minute, et que nous représentons ci-dessous à la figure 27 .

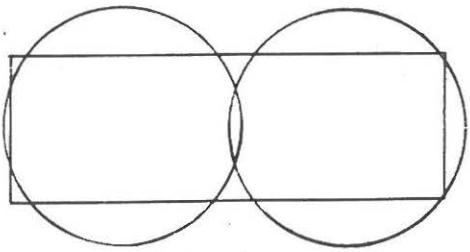


Figure 27

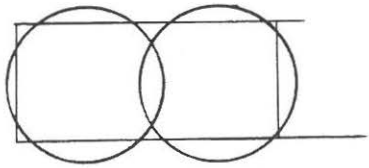


Figure 28

Il conçoit ainsi la figure à 14 points. Il arrive à réaliser, à la 36ème minute, une figure présentant très nettement 14 points d'intersection (figure 28 ci-avant). Il annonce : "Je crois qu'on ne peut pas en trouver davantage". Il cherche encore un peu, trace une 9ème et dernière figure et dit : "il y a des milliers de façons mais le plus c'est 14 points". Il propose d'ailleurs le raisonnement suivant, qu'il explique sur les figures déjà faites : un cercle et une droite donnent deux points, le premier cercle et le rectangle c'est 2 + 2 + 2, le deuxième cercle et le rectangle 2 + 2 + 2, les deux cercles donnent 2 points donc en tout 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 points. Il est convaincu et il s'arrête de chercher à la 45ème minute.

Nous constatons dans ce protocole, que l'élève passe par deux positions correspondant aux figures 8 et 9 présentées dans notre chapitre V: nous remarquons qu'après la première position (figures 25 et 26) il considère le problème comme résolu et reste bloqué très longtemps avant de repartir vers la deuxième position (figures 27 et 28) qui bloque à nouveau sa recherche et ceci définitivement.

Nous remarquons aussi que ces deux positions, qui bloquent l'élève, correspondent à des dessins très symétriques; un dessin comme celui représenté à la figure 28 ci-avant a deux axes de symétrie orthogonaux entre eux; et la deuxième position s'accompagne même d'un raisonnement où il décompte ses points en respectant une parfaite parité. Nous disons que dans son processus de recherche cet élève passe par deux positions d'équilibre.

2. DEFINITION

Dans un processus de recherche de problème l'élève atteint *une position d'équilibre, si un résultat obtenu en cours de recherche a tendance à bloquer, momentanément ou définitivement, le processus de découverte de la solution et si ce résultat correspond à une*

situation mathématique spécifique. Dans le cas de notre problème la situation mathématique spécifique repose sur une bonne symétrie de la figure qui peut être renforcée par un décompte symétrique des points d'intersection, comme le montre notre exemple précédent. Dans le cas d'autres problèmes les situations mathématiques spécifiques liées à cette position d'équilibre peuvent reposer sur bien autre chose que la symétrie orthogonale. Un des objectifs de la recherche en didactique peut être de faire l'inventaire des positions d'équilibre, ou plus généralement des caractères qui confèrent à certaines situations mathématiques une stabilité et une régularité à la fois rassurantes et blocantes.

3. HYPOTHESES

Nous faisons l'hypothèse qu'*un processus de recherche de problème passe par des positions d'équilibre*. C'est notre hypothèse générale.

Mais comme cette hypothèse ne peut être confirmée qu'après un nombre suffisant d'analyses de problèmes tels que le problème CRI, nous nous attachons à vérifier ici une hypothèse particulière à notre problème. Nous allons montrer qu'*il y a quatre positions d'équilibre, qui sont les quatre positions correspondant aux quatre cas présentés dans notre chapitre V. De façon plus précise encore, nous allons montrer que les moments de blocage, momentanés ou définitifs, de l'élève, apparaissent avec un de ces quatre cas de figures caractérisés par une symétrie axiale. Corrélativement, on trouve souvent un raisonnement très lié à la symétrie de la figure.*

4. VERIFICATION

Nous donnons les résultats permettant de vérifier l'hypothèse propre au problème CRI dans le tableau 29. Ce tableau est divisé en 7 colonnes.

Dans les deux premières colonnes, nous mettons les numéros des protocoles et le maximum obtenu, nous reproduisons donc dans ces deux premières colonnes le tableau 11 du chapitre V, page80 .

Dans la troisième colonne, nous mettons la lettre F si l'élève annonce qu'il a fini après avoir obtenu un maximum à 10 points correspondant à la figure 8 du chapitre V; nous mettons la lettre S si un dessin équivalent à la figure 8 apparaît dans son protocole, nous écrirons enfin la lettre I si un raisonnement, justifiant cette solution à 10 points, apparaît.

Dans les quatrième, cinquième et sixième colonnes, nous procédons de façon analogue, mais avec les résultats à 14, 16 et 18 points, et les figures 9, 10 et 4.

La dernière colonne est réservée aux cas autres que ces quatre cas; nous précisons, entre crochets, le nombre de points considéré comme un maximum et le numéro du dessin réalisé par l'élève précédant l'arrêt de sa recherche. Nous obtenons le tableau suivant :

Numéro du protocole	Maximum	10	14	16	18	Autres
6-11;02-1	6					
6-11;02-2	13	F S				F[8, ②];F[8, ③]
6-11;05-1	14	S	S			
6-11;05-2	16	F S	S			
6-11:06	16				F I	F[16, ⑧]
6-11;07-1	14	F S	F S I			
6-11;07-2	18		S	S	S	
6-11;11	11	F S				
6-12;10						
5-11;05	18	F S	S		F S	
5-11;10	10					
5-12;02-1	16			F S		
5-12;02-2	18		S		F S I	
5-12;03	16	F S	F S	F S I		
5-12,04	10 et 12	S				
5-12;05	6					
5-12;06-1	18			S		
5-12;06-2	14 et 18		F S I		F S I	F[12, ②]
5-12;08	10					
5-13;03	11					
5-13;05	14	S	S			
5-13;10	14	F S	F S I			
5-14;08	14	S				

Tableau 29

Numéro du protocole	Maximum	10	14	16	18	Autres
4-12;10-1	14		F S			
4-12;10-2	18		S	S	F I	
4-12;10-3	14	F S	F S			
4-13;03	14	S	F S			
4-13;07	14 et 16		F S	F S		F[12, ⑤]
4-13;11	14	F S	S			F[6, ②]
4-14;00-1	18				S	
4-14;00-2	16	S	S	S		
3-13;06	14 et 18		F S		F S I	
3-13;07	10 et 18	F S I				
3-14;00	18		S		F S	
3-14;02	16		S			F[16, ②]
3-14;04	18		S	S	F S I	
3-14;06-1	14	F S I	F S			
3-14;06-2	18	S				
3-14;07	10	F S				
3-15;06	16	F S	S	S		
3-15;09	14 et 18	S	F S		F S I	
3-16;04	14	S	S			
2-16;00	12	S				
2-16;07-1	18		S		S	
2-16;07-2	14	F S	S			F[8, ⑨]
2-16;09	16	F S	S	F S I		
1-17;03	16	S	S	F S		
1-18;00	14	S	S			
1-18;04	10					
1-19;00	10	F S				

Tableau 29 (suite)

Dans ce tableau, nous décomptons 49 moments de blocage (49 lettres F dans le tableau). 39 d'entre eux accompagnent un des quatre cas décrits précédemment (39 couples de lettres FS dans le tableau) et douze parmi ces 39 sont renforcés par un raisonnement (12 triplets FSI dans le tableau). Nous avons donc selon notre définition 39 positions d'équilibre parfaitement caractérisées par un blocage et une symétrie. Ce qui nous permet de dire que notre hypothèse est très fortement confirmée.

Mais afin de ne laisser aucun doute sur les résultats, examinons les 10 autres situations de blocage. Dans deux situations, les élèves annoncent comme résultat : 18 points. Ils s'appuient sur un bon raisonnement symétrique, bien que leur dessin correspondant à la figure 4 , page 73 , n'ait pas été réussi. Trois situations de blocage correspondent à un résultat à 8 points reposant sur les trois dessins représentés à la figure 30 ci-dessous.

Figure 30

Deux d'entre elles correspondent à un résultat à 12 points reposant sur les deux dessins représentés aux figures 31 et 32 ci-après.

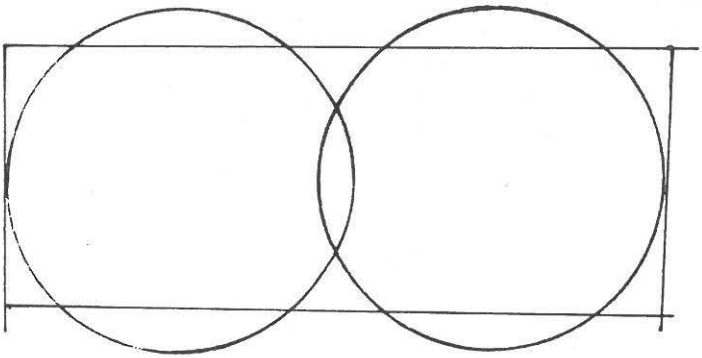


Figure 31

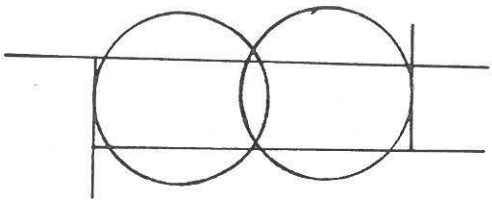


Figure 32

Il est remarquable que dans les sept cas que nous venons de citer la symétrie joue un rôle indéniable. Il ne reste que trois situations (sur 49) que nous ne savons pas expliquer.

Dans le problème CRI l'obtention d'une figure symétrique, accompagnant un blocage parfois assez long du dynamisme de la recherche est largement vérifiée. Cependant, l'examen d'un seul problème ne permet pas d'analyser, de façon détaillée, la situation d'équilibre. Les cas de symétrie non accompagnés de blocage que nous avons pu observer (cf. tableau 29) montrent que le lien entre la situation mathématique spécifique qui est ici la symétrie, et le blocage, est plus complexe qu'une simple relation de cause à effet. Nous reprendrons l'analyse de la notion d'équilibre à propos d'autres problèmes.

5. POINTS REMARQUABLES

Une autre situation mathématique spécifique, dans ce problème, apparaît fréquemment; elle se caractérise par la présence, dans le dessin de l'élève, de points remarquables. En effet, nous avons pu faire l'observation suivante : alors que pour obtenir le plus de points possibles, les élèves doivent éviter des positions particulières, plus de la moitié des 50 élèves observés ont dessiné des figures présentant des points remarquables. Nous en donnons quelques exemples dans les figures 33 et 34 ci-après.

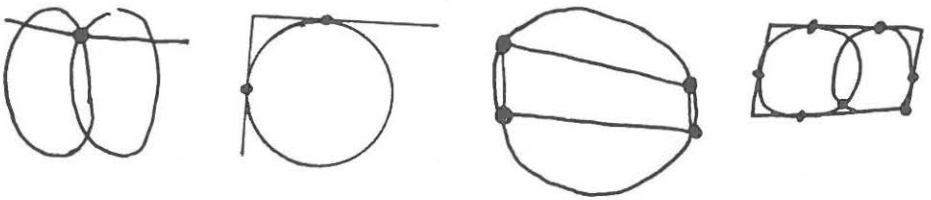


Figure 33

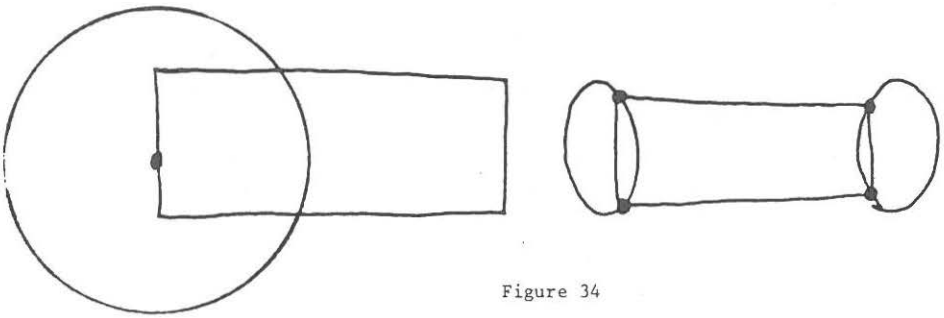


Figure 34

Nous dirons qu'un point remarquable est mis en évidence dans les cas de figure suivants :
un cercle passe par un sommet du rectangle (point multiple),
un côté du rectangle passe par un point d'intersection des cercles (point multiple),
le centre d'un cercle est situé sur l'autre cercle ou sur un côté du rectangle, deux courbes (2 cercles ou le rectangle et un cercle) sont tangentes.

Puisque tous les élèves ayant un maximum égal au plus à 13, dessinent un très grand nombre de figures, avec des points remarquables, comme on peut s'en rendre compte avec le protocole de MIC qui se trouve dans la partie F, ceci nous permet de supposer que nous avons un autre type d'équilibre. Nous reprendrons ultérieurement l'étude de cet équilibre.

6. EQUILIBRE ET OBSERVABLE

Les positions d'équilibre ont ceci de remarquable, dans ce problème particulier qu'elles s'appuient sur une bonne symétrie de la figure.

On a à faire, en effet, au groupe diédral D_2 comme groupe de transformations laissant la figure invariante et même pour la solution à 16 points au groupe diédral D_4. Nous pensons qu'il y a là une bonne forme qui est un observable particulièrement prégnant. Il semble donc que l'observable joue un rôle important dans l'équilibre, même si l'on sait qu'il n'y a pas d'observable sans un état préalable des coordinations où il se situe; l'observable renforce les positions d'équilibre.

oooOOooo

- CHAPITRE IX -

L'EMPIRISME DANS LA RECHERCHE DE L'ELEVE

1. LES DESSINS

L'élève au cours de sa recherche a réalisé un grand nombre de dessins. En effet, nous avons une moyenne de 15 dessins par élèves, avec la répartition représentée par le schéma suivant :

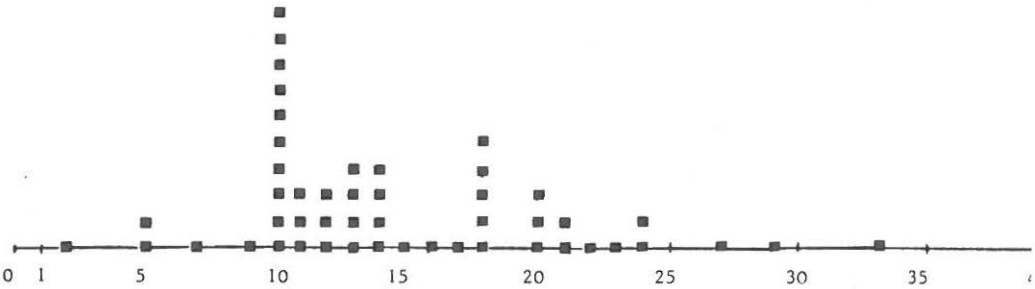


Schéma 35

Dans ce graphique, l'abscisse désigne le nombre de dessins. Pour un nombre de dessins donné, chaque point ayant même abscisse représente un élève ayant réalisé ce nombre de dessins. Ainsi, il

y a 5 élèves ayant réalisé 18 dessins. Un seul élève, ayant réalisé 43 dessins, n'est pas représenté sur le graphique constituant la figure 35 .

Nous estimons de plus que les images mentales, qui ne sont pas accompagnées d'un dessin, occupent une place importante dans la réflexion de l'élève. Nous justifions cette affirmation par la fréquence des simulations gestuelles des élèves au cours de leur recherche. Par exemple, dans 6-11;02-1, entre la 21ème et la 25ème minute, l'expérimentateur observe "des gestes avec le doigt pour placer le deuxième cercle"; au encore au début du protocole 6-11,05-1, l'élève "dessine un premier cercle, puis essaie d'en mettre un deuxième dans différentes positions sans le tracer et en déplaçant son compas".

Donc l'élève, face à ce problème, réfléchit à travers une multitude d'images mentales et de dessins.

La démonstration que nous faisons au chapitre V, pages 72 et 73, prouve que la solution de ce problème peut s'obtenir sans qu'il soit besoin de faire appel à un grand nombre d'images.

Aussi faut-il se demander si l'abondance des dessins et des images ne provient pas de la présentation que nous avons donnée de ce problème. Pour essayer de répondre à cette question nous avons réalisé un test de comparaison. Nous avons posé à des élèves le problème en leur demandant dans un premier temps de prévoir la solution sans dessiner, puis dans un deuxième temps de donner une nouvelle solution en dessinant s'ils le désiraient.

Pour 33 élèves de seconde et 41 élèves de 5ème, nous avons obtenu les résultats enregistrés dans le tableau suivant :

Maximum obtenu	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	18	20	∞
Seconde sans dessin	1	1	3		4		5	10		1		4	1	1		2
Seconde avec dessin		1					3	2		3		12	5	4		1
Cinquième sans dessin			1	1	4	1	15	9	1	4		3	3	0	1	1
Cinquième avec dessin					1		1	9		2	2	25	1			

Tableau 36

Le tableau 36 ci-dessus est divisé en colonnes. Dans la colonne numérotée n, nous notons en première ligne le nombre d'élèves de la classe de seconde ayant proposé un maximum de n points d'intersection sans avoir dessiné. Puis en deuxième ligne, le nombre d'élèves de la classe de seconde ayant proposé un maximum de n points d'intersection après avoir dessiné. Les deux dernières lignes portent sur la classe de cinquième.

Sans avoir besoin de réaliser un test plus rigoureux accompagné de statistiques plus précises, il est manifeste d'après les résultats enregistrés que le dessin fait avancer la solution de l'élève. Il n'est donc pas du tout anormal que l'élève y fasse appel de lui-même, pour résoudre le problème.

De plus, il a été parfaitement prouvé que les éléments figuratifs tiennent une place de choix dans la genèse des opérations spatiales comme le montre par exemple HATWELL Y.(1964). Nous considérons que l'abondance des dessins et des images qui apparaît dans notre expérience est tout à fait conforme au choix qu'on peut attendre des élèves de cet âge là.

Le problème que nous avons proposé dépend d'un assez grand nombre de paramètres puisque, en termes de géométrie analytique, on peut dénombrer sept variables réelles. Ce nombre offre donc une grande variété de figures[1]. On peut se demander si l'élève arrive à envisager une mobilité suffisante de la figure. Le concept d'équilibre que nous avons étudié au chapitre VIII est une réponse partielle à cette question. En dehors des blocages dus à l'équilibre, il semble que l'élève donne à ses figures une mobilité suffisante.

En utilisant la terminologie de PIAGET J.(1966), nous dirons que les élèves utilisent sans difficulté des images anticipatrices de transformation (AT) sans qu'il soit plus difficile pour eux d'anticiper des résultats (ATP) que des trajets ou modifications successives (ATM).

On peut classer comme AT la plupart des images provenant de LLC; c'est ainsi que dans les seuls protocoles qui se trouvent dans la partie F de ce document nous relevons quelques exemples très nets qui illustrent nos affirmations. Ce sont des images AT et même pour la plupart ATM qui aboutissent à :
(2) dans 6-11;07-2 ; (5) dans 6-11;07-2 ; (8) dans 6-11;07-2 ; (9) dans 5-11;05 ; (13) dans 5-11;05 ; (16) dans 5-11;05 ; (17) dans 5-11;05 ; (18) dans 5-11;05 ; (20) dans 5-11;05 ; (21) dans 5-11;05 ; (2) dans 4-14;00-1 ; (14) dans 3-14;07 (dans ce cas, la transformation est suscitée par l'expérimentateur).

Donnons un dernier exemple d'image ATM. Dans le protocole 3-14;06-1, l'élève obtient pour la première fois, à la 34ème minute, huit points d'intersection entre un cercle et un rectangle. Le résultat accompagne son dessin (16) et il a été anticipé à partir des dessins (13) et (15) . C'est donc bien une image ATM qui se développe autour de (13) et (15) comme le prouve la réalisation (16) .

On trouvera les trois dessins de l'élève reproduits tels quels dans la figure 37 ci-dessous.

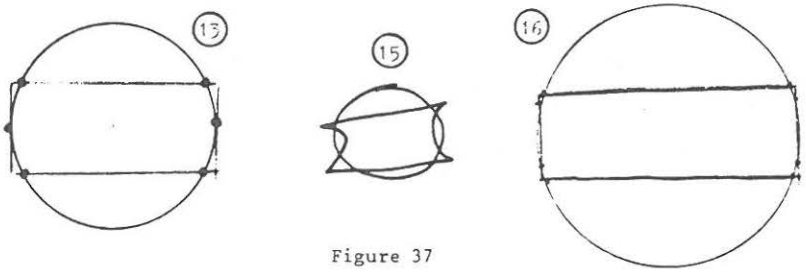


Figure 37

Nous rencontrons donc, dans l'enseignement secondaire, des enfants pour lesquels la genèse de l'image semble achevée; l'interaction fonctionnelle du figuratif et de l'opératif est assurée. Ceci nous renforce dans l'idée que la géométrie comme point de rencontre de l'image et de l'opération ne doit plus être étudiée, avec des élèves du second degré, sur le terrain génétique mais sur le terrain heuristique, pour savoir comment s'organise cette interaction face à un problème.

2. LES VARIATIONS LOCALES

Si nous examinons le protocole 5-12;05 nous voyons que le travail de cette élève consiste d'abord à fabriquer, en deux coups de compas et quatre coups de règle, une figure. Elle compte ensuite les points d'intersection obtenus sur cette figure. Puis, sans pousser plus loin la réflexion, elle passe à la figure suivante. Elle a donc comme objectif très précis la réalisation d'observables successifs, indépendants les uns des autres, devant répondre directement à la question posée.

La figure 38 reproduit, à une échelle plus petite que 1, les 20 dessins de cette élève.

Ce type de travail se rencontre aussi chez d'autres élèves à certains moments de leurs processus de recherche.

Une réalisation d'observables, analogue à celle rencontrée dans le protocole 5-12;05 correspond à une méthode que nous appelons la méthode de la variation locale. Nous allons maintenant expliquer cette méthode, qui est un peu plus élaborée que celle que nous venons de décrire.

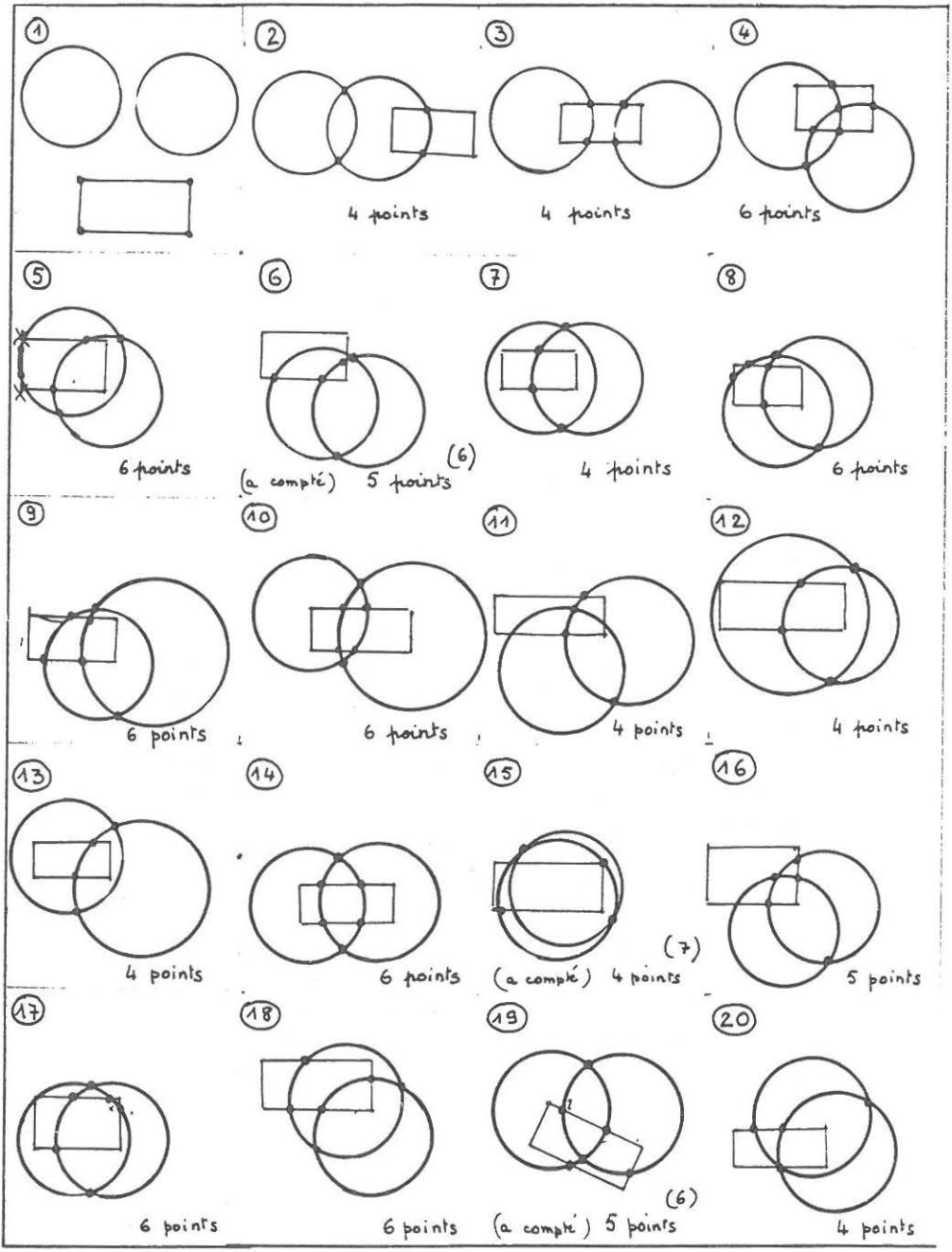

1
2
4 points
3
4 points
4
6 points
5
6 points
6
(a compté) 5 points (6)
7
4 points
8
6 points
9
6 points
10
6 points
11
4 points
12
4 points
13
4 points
14
6 points
15
(a compté) 4 points (7)
16
5 points
17
6 points
18
6 points
19
(a compté) 5 points (6)
20
4 points

Figure 38

Tout d'abord, considérons, à titre d'exemple, le protocole 5-12;04. Après avoir réalisé son dessin, reproduit sur la figure 39 ci-dessous, l'élève anticipe en disant "je vais changer le rectangle de place pour voir s'il y en a plus"; et il réalise la figure 40.

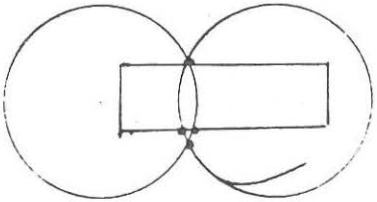


Figure 39

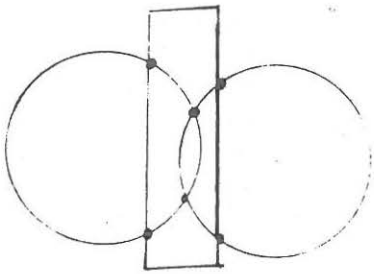


Figure 40

Il fait donc varier la position d'un élément de la figure 39, le rectangle. Puisque l'élève fait varier un élément particulier, bien localisé alors que les autres éléments restent fixes et que d'autres variations sont possibles, nous parlons de variation locale. De plus, cette variation locale qui permet d'anticiper la figure suivante n'envisage pas un gain précis dans le nombre de points d'intersection; elle est réalisée "pour voir"; elle conduit simplement à un nouvel observable; elle entraîne un simple changement d'observable sans qu'un progrès vers la solution du problème soit prévu de façon précise.

C'est ainsi que, par définition, *une variation locale est un changement partiel dans la composition d'une réalisation* A, *conduisant à une nouvelle réalisation* A', *dans le simple but d'observer* A', *sans qu'aucun progrès précis vers la solution soit prévu.* Une variation locale conduit donc à un simple changement d'observable.

Nous trouvons de nombreuses variations locales. Elles se situent, le plus souvent, en début de recherche; par exemple, au début du protocole 1-19;00, les dessins (2) et (3) sont obtenus en changeant l'ordre dans lequel ont été réalisés successivement les deux cercles et le rectangle du dessin (1). Elles apparaissent encore à la suite d'un blocage; par exemple les dessins (5)(6)(7)(8) et (9) du protocole 4-13;11 sont construits par variation locale à la suite de la position d'équilibre associée au dessin (4). Tous les élèves utilisent la variation locale. Nous devons donc en conclure que le besoin d'observables est indispensable pour un élève cherchant un problème de géométrie.

Il est quelquefois difficile de savoir si nous avons affaire à une variation locale telle qu'elle a été définie. Notamment la frontière entre les variations locales et les LLC n'est pas aussi nette que le voudrait une classification rigoureuse. Considérons par exemple le protocole 6-11;05-2. L'élève observant son dessin représenté à la figure 41 ci-dessous, dit "je peux en tracer davantage en mettant le rectangle au milieu de l'intersection". Il dessine alors la figure 42 qui ne lui donne pas plus de points que la figure 41.

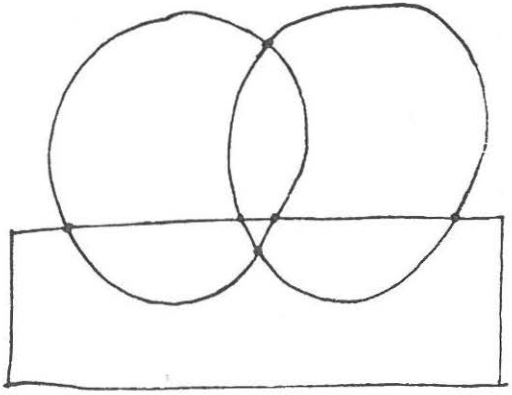


Figure 41

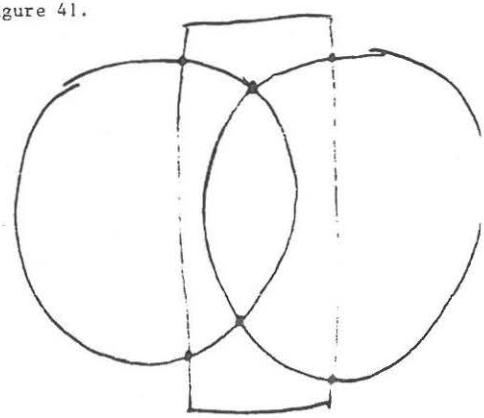


Figure 42

Nous n'avons déjà plus une simple variation locale et nous n'avons pas encore une LLC nette.

Ajoutons, enfin, que les observables créés à partir des variations locales se distinguent des observables créés à partir des LLC en ce sens qu'ils font appel à une coordination moins forte. En effet, en ce qui concerne une variation locale, l'observable qui est construit est fait "pour voir" et pour donner des idées, tandis que le dessin qui est construit dans le processus élémentaire qui suit une LL est nettement dirigé par une idée précise et souvent explicite.

La variation locale conduit à un observable fait pour donner des idées, tandis que la LLC conduit plutôt à un observable représentant des idées. Mais, bien entendu, cette distinction n'est que tendancielle et relative, car tout observable représente des idées et donne des idées.

3. LES EXPERIMENTATIONS DE L'ELEVE

Nous pouvons montrer qu'un cercle ne peut pas couper une droite en trois points distincts, en utilisant *une démarche déductive*. Examinons, par exemple, la démarche déductive s'appuyant sur la succession des affirmations suivantes : A, B et C étant trois points distincts et alignés, un cercle O passant par A et B est centré sur la médiatrice D de AB et un cercle O' passant par B et C est centré sur la médiatrice D' de BC; les droites D et D' n'ont pas de point commun; les cercles O et O' n'ont pas le même centre; les cercles O et O' sont distincts. Cette démarche déductive repose sur un enchaînement de théorèmes, qui sont, dans le cas de l'énoncé ci-dessus, des théorèmes de logique et de géométrie.

Nous avons déjà parlé de la déduction chez l'élève dans le chapitre VIII, nous ne nous y étendons pas plus à l'occasion de ce seul problème CRI.

A l'occasion du même problème d'intersection d'une droite et d'un cercle, nous pouvons proposer la *démarche expérimentale* suivante. Dans un premier temps nous énonçons l'hypothèse :

(H) un même cercle ne peut pas couper une droite en trois points distincts.

Le deuxième temps de cette démarche consiste à tracer un cercle au compas et des droites à la règle coupant le cercle.

Dans un troisième temps, on constate, et c'est alors un observable, que ces droites ne coupent le cercle qu'en deux points au plus.

Dans un quatrième temps, on décide de considérer que l'hypothèse (H) est vraie. La démarche expérimentale est donc caractérisée par l'énonciation d'une hypothèse suivie d'une réalisation d'observables, se terminant sur une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

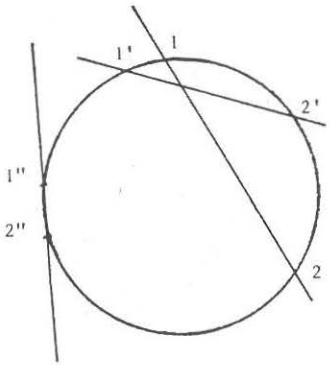


Figure 43

La question que nous nous posons est alors la suivante : les élèves cherchant un problème de géométrie utilisent-t-ils des démarches expérimentales ?

La réponse tirée des 50 protocoles de notre expérience est affirmative, car malgré le fait que de nombreux processus élémentaires restent implicites nous arrivons à exhiber une démarche expérimentale nette et explicite chez 1/3 des élèves observés. Nous trouvons aussi une demi-douzaine de cas où cette démarche expérimentale est nettement rejetée, de façon d'ailleurs inconsciente.

Donnons maintenant quelques exemples de démarches expérimentales.

Dans le protocole 6-11;07-2, qui se trouve dans la partie F de notre texte, Kar, à la 33ème minute, dit "Je vais essayer de faire ça"; elle désigne ainsi la figure 44. Cette figure dessinée à la main, représente deux cercles concentriques donnant 16 points d'intersection. Nous avons affaire là à une hypothèse; ce qui est d'autant plus clair qu'elle ajoute : "parce que si ça se trouve, ça ne marchera pas".

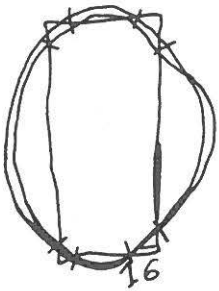


Figure 44

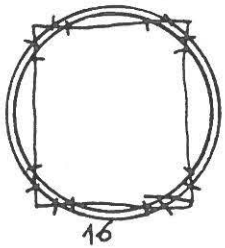


Figure 45

Elle réalise alors la figure 45 au compas. Puis elle observe cette figure et accepte l'hypothèse en disant : "oui c'est 16 ... oui c'est bien 16". Nous avons là une démarche expérimentale très explicite[1]. Cette même élève procède encore expérimentalement pour obtenir 18 points.

Dans le protocole 5-12;02-2, à la 18ème minute, l'élève dit : "Au lieu de les mettre là, et d'avoir toujours que deux points d'intersection, je vais essayer de le mettre là et d'avoir quatre

points d'intersection". Il veut rapprocher les deux cercles pour obtenir quatre points d'intersection entre les deux cercles. Il fait donc une hypothèse, à savoir que si deux cercles sont assez près l'un de l'autre ils se coupent en quatre points.

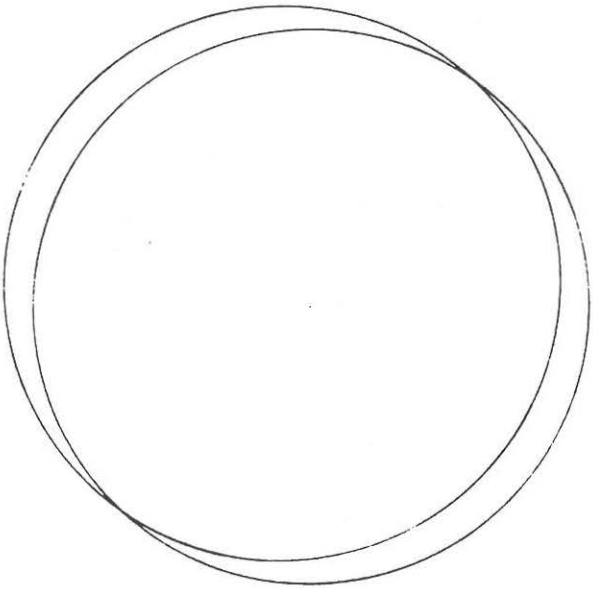


Figure 46

Il trace alors deux cercles que nous représentons sur la figure 46 ci-dessus, grandeur nature. Il remarque que ces deux cercles ne se coupent qu'en deux points : "il n'y en a que deux" dit-il; il ajoute "je croyais que ça faisait quatre points";

cette séquence se termine donc par le rejet de son hypothèse.

Dans le protocole 4-13;07, l'élève, à la 12ème minute, dit : "Je vais essayer quelque chose ici, peut-être ça ferait trois", elle pense placer la longueur du rectangle à peu près tangentiellement au cercle pour obtenir trois points; elle a donc une hypothèse, à savoir que si une droite coupe un cercle presque tangentiellement alors on obtient trois points d'intersection. Elle réalise alors le dessin représenté à la figure 47 .

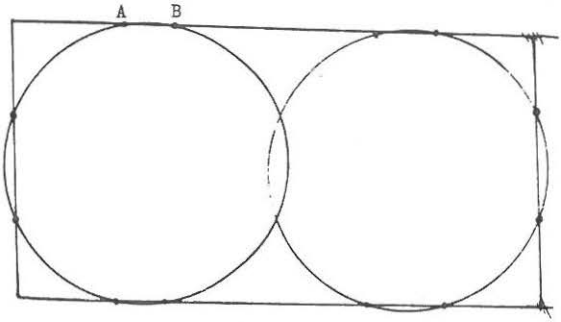


Figure 47

Elle s'aperçoit alors que "ça ne fait pas 3 points parce que ça ne touche pas vraiment entre les deux points A et B d'intersection". Donc après son observation, elle rejette son hypothèse.

Dans le protocole 4-14;00-1, qu'on trouve dans la partie F du volume II, JOS à la 27ème minute se demande en combien de points se coupent deux cercles, et elle accompagne cette réflexion des petits dessins faits à main levée que nous représentons sur la figure 48.

Figure 48

Elle se pose explicitement la question quelques minutes plus tard : "Je vais chercher en combien de points se coupent deux cercles" dit-elle. Elle réalise alors les dessins représentés sur la figure 49, mais n'arrive pas à se décider avant la fin de la séance. Nous identifions ce processus à une démarche expérimentale bien que l'hypothèse ne soit pas précise et affirmative, mais simplement interrogative.

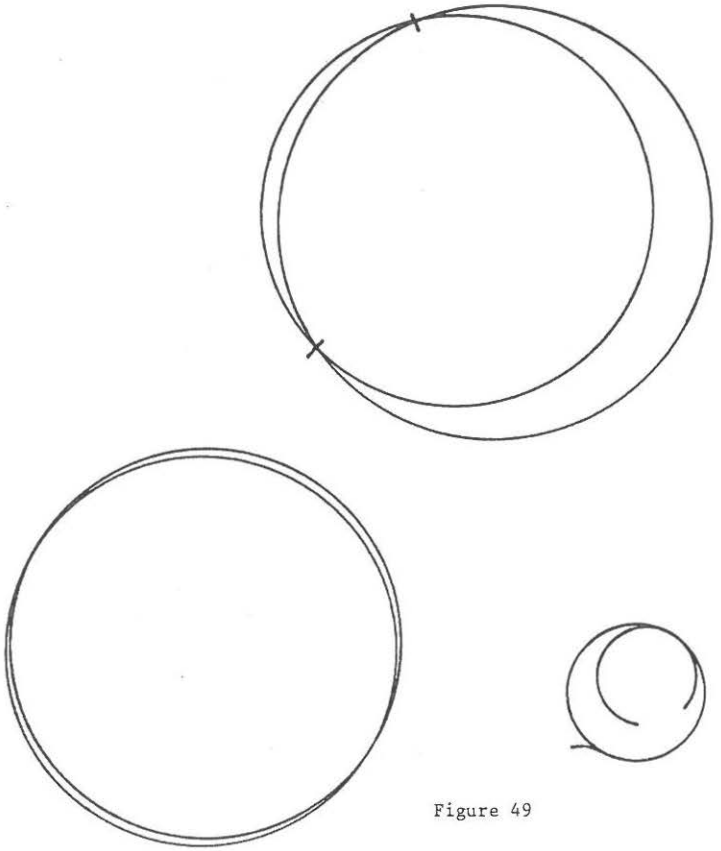


Figure 49

Nous venons de voir quatre exemples où la démarche expérimentale apparaît très nettement, même si, avec JOS, elle est un peu moins explicite et si son hypothèse est moins affirmative.

Afin de cerner un peu mieux l'importance que l'élève attribue à l'expérimentation dans la recherche d'un problème de géométrie, nous essayons d'analyser le rapport existant entre les dessins faits à *main levée* et ceux réalisés au moyen de divers *instruments* (compas, règle, équerre).

Nous constatons que, dans deux des exemples précédents, la démarche expérimentale fait intervenir le compas; ainsi Kar après le dessin présenté à la figure 44 et fait à main levée, réalise la figure 45 au compas; de même JOS après avoir dessiné la figure 48 à main levée, réalise la figure 49 au compas.

Nous allons montrer que si un élève, après une figure faite à main levée réalise une figure au moyen d'instruments de dessin, alors cela signifie que cet élève prend une attitude plus expérimentale dans son second dessin que dans son premier dessin. Pour cela, nous examinons tous les passages des protocoles où l'enfant passe d'un dessin fait à main levée à un dessin fait au moyen d'instruments.

Si nous laissons de côté le protocole 3-16;04 où plusieurs dessins sont réalisés en partie à main levée et en partie au moyen d'instruments, nous trouvons de tels passages dans 26 protocoles; et nous obtenons alors 36 passages. 11 d'entre eux n'étant accompagnés d'aucune explication, nous ne pouvons pas en tirer la moindre conclusion. Dans 8 d'entre eux, c'est l'expérimentateur qui impose quasiment les instruments de dessin.

Par contre, nous trouvons 8 passages correspondant à des démarches expérimentales nettes et explicites, telles que nous les avons définies plus haut. 7 autres passages correspondent à un souci de faire "des vrais cercles" car il ne faut pas que "je

m'arrange !"; nous pensons que l'élève prend là une attitude plus expérimentale dans son second dessin que dans son premier même s'il ne suit pas une démarche expérimentale nette, et quoique son attitude expérimentale ne s'accompagne pas d'une prise de conscience explicite. Les 2 derniers passages se trouvent dans le protocole 3-13;07 où l'élève fait des dessins à main levée pour mieux réfléchir, pour représenter ses idées, et utilise donc le compas dans un sens plus expérimental.

Encore une fois, nous ne voulons pas pousser trop loin l'analyse sur le seul problème CRI dont il est question dans ce chapitre. Nous ajoutons simplement quelques remarques que nous nous réservons de développer ultérieurement car la question de l'expérimentation dans la recherche des problèmes de géométrie nous paraît capitale.

Les protocoles dans lesquels on ne trouve que des dessins à main levée sont au nombre de cinq; dans aucun d'entre eux nous n'obtenons la solution des problèmes.

Deux protocoles mettent en évidence un refus net des instruments de dessin , signifiant un refus de l'expérimentation; dans ces deux protocoles le maximum obtenu est 10.

Le protocole le plus formaliste que nous ayons obtenu est le protocole 3-14;07. Nous avons placé ce protocole dans la partie F car il montre jusqu'où peut aller un abandon d'un certain esprit expérimental. Une lecture attentive de ce protocole est extrêmement instructive.

Dans l'ensemble, les élèves cherchant un problème de géométrie ont une nette tendance à utiliser l'expérimentation. Pour constater cela, utilisons le fait que le dessin avec instruments correspond à un plus grand souci d'expérimentation que le dessin à main levée, comme nous l'avons montré précédemment. On voit alors que parmi les 50 protocoles :

19 sont accompagnés de dessins tracés uniquement avec des instruments alors que

5 seulement sont accompagnés de dessins faits uniquement à main levée;

24 commencent par des dessins faits à main levée, et se poursuivent avec des dessins tracés au moyen d'instruments alors que

2 seulement commencent par des dessins tracés au moyen d'instruments et se poursuivent avec des dessins faits à main levée.

La démarche expérimentale donne une place importante aux observables alors que la démarche déductive n'utilise pas d'observable. Nous avons montré que les élèves, dans leur souci d'expérimentation, faisaient donc jouer un rôle important aux observables.

oooOOooo

PARTIE B

LE PROBLÈME SIM

- CHAPITRE X -

LA TECHNIQUE D'EXPERIMENTATION

DU PROBLEME SIM

1. L'ENONCE

On distribue d'une part une demi-feuille rectangulaire (21 x $\frac{29,7}{2}$ sur laquelle est dessiné un rectangle de dimensions en centimètres 17 et 10,6 d'autre part, une deuxième feuille carrée (format $\frac{29,7}{2}$ x $\frac{29,7}{2}$) sur laquelle est dessiné un triangle dont les côtés valent 4;6 et 8 centimètres[1].

On donne alors la consigne suivante :

Construisez dans le rectangle, un triangle qui soit le même que celui-ci (on montre le triangle dessiné sur la feuille carrée), mais le plus grand possible.

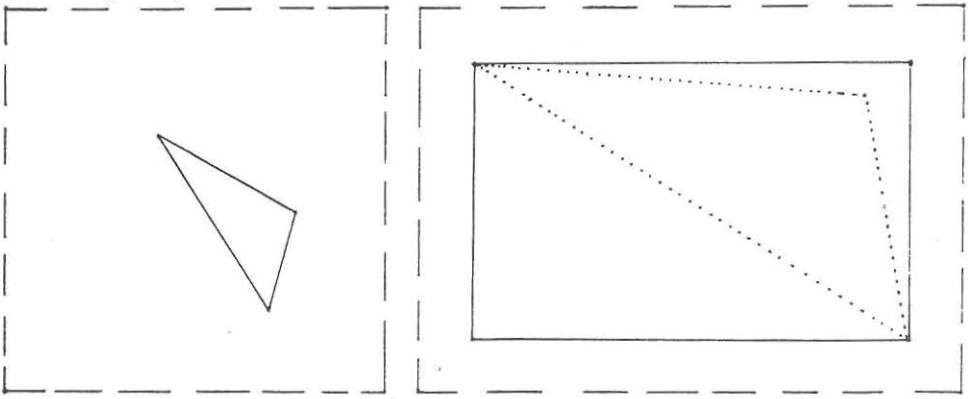


Figure 50

Nous avons représenté sur la figure 50 ci-avant les deux feuilles au moyen de tirés ainsi que le rectangle 17 x 10,6 et le triangle 4, 6, 8. Nos dessins sont à l'échelle
Nous appelons problème SIM le problème dont nous venons de donner l'énoncé.

2. LA SOLUTION

Le problème consistant à chercher le plus grand triangle semblable au triangle T donné contenu dans le rectangle R donné, une solution de ce problème est obtenue en prenant un triangle semblable à T dont le grand côté est porté par une diagonale du rectangle. Nous obtenons 2 ou 4 triangles solutions suivant qu'on considère la seule similitude directe ou la similitude en général.
Nous avons représenté en pointillés sur la figure 50 un triangle solution.

3. EXPERIMENTATEURS ET ELEVES

L'expérience qui est décrite ci-après a été menée par les neuf enseignants de mathématiques suivants :
AUDIBERT G., AUGE A., BELLARD N., BRUNET R., CHAUVET B., CHEVALIER A., CONEJERO M.T., GROS C., LEENHARDT N.
Elle s'est déroulée en Décembre 1979 et Janvier 1980 en ce qui concerne le premier cycle et en Mai 1980 en ce qui concerne le deuxième cycle. L'expérimentation a eu lieu dans les établissements scolaires suivants :

Le collège de Vergèze - Gard
Le collège Mas de Tesse - Montpellier - Hérault
Le lycée Mas de Tesse - Montpellier - Hérault

Elle a porté sur 81 élèves représentés comme suit :
9 élèves de sixième, 14 élèves de cinquième, 17 élèves de quatrième, 13 élèves de troisième, 10 élèves de seconde, 9 élèves de première, 9 élèves de terminale.
Les élèves du second cycle sont en série C et sont dans des classes qualifiées de "très bonnes".
L'âge[1] des élèves évolue selon le graphique 51 ci-après. Nous représentons chaque élève par un trait de 2mm; l'ordonnée de ce trait est l'âge de l'élève. Les élèves sont regroupés classe par classe.

4. LE DEROULEMENT DE L'EXPERIENCE

Comme pour le problème CRI, l'expérience se déroule dans un établissement scolaire durant une séance d'une heure. Au début de l'expérimentation, l'équipe des expérimentateurs prend en charge les élèves, se présente et s'installe (cf. pages 74 et 75). La consigne est ensuite donnée oralement par un des expérimentateurs après la distribution des deux feuilles accompagnant l'énoncé (cf. page 152). Il ajoute :
"Ne gommez pas, si vous n'êtes pas satisfait de votre dessin, barrez-le ou prenez une autre feuille sur laquelle est dessiné le rectangle".

Il précise encore que les instruments de dessin seront donnés à la demande mais on ne montre pas ces instruments comme ce fut le cas assez souvent pour l'expérience portant sur le problème CRI.

Les expérimentateurs restent attentifs à ce que l'énoncé soit très vite assimilé sans erreur.
L'usage du magnétophone est systématique.
Pour faciliter la prise de notes, l'expérimentateur dispose d'un petit carnet sur les feuilles duquel ont été dessinés au préalable des rectangles semblables aux rectangles donnés à l'élève (échelle 1/2).

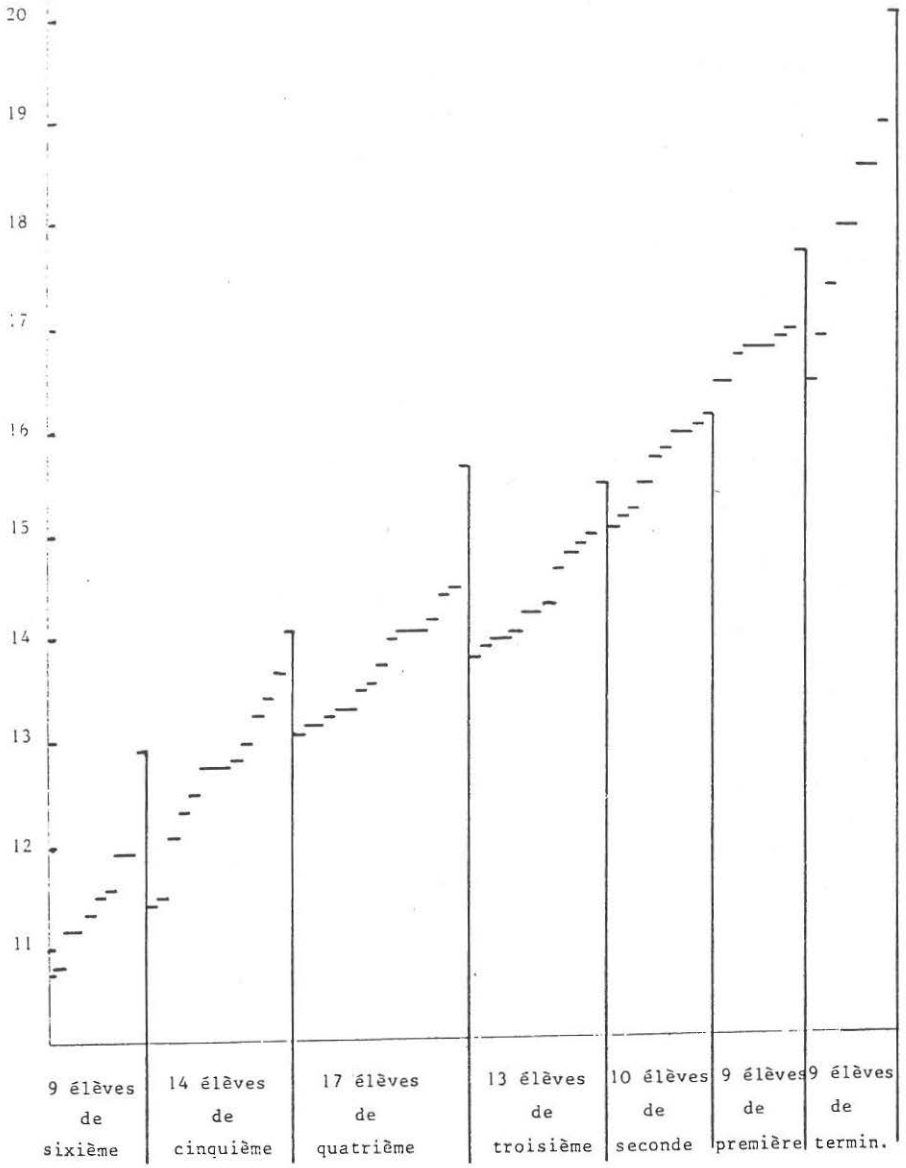

20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
9 élèves de sixième
14 élèves de cinquième
17 élèves de quatrième
13 élèves de troisième
10 élèves de seconde
9 élèves de première
9 élèves de termin.

Figure 51

Pendant toute la durée de la recherche du problème faite par l'élève, l'expérimentateur prend des notes et sollicite des explications selon les modalités prévues pour le problème CRI; il essaie de comprendre le comportement de l'élève avant, pendant et après chaque dessin (cf. le paragraphe V-4).

Si l'élève résoud le problème avant la fin de la séance, l'expérimentateur lui propose un deuxième problème énoncé de la même manière mais dans lequel le triangle proposé a pour dimensions : 4 cm, 8 cm et 8,5 cm[1].

5. LES PROTOCOLES

Les protocoles sont rédigés avec les mêmes modalités que pour le problème CRI.
On remarque que les règles de rédaction, énoncées pages 77 et 78, sont appliquées avec une meilleure approximation que pour le problème CRI; cette amélioration est encore plus nette lors de la rédaction des protocoles du troisième problème, le problème PEN. Dans la partie F se trouvent 13 protocoles du problème SIM numérotés[2] :
6-11;07 ; 5-11;06 ; 5-12;04 ; 5-13;00 ;
4-13;02-1 ; 4-13;03 ; 4-15;08 ;
3-14;00-1 ; 3-14;01 ; 3-14;11 ; 3-15;00 ; 2-15;09 ; 1-16;11-1
Nous appelons respectivement
COR , GAL , ERI , CAT , LEG , CHA , JIS , MAP , GIL , EDW ,
MAR , RIM , CIT
les élèves correspondant à ces protocoles.

6. LES REPONSES

Nous indiquons dans le tableau 52 ci-dessous la répartition des solutions suivant les classes [1] :

	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.	Total
Nombre de solutions exactes	0	3	6	8	9	6	5	37
Nombre d'élèves	9	14	17	13	10	9	9	80
% approximatif	0	20	35	60	90	65	55	46

Tableau 52

Un élève sur deux, au moins, réussit à résoudre ce problème à partir de la classe de troisième. Le progrès dans la réussite est très net tout au long du premier cycle. Il semble qu'il y ait régression dans le second cycle. Nous analysons ultérieurement les raisons d'une telle évolution.

Nous allons maintenant examiner un certain nombre de questions ayant trait à notre problématique.

7. LES AMBIGUITES DE L'ENONCE

Les pré-expérimentations nous ont appris que si des élèves parlant de deux triangles de grandeurs différentes disent "ce sont les mêmes", alors nous sommes en présence de notions plus ou moins bien formées ou en voie de formation qui nous conduisent au concept de similitude. Nous savons, d'ailleurs, que cette notion de "même" utilisée à propos de la similitude est très enracinée chez l'enfant comme le montrent les expérimentations de PIAGET J. et INHELDER B. (1947).

Nous y trouvons, par exemple, au chapitre XII, INO, un enfant de 9 ans qui dit à ce propos :
"C'est la même chose en plus grand".

Nous devons, malgré cela, nous demander si l'énoncé du problème amène l'élève à travailler avec une notion de similitude de triangles. Nous pouvons estimer qu'il en est bien ainsi pour tous les élèves qui font appel au double, à la proportionnalité simple ou à la proportionnalité en toute généralité, mais aussi pour tous les élèves qui prennent en considération la conservation des angles; or, ces élèves sont au nombre de 74, sur un total de 81 élèves; 4 autres élèves présentent de nets indices de conservation des angles; 1 autre élève, dont le protocole a pour numéro 4-14;01-1, utilise une pseudo-proportionnalité compensée dans le sens de la proportionnalité; les deux derniers élèves correspondant aux protocoles 6-11;06 et 5-13;03 se contentent d'un coup d'oeil qui les conduit à des triangles assez semblables à T.

Nous estimons donc que la quasi unanimité des élèves face à cet énoncé sont amenés à chercher des triangles semblables au triangle donné T, lorsqu'on leur propose l'expression "le même".

Nous étions lors de l'expérimentation particulièrement attentifs à une éventuelle contradiction, sentie ou vue par l'élève, entre les deux termes de l'énoncé : "le même" et "le plus grand". Aucun élève n'a effleuré cette question.

Aucun élève n'a utilisé les mots similitude ou semblable.

Pourtant dans la suite de notre analyse, nous parlons constamment de similitude et nous utilisons rarement les termes de l'énoncé. Le mot "semblable" que nous utilisons a donc un sens variable, il signifie lorsqu'on l'attribue à certains élèves "vague ressemblance" pour d'autres élèves "ressemblance qu'on peut caractériser" et ceci jusqu'au sens rigoureux que lui donnent les mathématiciens et qui en fait un concept. Le sens que nous donnons à ce vocabulaire reste nécessairement ambigü puisque *un des objets de notre étude est de mieux cerner la notion de similitude en formation.*

8. L'ENONCE ET LE PROCESSUS DE DIFFERENCIATION-INTEGRATION

Afin que l'élève saisisse bien les consignes de l'énoncé l'expérimentateur est obligé d'insister tantôt sur le fait qu'on demande "le même" tantôt sur le fait qu'on demande "le plus grand"; la différenciation entre la similitude et l'agrandissement s'effectue ainsi sous l'instigation de l'expérimentateur. Nous ne prenons donc pas en compte le processus de différenciation-intégration car il ne correspond pas à une démarche suffisamment autonome de l'élève.

9. LES PROCESSUS ELEMENTAIRES

L'existence des processus élémentaires est beaucoup plus nette dans le problème SIM que dans le problème CRI.

Cela provient de deux faits. D'une part, les expérimentateurs sont, dans ce deuxième problème, beaucoup plus attentifs au contenu mathématique traité par les élèves. D'autre part, les expérimentateurs ont acquis avec le temps une plus grande maîtrise de l'observation.

Si nous considérons par exemple le protocole 3-14;00-1 de MAP qui se trouve dans la partie F, il se présente comme la suite de 12 processus élémentaires ayant chacun une durée moyenne de quatre minutes. Seul le quatrième processus qui accompagne le dessin (4.1) est difficilement analysable comme un processus élémentaire car l'élève perd le fil de sa recherche et l'expérimentateur a alors beaucoup de mal à suivre sa démarche très peu explicite.

Nous continuons donc à utiliser la notion de processus élémentaire comme une hypothèse confirmée expérimentalement (cf. paragraphe V- 8, page 83), comme une méthode d'analyse du déroulement de

l'expérience (cf. le paragraphe 4 de ce chapitre) et comme une technique de rédaction des protocoles (cf. le paragraphe 5 de ce chapitre).

10. LE PROBLEME SIM ET NOTRE PROBLEMATIQUE

Le problème SIM fait intervenir essentiellement la similitude qui est au coeur de notre champ conceptuel : la géométrie euclidienne plane. C'est donc l'attitude des élèves face au concept de similitude[1] que nous analysons tout d'abord. Pour cela, nous étudions au chapitre XI, la place tenue par la conservation des angles, puis au chapitre XII, la place tenue par la conservation des proportions.
En ce qui concerne les processus de pensée, nous consacrons le chapitre XIII aux équilibres importants liés à ce problème. Le chapitre XIV est centré sur la notion de contradiction. Avec les notions d'équilibre et de contradiction, nous mettons en évidence des processus qui dépassent largement le cadre des procédures spécifiques au problème SIM.

oooOOooo

- CHAPITRE XI -

LA CONSERVATION DES ANGLES

1. ANGLES

Les angles dont nous parlons dans ce texte sont toujours des angles de demi-droites; il s'agit d'angles non orientés définis dans le plan affine euclidien. Pour une étude théorique on peut se référer à BERGER M.(1977b).
Il s'agit en fait de la notion d'angle la plus élémentaire, notée communément $\widehat{xoy}$ à laquelle est associé un nombre compris entre 0 et 180 (degrés), appelé sa mesure.

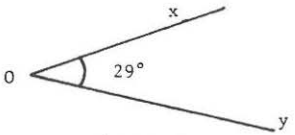


Figure 53

Ce nombre est obtenu au moyen du rapporteur. Deux angles qui ont même mesure sont encore dits égaux.

2. CONSERVATION DES ANGLES

Nous savons qu'une similitude du plan affine euclidien est une transformation bijective qui conserve les angles. Une étude

théorique de la similitude est présentée par FRENKEL J.(1973). Pour l'analyse que nous nous proposons de faire, il suffit d'ailleurs de reconnaître qu'une transformation ponctuelle du plan affine euclidien est une similitude si et seulement si elle transforme chaque triangle T en un autre triangle T' ayant les mêmes angles que T.
L'énoncé du problème SIM sous-entend que la transformation étudiée change un triangle en un autre triangle, elle conserve donc en particulier l'alignement[1] des points car les côtés d'un triangle se changent en les côtés d'un autre triangle et un triangle aplati ne peut être transformé qu'en un triangle aplati. L'élève face à ce problème prend donc en compte l'aspect affine de la similitude sans aucune objection, sans même aucune prise de conscience de questions portant sur la conservation de l'alignement des points. Il traite en fait cette transformation comme une application de l'ensemble des triangles du plan sur lui-même. Nous n'étudions donc pas le comportement de l'élève relativement à la transformation affine puisque celle-ci a été évacuée du problème posé.

Mais la conservation des angles est passée sous silence dans l'énoncé du problème. Nous allons voir qu'elle intervient de façon déterminante dans la recherche de nos élèves.

3. EXEMPLES

Examinons le travail de l'élève que nous appelons MAP et dont il est rendu compte dans le protocole 3-14;00-1.
Dès la consigne donnée, MAP dessine un triangle que nous représentons sur la figure 54 ci-après. L'expérimentateur lui demande alors :

- comment sais-tu que le triangle est le même que celui-ci en plus grand ?
- Je regarde à peu près la grandeur des angles, répond-elle.

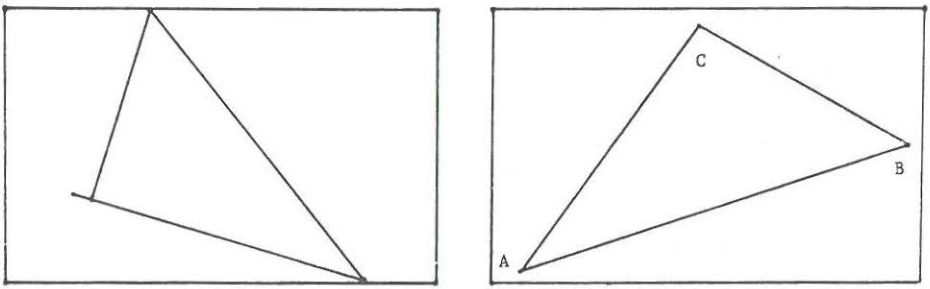


Figure 54

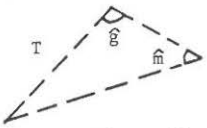


Figure 55

Pour réaliser son deuxième triangle que nous représentons sur la figure 55 ci-dessus, MAP trace un segment AB puis place le triangle donné T de façon que la droite AB ait à peu près la même direction que le grand côté de T. Nous avons représenté T en pointillés sur notre figure. Les autres côtés sont tracés au coup d'oeil avec des directions voisines de celles des côtés de T.

L'élève se demande si l'angle en C est droit, en essayant de placer l'équerre sur cet angle.

MAP mesure avec le rapporteur l'angle moyen $\hat{m}$ et le grand angle $\hat{g}$ du triangle donné T.

Pour construire son troisième triangle, que nous représentons sur la figure 56 ci-après, elle trace un segment AB.
Elle construit ensuite en B, à l'aide du rapporteur, un angle égal à l'angle moyen $\hat{m}$ de T.

Elle veut construire en C l'angle égal au grand angle $\hat{g}$ de T.
Elle marque donc un point D tel que $\widehat{BCD} = \hat{g}$.

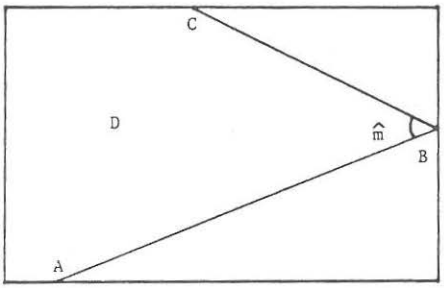


Figure 56

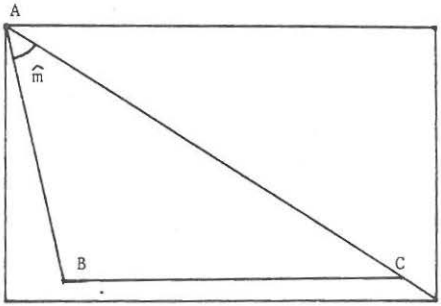


Figure 57

Un peu plus tard, au cours de la réalisation de son septième dessin que nous avons représenté sur la figure 57 ci-dessus, MAP place sur la diagonale un point C à 18,4 cm de A, puis construit avec le rapporteur l'angle $\widehat{CAB}$ égal à l'angle moyen $\hat{m}$ du triangle donné T et achève ce triangle ABC en prenant AB = 10,4 cm.
Elle mesure enfin les angles de ce triangle ABC pour vérifier qu'ils sont bien égaux à ceux de T.

La description que nous venons de donner du travail de MAP montre que pour cette élève, le triangle qu'elle cherche à construire et le triangle donné T doivent avoir des angles égaux deux à deux sans le moindre doute. Nous disons pour MAP que la similitude est fondée sur la conservation des angles.

Les procédures suivies par MAP nous permettant d'affirmer que la conservation des angles dans la similitude est acquise, sont diverses : c'est tout d'abord une simple affirmation, ensuite le parallèlisme, puis des constructions d'angles au rapporteur, enfin des vérifications.

D'une manière générale, nous devons déterminer les procédures suivies par les élèves qui nous conduiront à dire que la conservation des angles caractérise chez ces élèves la similitude; c'est l'objet de notre prochain paragraphe.

4. DEFINITION DES PROCEDURES DE CONSERVATION DES ANGLES

Chez l'élève, à cause des limites de notre problème, c'est essentiellement de triangles semblables dont il est question. Dans quelques cas, des rectangles semblables interviennent aussi.
Les deux implications, réciproques l'une de l'autre, qui apparaissent chez l'élève sont :

(1) Si un triangle T" a des angles égaux à ceux d'un triangle T' alors les deux triangles T" et T' sont semblables.

(2) Si un triangle T" est semblable à un triangle T' alors les angles de T" sont égaux à ceux de T'.

La deuxième implication prend le plus fréquemment la forme suivante :

(2') Si un triangle T" a ses angles différents de ceux de T' alors les deux triangles T" et T' ne sont pas semblables.

Mais c'est rarement sous forme d'une proposition explicite, comme (1) (2) ou (2') qu'apparaît la conservation des angles. Aussi allons nous préciser les conditions dans lesquelles nous décidons de dire que, pour l'élève, la similitude est associée à la conservation des angles. Nous disons que, pour l'élève, la similitude conserve les angles si une au moins des cinq conditions suivantes est remplie :

[1] L'élève, cherchant à obtenir un triangle T" semblable à un triangle T', mesure, au moyen du *rapporteur*, un ou plusieurs angles de T' et veut construire, toujours au moyen du rapporteur, un ou plusieurs angles de T" ayant la même mesure.

[2] L'élève, cherchant à obtenir un triangle T" semblable à un triangle T', essaie de *décalquer* des angles de T" à partir de ceux de T'.

[3] L'élève, cherchant à obtenir un triangle T" semblable à un triangle T', trace comme support des côtés de T" des droites *parallèles* aux côtés d'un triangle égal à T'.

[4] L'élève annonce *explicitement que les angles* d'un triangle T", semblable à un triangle T', sont égaux aux angles du triangle T' ou encore que si un ou plusieurs angles d'un triangle T" sont différents de tous les angles d'un triangle T' alors les deux triangles T' et T" ne sont pas semblables.

[5] Pour *vérifier* que deux triangles T' et T" sont semblables, l'élève regarde si leurs angles correspondants sont égaux soit en utilisant un rapporteur, soit par décalcage, soit par un contrôle du parallèlisme.

5. CONSERVATION DES ANGLES CHEZ L'ELEVE

Nous venons de définir 5 procédures significatives de la conservation des angles. Nous analysons chaque protocole à la lumière de ces définitions ce qui nous conduit à distinguer 4 catégories d'élèves.

Tout d'abord, les élèves pour lesquels la similitude fait *nettement appel à la conservation des angles*. Ils sont au nombre de 56 et se répartissent suivant les classes selon le tableau 58 ci-dessous.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Conservation nette	3	7	8	11	10	9	8
Pourcentage approximatif	35	50	50	85	100	100	90

Tableau 58

Dans la deuxième catégorie, nous plaçons les cinq élèves qui font appel à la conservation des angles, mais qui de façon momentanée au cours de leur recherche émettent *des doutes quant à la nécessité de la conservation des angles*[1].

Nous plaçons dans une troisième catégorie les élèves chez lesquels apparaissent quelques *indices de conservation des angles*. Ils sont au nombre de 9; 5 d'entre eux sont en classe de sixième, les quatre autres sont dans les classes de cinquième, quatrième et terminale.

Nous plaçons dans la quatrième catégorie les 8 élèves chez lesquels nous ne trouvons *aucun indice de conservation des angles*. Ce sont huit élèves du premier cycle.

Le tableau 59 ci-après présente de façon plus détaillée les 78 élèves[1] que nous venons de classer en 4 catégories.

Dans le tableau, nous avons placé 6 colonnes; les 5 premières numérotées [1] [2] [3] [4] [5] correspondent aux 5 procédures définies dans le paragraphe précédent; si une de ces 5 procédures est suivie par un élève nous le signalons au moyen d'un rectangle noir. Si nous rencontrons chez un élève un doute quant à la nécessité de la conservation des angles, nous plaçons un rectangle noir dans la 6ème colonne signalée par un point d'interrogation. Si chez un élève apparaît seulement un indice de conservation ébauché par une des 5 procédures, nous plaçons dans la colonne correspondante un rectangle blanc. La ligne correspondant à un élève de la dernière catégorie reste vierge.

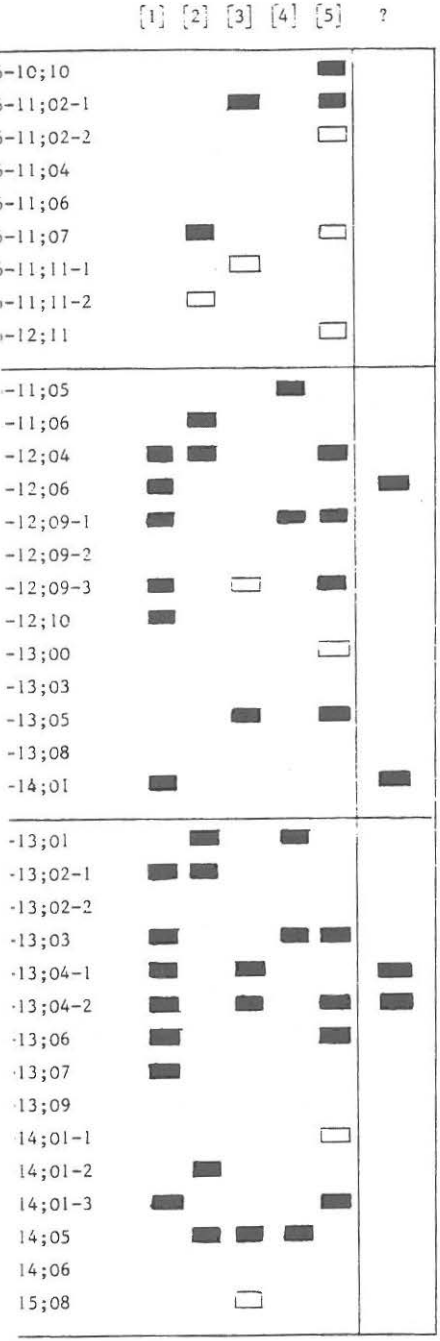
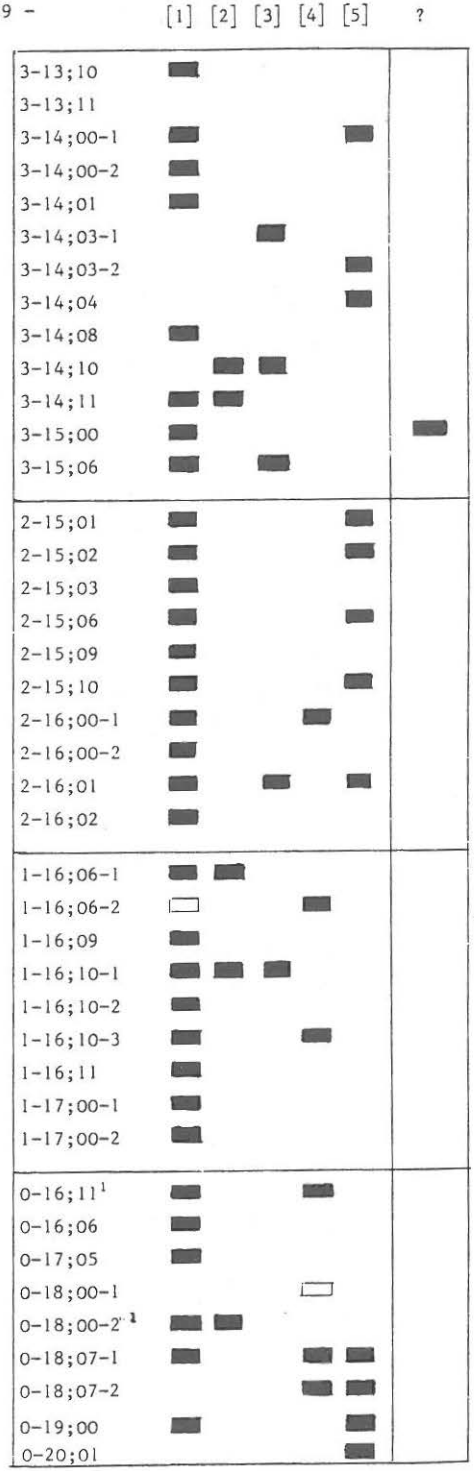

[1] [2] [3] [4] [5] ?
-10;10
-11;02-1
-11;02-2
-11;04
-11;06
-11;07
-11;11-1
-11;11-2
-12;11
-11;05
-11;06
-12;04
-12;06
-12;09-1
-12;09-2
-12;09-3
-12;10
-13;00
-13;03
-13;05
-13;08
-14;01
-13;01
-13;02-1
-13;02-2
-13;03
-13;04-1
-13;04-2
-13;06
-13;07
13;09
14;01-1
14;01-2
14;01-3
14;05
14;06
15;08

Tableau 59


[1] [2] [3] [4] [5] ?
3-13;10
3-13;11
3-14;00-1
3-14;00-2
3-14;01
3-14;03-1
3-14;03-2
3-14;04
3-14;08
3-14;10
3-14;11
3-15;00
3-15;06
2-15;01
2-15;02
2-15;03
2-15;06
2-15;09
2-15;10
2-16;00-1
2-16;00-2
2-16;01
2-16;02
1-16;06-1
1-16;06-2
1-16;09
1-16;10-1
1-16;10-2
1-16;10-3
1-16;11
1-17;00-1
1-17;00-2
0-16;11[1]
0-16;06
0-17;05
0-18;00-1
0-18;00-2[1]
0-18;07-1
0-18;07-2
0-19;00
0-20;01

6. LES MESURES

Nous avons aussi analysé chaque protocole en essayant de savoir si sont vraies ou fausses les affirmations suivantes :

- l'élève ne fait aucune mesure, ni au double décimètre, ni au rapporteur,
- l'élève mesure au double décimètre un ou plusieurs segments,
- l'élève construit au moins un segment dont la mesure est données en utilisant le double décimètre,
- l'élève mesure un ou plusieurs angles au rapporteur,
- l'élève construit au rapporteur un ou plusieurs angles dont la mesure est donnée.

Les principales remarques que nous faisons à la suite de cette analyse[1] sont les suivantes :

Nos élèves de *sixième* ne mesurent pas et ne construisent pas d'angles, et trois d'entre eux ne mesurent pas et ne construisent pas de segments. La moitié seulement de nos élèves de *cinquième, quatrième et troisième* mesurent et construisent des angles, mais quasiment tous mesurent et construisent des segments.

Un tiers de nos élèves du *second cycle* ne construisent pas des segments de mesures données alors que quasiment tous mesurent et construisent des angles.

7. CONCLUSIONS SUR LA CONSERVATION DES ANGLES

A ce stade de nos investigations, la conclusion qui s'impose à nous est la suivante :

Dès le début du premier cycle, la similitude des triangles prend un sens pour nos élèves grâce à la conservation des angles.

Nous allons en quelques mots essayer de justifier mais aussi de nuancer cette affirmation un peu trop brutale.

La conservation des angles est acquise à cent pour cent dans notre second cycle; rappelons toutefois qu'il s'agit de classe de 2ème, 1ère C et terminale C d'un des deux lycées les plus importants de Montpellier et que ces classes, en particulier, y sont réputées "bonnes" tandis que nos classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème sont considérées comme "normales".

Sur nos 49 élèves de premier cycle, 8 seulement ne présentent aucun indice de conservation des angles, et 29 y font nettement appel. La conservation des angles comme critère de similitude prend donc racine de façon très solide dans le premier cycle.

On peut aussi penser que si des indices de conservation des angles apparaissent en 6ème sans que la procédure se dégage nettement, cela tient au fait que nos élèves de 6ème ne maîtrisent pas suffisamment le rapporteur leur permettant de mesurer et de construire des angles. Il faut toutefois rappeler que dans cette classe, l'expérience a eu lieu à la fin du premier trimestre. Nous avions donc là des élèves au tout début de leur premier cycle[1]. L'usage du rapporteur paraît d'autant plus essentiel à l'acquisition de la similitude à travers la conservation des angles que si nous examinons la première colonne de notre tableau 59 nous voyons la progression très nette de la domination de la procédure [1] fondée sur l'usage du rapporteur[2]. Nous pouvons donc ajouter à la conclusion sommaire énoncée au début de ce paragraphe que *cette conservation des angles est fondée sur l'usage du rapporteur.*

Signalons que la similitude est quasiment absente des programmes du premier cycle et que la notion d'angle n'y tient qu'une place très faible, ce qui ne paraît pas correspondre aux possibilités de nos élèves.

Par contre, l'accentuation de l'usage du rapporteur préconisée par les programmes des années 80 correspond mieux aux possibilités des élèves tels qu'elles nous apparaissent dans ce problème SIM.

oooOOooo

- CHAPITRE XII -

LA CONSERVATION DES PROPORTIONS

1. CONSERVATION DES PROPORTIONS

Nous savons qu'une similitude du plan affine euclidien est une application ponctuelle du plan dans lui-même qui conserve le rapport des distances. On peut dire de façon équivalente, qu'elle conserve le rapport des côtés d'un triangle quelconque T, lorsqu'elle transforme ce triangle T en un triangle T'.

La similitude est aussi une application f du plan affine euclidien dans lui-même pour laquelle il existe un nombre réel $k > 0$ tel que la distance de f(A) à f(B) soit égale au produit de k par la distance de A à B et ceci, quels que soient les points A et B du plan. On peut dire, de façon équivalente, qu'elle transforme un triangle quelconque ABC en un triangle A'B'C' tel que

$$A'B' = k\,AB \quad ; \quad A'C' = k\,AC \quad ; \quad B'C' = k\,BC.$$

Pour plus de détails sur la similitude, on peut se référer à FRENKEL J.(1973).

Que l'on parle de distance ou de triangle, on s'aperçoit que deux définitions équivalentes sont confrontées.
L'une fait appel à la conservation des rapports, elle correspond aux égalités :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad ; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

L'autre fait appel à un coefficient multiplicatif k, ou comme le disent souvent les élèves à une "échelle", elle correspond aux égalités :

$$A'B' = k\,AB \quad ; \quad A'C' = k\,AC \quad \text{et} \quad B'C' = k\,BC.$$

Nous serons ultérieurement amenés à distinguer ces deux aspects chez nos élèves, mais dans l'immédiat nous ne faisons pas de différence entre ces deux points de vue et nous disons dans les deux cas qu'il est question de la conservation des proportions.

2. PSEUDO-PROPORTIONS

Au cours des expérimentations sur les similitudes, nous avons constaté que nos élèves du premier cycle transforment les triangles de deux manières différentes : d'une part, ils utilisent les proportions, d'autre part, à un triangle donné T_1 dont les côtés mesurent respectivement P, M et G et à un nombre réel h, ils associent, lorsque cela est possible, un triangle T_2 dont les côtés mesurent P + h, M + h, G + h.

Examinons sommairement cette transformation. A chaque triangle du plan affine euclidien nous associons la classe des triangles qui lui sont isométriques. Appelons Θ l'ensemble de ces classes. Par abus de langage, nous confondons un triangle et sa classe et nous parlons constamment de triangles et non de classes.

Nous appelons s_ρ une similitude directe de rapport $\rho > 0$.

Etant donné un nombre réel h, nous appelons a_h une application qui à chaque triangle T_1 pour lequel cela est possible et dont les côtés mesurent P, M et G, fait correspondre le triangle T_2 dont les côtés mesurent P + h, M + h et G + h. Pour un h donné, a_h est une application définie sur une partie de Θ .

Nous disons que deux triangles T_1 et T_2 appartenant à $\textcircled{\leftrightarrow}$ sont pseudo-proportionnels si, par définition, il existe un nombre réel $h \neq 0$ et un nombre réel $\rho > 0$ tels que

d'une part $a_h(T_1)$ existe

et d'autre part $T_2 = s_\rho \circ a_h(T_1) = a_{h.\rho} \circ s_\rho(T_1)$

Dans nos analyses, nous distinguons bien entendu la proportion et la pseudo-proportion. Mais nous distinguons aussi, lorsque nous rencontrons la pseudo-proportion, le rôle joué par s_ρ et celui joué par a_h, car c'est a_h seul qui est éventuellement l'indice d'une déviation dans l'usage de la proportionnalité.[1]

3. SIX EXEMPLES

Considérons tout d'abord le protocole 5-13;00 de CAT. A la 19ème minute, elle mesure le grand côté du triangle donné T, trouve 8,1 cm, arrondit à 8 cm. Puis elle mesure les autres côtés de T. Elle multiplie par deux chacune des dimensions trouvées et passe à la réalisation de son triangle que nous représentons sur la figure 60 ci-dessous. Elle déclare :

-Je trouve que c'est le même multiplié par 2.

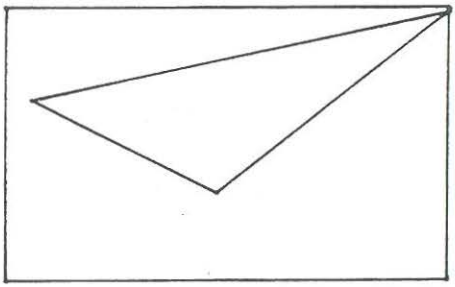


Figure 60

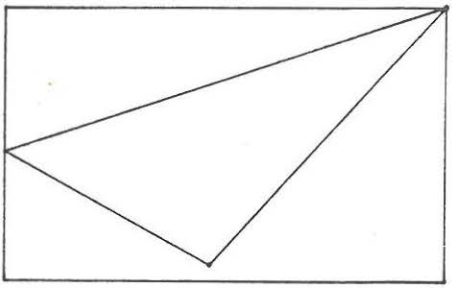


Figure 61

A la 21ème minute, l'expérimentateur lui pose une question.

Expérimentateur : - Est-ce que c'est le plus grand possible ?

CAT - Non. On pourrait multiplier par 3 mais le rectangle ne serait pas assez grand.

A la 23ème minute, CAT déclare :

- J'ai une autre idée. On multiplie par 2 comme j'ai fait là et la longueur de ça divisée par 2 en plus. Là ça ferait 8, je multiplie par 2, ça fait 16 et la moitié de 8, ça fait 20, mais c'est pas dit que ça rentrera aussi.

Elle se propose donc de doubler le côté et d'y ajouter encore la moitié du même côté. Après son premier calcul

$$2 \times 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 20$$

elle effectue encore le calcul

$$2 \times 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 15$$

en prenant en compte le côté moyen du triangle donné T.

Mais CAT abandonne car elle n'arrive pas à placer le triangle dont elle vient de trouver deux dimensions.

CAT - J'ai une autre idée mais peut-être que ça ne marchera pas à tous. Comme là, j'avais pris : multiplié par 2 plus la moitié, ça faisait 4; mais encore le partager et là ça tombera juste parce qu'on aura des demi en plus.

Elle veut maintenant doubler le côté et y ajouter le quart du même côté. Elle réalise alors ses calculs, puis après diverses erreurs arrive à trouver les trois dimensions : 18 cm, 13,5 cm et 9 cm. Elle réalise alors le triangle que nous avons représenté sur la figure 61 ci-avant respectant approximativement ces dimensions.

A la 31ème minute, c'est encore une autre tentative.

CAT - Ou alors pas multiplier le côté et ajouter un certain nombre mettons 5 cm.

Elle se propose donc de construire un triangle dont les dimensions sont : 13 cm, 11 cm et 9 cm. Elle réalise ce triangle que nous représentons à la figure 62 ci-après. Puis elle le rejette.

CAT - Il est petit celui-là.

Non, le côté (1) il devrait être plus grand. Il n'est pas assez grand que celui-là.

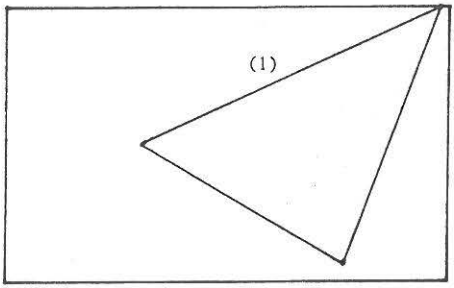


Figure 62

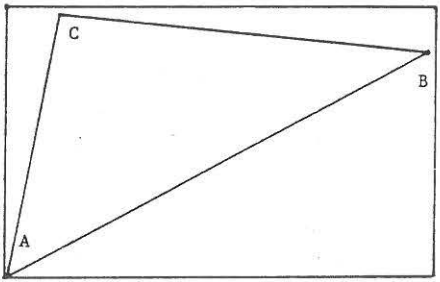


Figure 63

Nous avons là chez le même élève trois exemples caractéristiques du comportement de l'élève face aux proportions. Tout d'abord, CAT fait usage du double, ensuite elle utilise des proportions faisant intervenir des entiers ou des fractions simples telles que 3, $2 + \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{4}$ et enfin elle introduit les pseudo-proportions en ajoutant un même nombre aux mesures des côtés de T.

Nous allons présenter trois autres exemples du comportement de l'élève face aux proportions, de telle sorte que nous aurons illustré les six principaux comportements que nous définissons dans le paragraphe suivant.

Dans le protocole 4-13;04-2, nous voyons l'élève tracer le côté AB dont la longueur est de 18,5 cm puis écrire

18 1/2 10 1/2 14 1/2

Il explique que ces nombres sont obtenus en doublant et en ajoutant 2,5. Il finit alors de tracer son triangle ABC que nous représentons sur la figure 63 ci-dessus, en plaçant un point C tel que AC = 10,5 cm et BC = 14,5 cm.

Au tout début de son travail dont il est rendu compte dans le protocole 3-15;00, MAR mesure le grand côté de T et trouve 8 cm. Elle mesure la diagonale et trouve 19,5 cm. Elle effectue sur son brouillon la division 19,5 : 8 et trouve 2,4375. Après avoir mesuré les deux plus petits côtés de T, elle effectue les multiplications

$$6 \times 2{,}4375 = 9{,}75$$

$$4 \times 2{,}4375 = 14{,}625$$, et dit :

- Après je vais essayer de placer le triangle qui a ses mesures dans le rectangle; je ne sais pas si ça marche.

Dans le protocole 2-15;03 l'élève mesure les trois côtés du triangle T et trouve : 4 cm, 6 cm, 8 cm. Il remarque que le grand côté est le double du petit. Il écrit :

$$6 = 4 \times \frac{3}{2} \qquad 8 = 2 \times \text{le petit}$$

un peu plus tard, ayant construit le triangle ABC que nous représentons à la figure 64 ; il vérifie que :

$$BC = \frac{1}{2} AB \qquad \text{et} \qquad AC = \frac{3}{2} BC$$

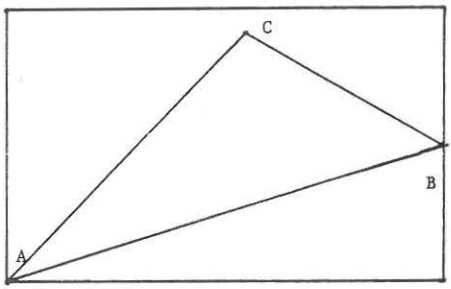


Figure 64

Dans le protocole 4-13;04-2, la pseudo-proportion apparaît mêlée à l'usage du double . MAR fait intervenir les proportions au moyen d'un coefficient multiplicatif. Dans le protocole 2-15;03, l'élève

conserve les rapports des côtés de T dans la construction du triangle semblable T'.

Les six comportements principaux que nous venons d'illustrer donnent des variantes. Nous définissons au total, non pas 6, mais 15 procédures différentes chez nos élèves. Ce sont ces procédures que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

4. DEFINITION DES PROCEDURES

Au sujet des proportions, nous répartissons les 15 procédures que nous avons dégagées en trois grandes catégories et nous notons ces procédures :

D_o, D_1, D_2, D_3, D_4 ; Ps_1, Ps_2, Ps_3, Ps_4, Ps_5 ; P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

L'élève voulant obtenir un triangle T" semblable à un triangle T' adopte un des comportements suivants :

D_o - Il veut construire un triangle T" dont un côté et un côté seulement doit être le double d'un côté correspondant de T'.

D_1 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables (côtés, hauteurs ou projection d'un côté sur un autre côté) doivent être le double des segments remarquables correspondants de T'.

D_2 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables, lui permettant de construire T" sans ambiguïté, doivent être le double des segments remarquables correspondants de T'.

D_3 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent être proportionnels aux segments remarquables correspondants de T'; mais avec des proportions faisant intervenir essentiellement les entiers ou les fractions simples : 3, $2 + \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{2}$.

Ps_1 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent s'obtenir en mesurant certains segments remarquables de T' et en les agrandissant ou en les rapetissant d'une même longueur h.

Ps_3 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent s'obtenir, soit en mesurant certains segments remarquables de T' puis en les doublant et enfin en les agrandissant ou en les rapetissant d'une même longueur h, soit encore en les agrandissant ou en les rapetissant d'une même longueur h et enfin en les doublant.

P_1 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent s'obtenir en multipliant certains segments remarquables de T' par un nombre réel autre que ceux cités en D_3; ce nombre réel est obtenu au moyen de la recherche d'un quotient, soit en cherchant par tâtonnement x tel que $Ax = B$, soit en calculant $x = \frac{B}{A}$, où A et B sont des mesures de longueurs.

P_3 - Il veut construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent s'obtenir en conservant les rapports existant entre certains segments remarquables de T'.

Les comportements

$$D_1 \quad D_3 \quad Ps_1 \quad Ps_3 \quad P_1 \quad P_3$$

que nous venons de décrire peuvent se modifier et donner respectivement les comportements

$$D_2 \quad D_4 \quad Ps_2 \quad Ps_4 \quad P_2 \quad P_4$$

Ces derniers diffèrent des précédents en ce sens que les segments remarquables introduits par l'élève permettent de construire le triangle sans ambiguïté à une isométrie près; il en est ainsi dans le cas où les segments remarquables sont les trois côtés du triangle, ou encore dans le cas où les segments remarquables sont le grand côté AB, la projection HB du petit côté sur le grand côté et la hauteur CH.

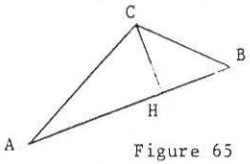


Figure 65

Nous classons dans les comportements correspondants, une attitude qui consiste simplement à vérifier; par exemple, si l'élève ayant tracé un triangle T" qu'il a voulu semblable à T', vérifie que certains segments remarquables de T" sont le double des segments remarquables correspondants de T', alors nous parlons encore d'un comportement D_1.

Nous allons ajouter aux 13 comportements définis ci-dessus, deux autres comportements :

Ps_5 - Pour obtenir un triangle T" semblable à T', l'élève veut construire un triangle T" comme en Ps_1, Ps_2, Ps_3 ou Ps_4, mais de plus, l'agrandissement ou le rapetissement doit être compensé, c'est-à-dire plus grand pour le plus grand segment et plus petit pour le plus petit segment.

$P_{5'}$ - Pour obtenir un rectangle R" semblable à un rectangle R', l'élève cherche à obtenir entre la longueur et la largeur de R" un rapport égal à celui des côtés correspondants de R'.

Dans les définitions des comportements, nous disons "il veut construire". Si nous parlons du but avoué de l'élève ce n'est pas pour nous référer à sa seule anticipation mais pour prendre en compte une action même si elle conduit à un échec. Donc lorsque nous repérons un comportement il y a en général réalisation au moins partielle, mais cette réalisation peut ne pas être conforme au but poursuivi par l'élève. Nous basons donc l'existence d'un comportement la plupart du temps, sur l'action de l'élève mais pas nécessairement sur sa réussite.

Dans chaque comportement, nous parlons de segments remarquables, il s'agit généralement des côtés du triangle et plus rarement des hauteurs et des projections.

Pour le comportement Ps_3 ou Ps_4 c'est la recherche du double suivie de l'agrandissement que l'on rencontre le plus fréquemment.

Les lettres utilisées pour désigner ces comportements veulent rappeler, pour la lettre D qu'il s'agit du double, pour la lettre P, qu'il s'agit de proportion, pour le couple Ps qu'il s'agit de pseudo-proportion.

Les six exemples précédemment cités aux pages 176, 177, 178 et 179 qui correspondent aux protocoles : 5-13;00 (19ème minute), 5-13;00 (21ème et 23ème minute), 5-13;00 (31ème minute), 4-13;04-2, 3-15;00, 2-15;03 illustrent respectivement les comportements D_2, D_4, Ps_2, Ps_4, P_2, P_4.

5. TABLEAU DES PROCEDURES

Après avoir analysé chaque protocole, nous pouvons présenter les résultats obtenus pour l'ensemble des élèves. Le tableau 66 ci-après illustre l'essentiel[1] de ces résultats. Dans le tableau, nous avons regroupé les procédures dans six catégories : D_o ou D_1 ou D_2 ; D_3 ou D_4 ; Ps_1 ou Ps_2 ; Ps_3 ou Ps_4 ou Ps_5 ; P_1 ou P_2 ; P_3 ou P_4 ou P_5.

Chaque élève est représenté par le numéro correspondant du protocole. Si un élève a suivi une certaine procédure, alors un rectangle noir est placé dans le tableau à l'intersection de la ligne correspondant à l'élève et de la colonne correspondant à la catégorie de cette procédure.

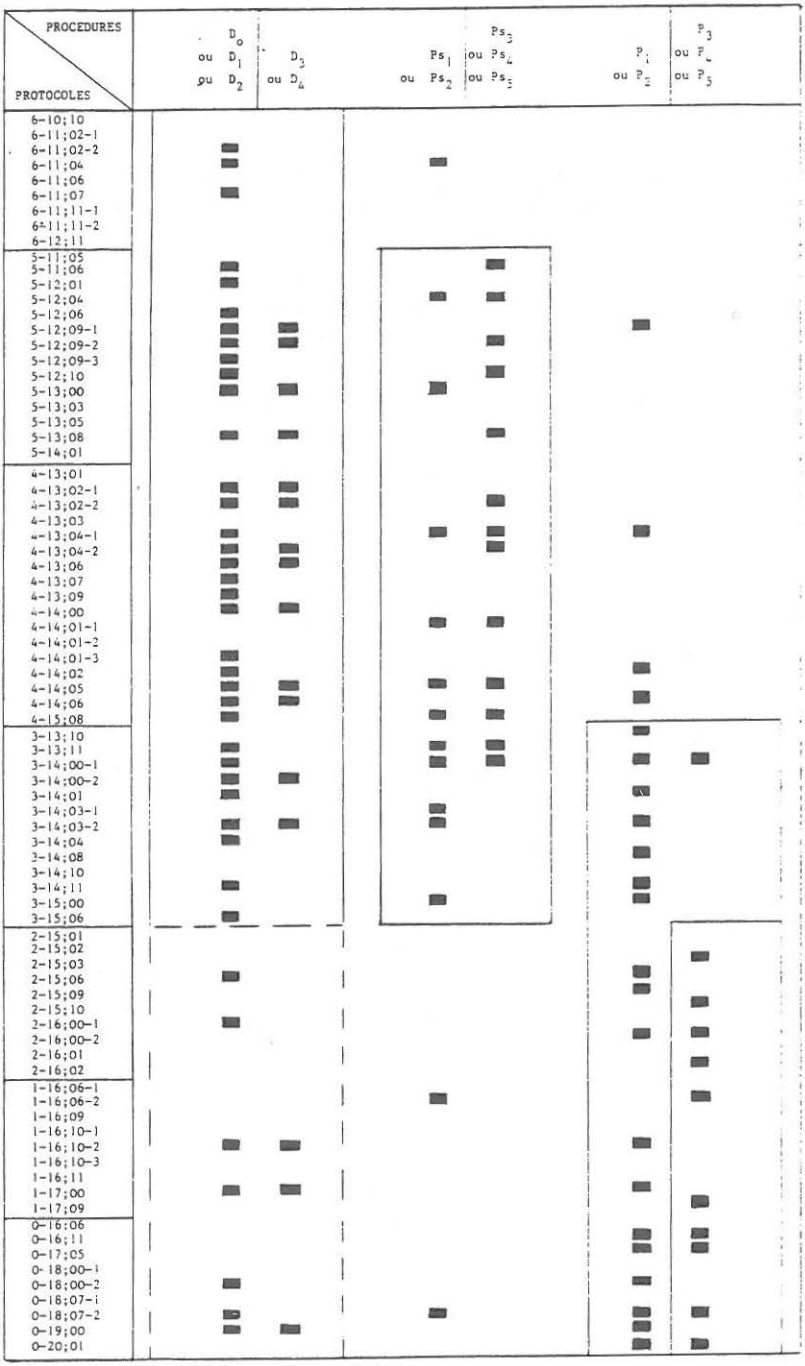

PROCEDURES
PROTOCOLES
D_0 ou D_1 ou D_2
D_3 ou D_4
Ps_1 ou Ps_2
Ps_3 ou Ps_4 ou Ps_5
P_1 ou P_2
P_3 ou P_4 ou P_5
6-10;10
6-11;02-1
6-11;02-2
6-11;04
6-11;06
6-11;07
6-11;11-1
6-11;11-2
6-12;11
5-11;05
5-11;06
5-12;01
5-12;04
5-12;06
5-12;09-1
5-12;09-2
5-12;09-3
5-12;10
5-13;00
5-13;03
5-13;05
5-13;08
5-14;01
4-13;01
4-13;02-1
4-13;02-2
4-13;03
4-13;04-1
4-13;04-2
4-13;06
4-13;07
4-13;09
4-14;00
4-14;01-1
4-14;01-2
4-14;01-3
4-14;02
4-14;05
4-14;06
4-15;08
3-13;10
3-13;11
3-14;00-1
3-14;00-2
3-14;01
3-14;03-1
3-14;03-2
3-14;04
3-14;08
3-14;10
3-14;11
3-15;00
3-15;06
2-15;01
2-15;02
2-15;03
2-15;06
2-15;09
2-15;10
2-16;00-1
2-16;00-2
2-16;01
2-16;02
1-16;06-1
1-16;06-2
1-16;09
1-16;10-1
1-16;10-2
1-16;10-3
1-16;11
1-17;00
1-17;09
0-16;06
0-16;11
0-17;05
0-18;00-1
0-18;00-2
0-18;07-1
0-18;07-2
0-19;00
0-20;01

Tableau 66

6. ANALYSE DES PROCEDURES

a) Examinons tout d'abord *les procédures* D_0, D_1 *ou* D_2.
Le tableau 67 ci-dessous donne la répartition de ces procédures suivant les classes.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Nombre d'élèves utilisant D_0 ou D_1 ou D_2	3	9	13	8	2	2	3
% approximatif par classe	35	65	75	60	20	20	35
% approximatif par groupes de classes	35	70			25		

Tableau 67

La procédure faisant appel au double apparaît essentiellement dans le premier cycle, mais elle est aussi présente de façon non négligeable dans le second cycle.

b) Examinons ensuite *les procédures Ps*.
Le tableau 68 ci-dessous donne la répartition de ces procédures suivant les classes.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Nombre d'élèves utilisant Ps_1 ou Ps_2 ou Ps_3 ou Ps_4 ou Ps_5	1	6	6	5	0	1[1]	1
% approximatif par classe	10	40	35	40	0	10	10
% approximatif par groupes de classes	10	40			5		

Tableau 68

C'est dans nos classes de 5ème, 4ème et 3ème que les procédures liées à la pseudo proportionnalité interviennent de façon importante.

c) Examinons les *procédures P*.

Le tableau 69 ci-dessous donne la répartition de ces procédures suivant les classes.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Nombre d'élèves utilisant P_1 ou P_2 ou P_3 ou P_4 ou P_5 sans utiliser Ps.	0	1	3	7	6	4	6
% approximatif par classe	0	5	15	50	60	45	65
% approximatif par groupes de classes	10			55			

Tableau 69

La conservation des proportions au sens large où nous l'avons défini dans le premier paragraphe de ce chapitre ne s'installe vraiment dans les procédures de nos élèves qu'à partir de la classe de 3ème.

d) Examinons maintenant *les procédures* P_3 *ou* P_4 *ou* P_5.

Le tableau 70 ci-dessous donne la répartition de ces procédures suivant les classes.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Nombre d'élèves utilisant P_3 ou P_4 ou P_5	0	0	0	1	4	2	4

Tableau 70

Les procédures faisant intervenir des rapports associés à la figure initiale afin de les conserver dans la figure transformée, n'apparaissent de façon nette que dans le deuxième cycle.

e) Nous avons déjà remarqué que nos élèves de *sixième* ont du mal à utiliser des mesures, il n'est donc pas étonnant que ces élèves chez lesquels prédominent des observables qualitatifs ne fassent pas un grand usage des seules proportions qu'ils pratiquent : le double.

f) Nos élèves de *second cycle* tout en utilisant le double, ont nettement accès à la notion de proportion et même à la conservation des rapports comme nous l'avons vu dans le tableau 70 . Toutefois, cette pratique des proportions sous une forme générale sans déviation due aux pseudo-proportions n'est réalisée que chez 14 d'entre eux; elle n'est donc réalisée que pour un élève du second cycle sur deux. Ce résultat est à rapprocher du fait que la conservation des angles dans ce deuxième cycle est nette à 100 % (cf. tableau 59 page 169). Ceci nous conduit à penser dès maintenant que dans l'acquisition de la similitude, la conservation des angles domine la conservation des proportions. Nous développons au chapitre XIV §7 une analyse plus minutieuse de l'importance relative de la conservation des angles et de la conservation des proportions.

g) Examinons maintenant *nos élèves de 5ème, 4ème et 3ème* chez lesquels la similitude en formation apparaît comme un bouillonnement. Tout d'abord, nous constatons qu'ils restent très attachés aux procédures D_0, D_1 ou D_2 et de là débouchent sur les procédures D_3 et D_4 faisant appel à des proportions encore simples mais qui ne se restreignent pas à la seule multiplication par deux. La moitié des élèves utilisant le double font intervenir des procédures D_3 et D_4.

Les proportions sous leur forme la plus générale ont du mal à émerger dans ces classes comme le montre le tableau 68. Nous rencontrons les procédures P_1 ou P_2 sans qu'apparaissent les procédures Ps, chez un élève de cinquième, deux élèves de quatrième[1] et quatre élèves de troisième. Il faut atteindre la classe de troisième pour rencontrer la proportionnalité la plus générale chez un élève sur deux, mais là encore les pseudo proportions sont notablement présentes . Comme le montre le tableau 68 les pseudo proportions sont bien installées dans ces classes.

h) Parmi les vingt élèves, comptabilisés dans le tableau 68, ayant un des cinq comportements Ps, tous sauf trois ont aussi au cours de leur recherche, un comportement faisant appel aux proportions D ou P, et en particulier quinze d'entre eux ont un comportement faisant appel au double D.
De plus, jusqu'en classe de quatrième, nous trouvons les comportements Ps accompagnant les comportements P. En troisième, le comportement P fait son apparition sans que disparaissent ni D ni Ps. Dans le second cycle, P domine et Ps disparaît. Si la maîtrise des proportions est progressive au cours du second cycle alors nous pouvons faire l'hypothèse que, *au sujet de la similitude, la pseudo proportionnalité est une étape que parcourent beaucoup d'élèves après avoir utilisé la proportionnalité simple D et avant de faire intervenir la conservation des proportions P.*

i) La pseudo-proportionnalité que nous venons d'analyser n'est une nouveauté ni pour la psychologie cognitive, ni pour la didactique. Il suffit pour s'en rendre compte de consulter, par exemple, les travaux de PIAGET J. (1947), NOETLING G.(1980a, b), BROUSSEAU G. (1981) et HART K. (1981), DUPUIS C. et PLUVINAGE F. (1981)[2].

Par contre, il peut paraître intéressant de la localiser de façon aussi nette en 5ème, 4ème et 3ème et de voir comment venant de la procédure double elle conduit à la proportionnalité et contribue ainsi à la conceptualisation de la similitude.

7. CONCLUSIONS SUR LA CONSERVATION DES PROPORTIONS

Nous retenons essentiellement de l'analyse précédente sur le rôle de la proportionnalité dans la similitude quatre résultats.

- La procédure double si elle est fondamentale dans le premier cycle ne disparaît jamais.
- La pseudo proportion importante en 5ème, 4ème,3ème fait partie du processus d'acquisition.
- La proprotionnalité ne s'impose qu'à partir de notre classe de troisième.
- La conservation du rapport ne fait son apparition que dans le second cycle.

Chacun de ces quatre résultats est schématisé par un encadrement dans le tableau 66.

oooOOooo

- CHAPITRE XIII -

EQUILIBRES DANS LE PROBLEME SIM

1. L'HORIZONTALE DANS LE PROTOCOLE 4-13;04-1

Le protocole 4-13;04-1 décrit le travail d'un élève que nous appelons Lau. Dès le début de sa recherche Lau déclare : "Je vais mettre le trait là sur AC".
Il décide donc de choisir comme grand côté du triangle cherché la longueur inférieure du rectangle. Il construit le triangle CAB tel que $\widehat{BCA}$ soit égal au petit angle de T et $\widehat{BAC}$ soit égal à l'angle moyen de T. Ce qui lui donne le dessin représenté à la figure 70 ci-dessous.

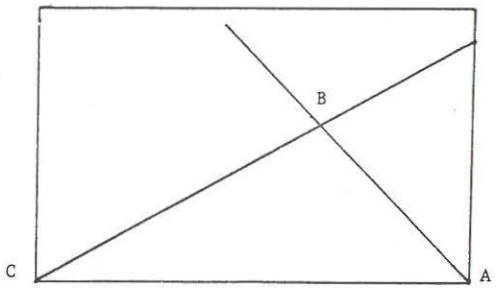


Figure 70

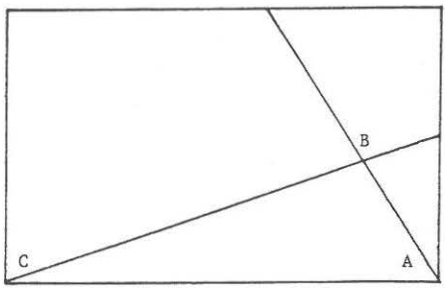


Figure 71

Nous arrivons à la 38ème minute et pour Lau la recherche est achevée car le dessin représenté à la figure 70 lui a donné le plus grand triangle possible.

Lau vient donc, en 38 minutes de recherche, de tracer sept triangles; tous ces triangles ont leur grand côté parallèle à la longueur inférieure du rectangle; nous disons, traditionnellement, que ces grands côtés sont tous horizontaux.

Il faudra que l'expérimentateur intervienne pour l'amener à incliner ce grand côté. Nous avons là une situation mathématique spécifique, qui utilise d'ailleurs fortement un observable, et qui consiste à *placer un côté d'un triangle en position "horizontale"*.

2. LES BLOCAGES

Dans l'exemple précédent, nous assistons à un blocage que l'expérimentateur peut, par son intervention, faire disparaître.

Nous rencontrons des blocages encore plus forts. C'est ainsi que dans le protocole 4-13;09 le seul dessin de l'élève est celui reproduit à la figure 75 . Et lorsque à la 50ème minute, en désespoir de cause, l'expérimentateur lui propose en joignant le geste à la parole

- Et si tu essayais en biais ?

L'élève répond :

- Oh non ! c'est pas pratique.

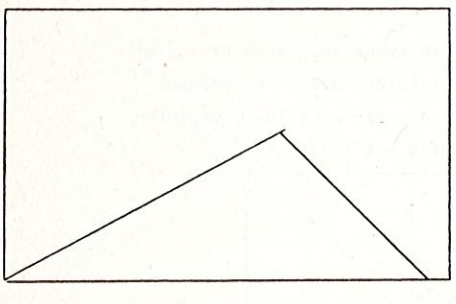


Figure 75

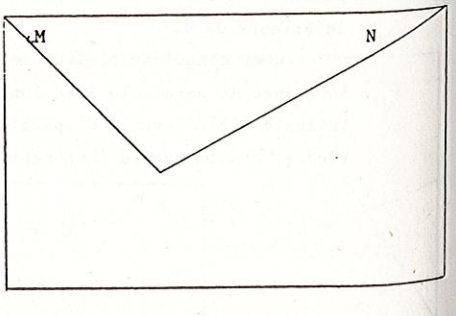


Figure 76

Mais cette situation qui consiste à placer un côté du triangle "à l'horizontale" ne joue pas toujours un rôle de blocage. C'est ainsi que dans le protocole 0-16;06 , l'élève après quelques observations sur les dimensions de T et de R, affirme :

- Pour faire rentrer une ligne plus grande, c'est la diagonale, puis demande,
- On peut faire plusieurs dessins ?

La réponse de l'expérimentateur étant affirmative, il réalise le dessin que nous avons représenté à la figure 76 ci-dessus en prenant comme grand côté MN la longueur supérieure du rectangle et en construisant les angles $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$ égaux respectivement à $\widehat{m}$ et $\widehat{p}$. Ayant terminé ceci en 2 ou 3 minutes, il ajoute aussitôt :

- Je vais en construire un à partir de la diagonale.

Il réalise alors le dessin que nous représentons à la figure 77 ci-dessous. Tout son travail, ses dessins et la démonstration qui accompagne le dernier dessin étant achevés en cinq minutes.

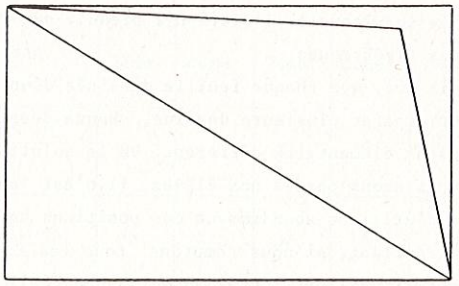


Figure 77

Dans ce cas, il est clair que l'élève avant même de commencer la figure 76 , envisage au moins un autre dessin puisqu'il parle de "plusieurs dessins"; il n'est pas bloqué par l'horizontale, mais on a plutôt l'impression qu'il "se fait la main", qu'il adopte une position plus facile en réalisant la figure 76, et, pour lui, dépasser cette position ne pose aucun problème.

Mais cette situation qui consiste à placer un côté du triangle "à l'horizontale" ne joue pas toujours un rôle de blocage. C'est ainsi que dans le protocole 0-16;06 , l'élève après quelques observations sur les dimensions de T et de R, affirme :

- Pour faire rentrer une ligne plus grande, c'est la diagonale, puis demande,
- On peut faire plusieurs dessins ?

La réponse de l'expérimentateur étant affirmative, il réalise le dessin que nous avons représenté à la figure 76 ci-dessus en prenant comme grand côté MN la longueur supérieure du rectangle et en construisant les angles $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$ égaux respectivement à $\widehat{m}$ et $\widehat{p}$. Ayant terminé ceci en 2 ou 3 minutes, il ajoute aussitôt :

- Je vais en construire un à partir de la diagonale.

Il réalise alors le dessin que nous représentons à la figure 77 ci-dessous. Tout son travail, ses dessins et la démonstration qui accompagne le dernier dessin étant achevés en cinq minutes.

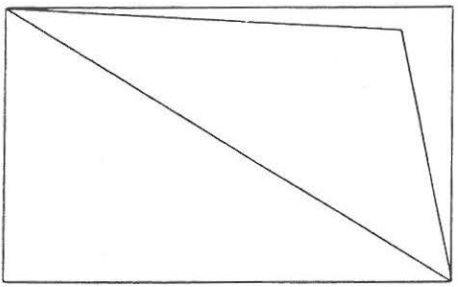


Figure 77

Dans ce cas, il est clair que l'élève avant même de commencer la figure 76 , envisage au moins un autre dessin puisqu'il parle de "plusieurs dessins"; il n'est pas bloqué par l'horizontale, mais on a plutôt l'impression qu'il "se fait la main", qu'il adopte une position plus facile en réalisant la figure 76, et, pour lui, dépasser cette position ne pose aucun problème.

3. NOMBRE DE TRIANGLES AYANT UN COTE VERTICAL OU HORIZONTAL

Une situation mathématique spécifique est, pour le problème que nous étudions, l'existence d'un triangle dont un des côtés est parallèle à la longueur ou à la largeur du rectangle. La plupart du temps, quand il en est ainsi, le côté du triangle est sur la longueur ou sur la largeur.

Avant d'analyser de façon plus précise l'équilibre lié à la situation spécifique que nous venons de décrire, nous allons comptabiliser tous les dessins d'élève introduisant un triangle dont un des côtés est sur la largeur ou la longueur du rectangle, ou plus généralement parallèle à cette largeur ou à cette longueur. Nous disons plus brièvement : un triangle ayant un côté vertical ou horizontal.

. Nous définissons en fait plusieurs sortes de dessins.
Nous avons à notre disposition les feuilles de l'élève, sur chaque feuille nous pouvons avoir soit le rectangle R avec un dessin de l'élève, soit le triangle T avec une réalisation de l'élève, soit une feuille sur laquelle l'élève n'a produit que des calculs ou des écritures algébriques.
Notons toutefois que, sur chaque feuille dessinée d'un élève, nous pouvons souvent séparer plusieurs dessins, chaque dessin accompagnant un processus élémentaire différent. Vu la solution du problème que nous avons posé à nos élèves, il n'est logiquement pas nécessaire d'utiliser abondamment ces positions horizontales ou verticales. Pourtant, si nous comptons[1] tous les élèves qui, au cours de leur travail, ont fourni au moins une feuille sur laquelle est tracé un dessin qui propose principalement et nettement un triangle ayant un côté vertical ou horizontal, nous trouvons, en fonction des classes, les résultats indiqués par le tableau 78 ci-après :

Classes / Elèves	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.
Nombre d'élèves ayant dessiné ou ébauché au moins un triangle à côté vertical ou horizontal.	10	15	12	6	6	6
% approximatif par classe des élèves ayant dessiné ou ébauché au moins un triangle à côté vertical ou horizontal	70	90	90	60	65	65

Tableau 78

Plus des deux tiers de nos élèves, de la 5ème à la terminale, ont ébauché ou dessiné un triangle ayant un côté horizontal ou vertical.

Si nous comptons toutes les feuilles d'élèves pour lesquelles cela a un sens de se prononcer sur l'existence ou non d'un triangle ayant un côté vertical ou horizontal[1], nous trouvons en fonction des classes les résultats indiqués par le tableau 79 ci-dessous :

Classes / Nombre de feuilles	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Term.	de la 5ème à la Terminale
avec triangle ayant un côté vertical ou horizontal	29	43	33	14	12	13	154
Sans triangle ayant un côté horizontal ou vertical	58	27	32	15	10	20	162
Nombre total de feuilles	98	94	81	37	30	41	381

Tableau 79

Nous constatons donc l'importance des dessins avec triangle ayant un côté vertical ou horizontal chez tous nos élèves à partir de la 5ème. En effet, 154 feuilles sur les 316 pour lesquelles cela a un sens de se prononcer ou, plus sommairement, *une feuille sur deux, comportent un triangle ayant un côté vertical ou horizontal.*

4. LES POSITIONS D'EQUILIBRE

Nous examinons maintenant tous les élèves, à partir de la 5ème, qui déclarent, à un moment ou à un autre, avoir résolu le problème, bien qu'ils n'aient pas trouvé la solution. Nous regardons alors quelle situation mathématique correspond à leur résultat.
Les élèves qui proposent nettement comme solution un triangle ayant un côté horizontal sont au nombre de 18[1].
Les autres élèves qui déclarent, à un moment ou à un autre, avoir résolu le problème, bien qu'ils n'aient pas trouvé la solution, correspondent aux protocoles :

5-13;00 5-13;03 5-13;08 0-18;07-1

Les deux protocoles 5-13;00 et 5-13;03 mettent en évidence des démarches dans la recherche semblables à celles de nos élèves de 6ème que nous présentons un peu plus loin.
Dans le protocole 5-13;08 la solution mathématique présentée correspond à la figure 80 ci-dessous dans laquelle le triangle dessiné est pour l'élève le triangle T multiplié par 1,5 ; ni la verticale ni l'horizontale ne sont privilégiées ici.

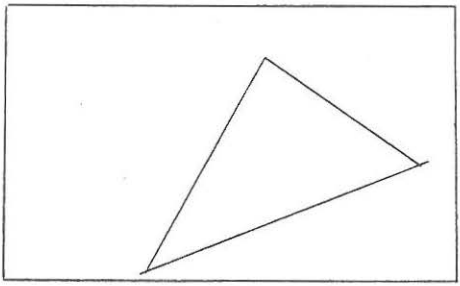


Figure 80

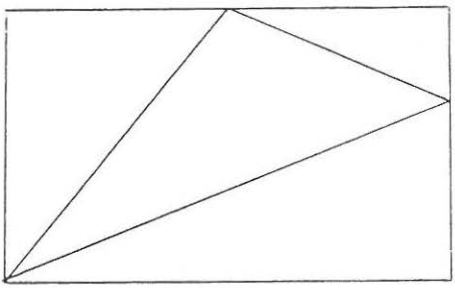


Figure 81

Dans le protocole 0-18;07-1, l'élève propose comme solution, le triangle représenté ci-dessus à la figure 81. Dans ce cas, la verticale et l'horizontale ne sont pas priviligiées.

Rappelons ce que nous entendons par une position d'équilibre dans la recherche d'un problème (cf. chapitre VIII, page 118). Dans un processus de recherche de problème, l'élève atteint une position d'équilibre si un résultat obtenu en cours de recherche a tendance à bloquer, momentanément ou définitivement, le processus de découverte de la solution et si ce résultat correspond à une situation mathématique spécifique.

Sur les 22 élèves qui proposent nettement une solution qui n'est pas la bonne, 18 proposent un triangle ayant un côté horizontal. Nous affirmons donc dès maintenant que, pour le problème que nous étudions, l'existence d'un triangle dont un des côtés est parallèle à la longueur ou à la largeur du rectangle est une position d'équilibre. Pour confirmer et même renforcer la vérification de l'hypothèse générale selon laquelle un processus de recherche de problème passe par des positions d'équilibre, nous allons analyser de façon plus précise les blocages accompagnant les positions d'équilibre. Nous nous en tiendrons, pour ne pas surcharger notre exposé, aux seuls élèves de 4ème.

5. LES BLOCAGES DUS A L'EQUILIBRE EN CLASSE DE QUATRIEME

Nous analysons tout d'abord 9 protocoles présentant un fort équilibre, dont 4 en a, 2 en b et 3 en c. Puis, nous examinons rapidement 7 protocoles en d. Enfin, nous analysons plus longuement en e le dernier protocole avant de conclure en f.

a) Dans les quatre protocoles 4-13;02-1 , 4-15;08 , 4-13;09 , 4-13;03 tous les triangles imaginés ou réalisés ont un côté parallèle ou confondu avec la longueur ou la largeur du rectangle. Ces élèves utilisent les positions d'équilibre sans envisager un seul instant d'autres positions.

Dans le cas de 4-13;03, il y a un blocage après la feuille n° 4 que nous représentons sur la figure 82 ci-après; en effet, nous assistons au dialogue suivant :

EXP - Est-ce le plus grand ?
ELEVE - Je crois.
EXP - On ne peut pas en faire un plus grand ?
ELEVE - Non.

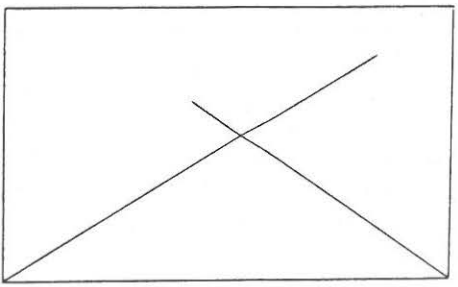


Figure 82

Un peu plus loin, l'élève ajoute : "On ne peut pas en faire de plus grand" et plus loin encore à la question de l'expérimentateur :
-Il n'y a donc pas d'autres solutions ?
L'élève répond : "Non".
Puis enfin ajoute : "Je n'en suis pas sûre".
Elle continue alors sa recherche mais toujours avec des triangles en position d'équilibre.
Le cas 4-13;09 présente un très fort blocage comme nous l'avons signalé plus haut (page 194). Nous trouvons 4-13;02-1 parmi les protocoles rédigés dans la partie F; dans ce protocole, l'élève s'appelle LEG.

b) Nous avons déjà analysé (aux pages 192, 193 et 194) le cheminement suivi en 4-13;04-1. Dans le protocole 4-14;01-2, les feuilles numéros 2, 3, 4, 5, 6 et 7 qui accompagnent la recherche de l'élève, n'introduisent que des triangles en position d'équilibre. L'élève propose comme solution le triangle de la feuille n° 7, reproduit ci-dessous sur la figure 83. Il en est à la 35ème minute de recherche et il considère qu'il a fini. L'expérimentateur lui rappelle alors qu'il s'agit de trouver le plus grand triangle possible et lui demande si le triangle de la figure 83 est bien le plus grand. Le ton de la question posée par l'expérimentateur laisse penser que ce triangle n'est pas le plus grand. L'élève reprend donc son travail. Il aboutit

à la solution du problème.

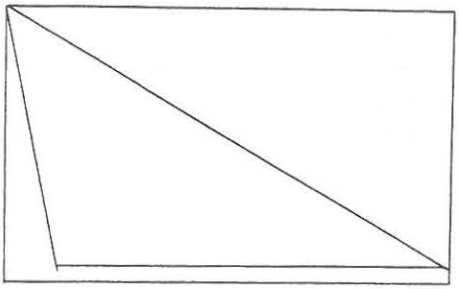


Figure 83

Ces deux protocoles 4-13;04-1 et 4-14;01-2 suivent donc le même cheminement : après une longue recherche n'introduisant que des triangles en position d'équilibre, l'élève déclare qu'il a la solution demandée, c'est alors une intervention très nette de l'expérimentateur qui permet le déblocage.

c) Mais le déblocage peut aussi provenir de l'élève qui arrive ainsi à un dépassement de cette position d'équilibre : c'est le cas des protocoles 4-13;02-2, 4-14;01-1, 4-14;05. En 4-13;02-2 après ses trois premières feuilles, l'élève annonce qu'il a fini.
Elève - Là, à mon avis, j'ai le plus grand.
Puis apparaît l'idée de l'inclinaison.
Elève - Oh non ! Si je le mets en biais ce sera encore plus grand.
L'équilibre est dépassé.
En 4-14;01-1 c'est à la fin de sa recherche qui n'a comporté que des dessins de triangles en position d'équilibre, que l'élève découpe son dernier triangle et envisage de "le mettre dans une autre position dans le rectangle et essayer de l'agrandir". On peut alors penser qu'il a les moyens de dépasser l'équilibre.
Dans le protocole 4-14;05, il faut attendre la 35ème minute, alors que jusque là tous ses triangles ont été en position d'équilibre pour que l'élève émette l'idée d'incliner le grand côté de son triangle.

Donc dans ces trois cas, nous trouvons un équilibre très net qui dure suffisamment pour qu'on puisse parler de blocage momentané, mais cet équilibre arrive à être dépassé.
Nous avons donc compté jusqu'ici neuf élèves parmi nos 17 élèves, s'appuyant sur un fort équilibre avec blocage, dépassé ou non. Ceci confirme l'importance de cet équilibre déjà constaté lors d'une première analyse.

d) Mais qu'en est-il, du point de vue de l'équilibre, de nos autres élèves de quatrième ? Dans les protocoles 4-13;04-2 et 4-14;00 l'équilibre n'apparaît pas.
Dans les protocoles 4-13;06 et 4-14;02 le dépassement de l'équilibre est facilement réalisé, il n'y a donc pas de blocage.
Les protocoles 4-13;01 , 4-14;01-3 , 4-14;06 ne contiennent pas assez d'éléments explicites pour qu'on puisse avoir une analyse sur ce sujet.

e) Examinons plus attentivement le protocole 4-13;07. Dans ses feuilles n° 2 et 3, l'élève réalise totalement ou partiellement des triangles ayant leur petit côté sur la largeur du rectangle situé à gauche. Nous présentons à la figure 84 la feuille N° 3 de cette élève. L'équilibre est donc net.

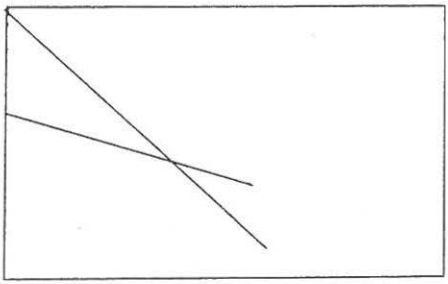


Figure 84

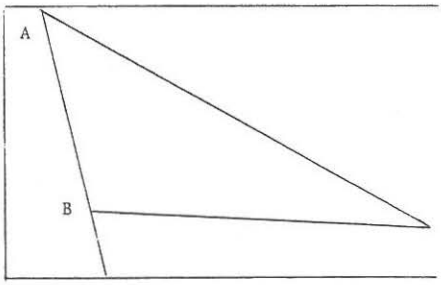


Figure 85

Elle arrive à dépasser cet équilibre; sur sa feuille n° 4, elle trace "au hasard" dit-elle, un segment AB de 8 cm, puis un angle de 47°, et enfin un angle de 105°, ce qui lui donne le triangle représenté sur la figure 85 ci-dessus.

Elle ajoute :

- Je vais essayer de faire plus grand.

Elle revient alors à une position d'équilibre nette comme le montre son dessin n° 5 représenté à la figure 86 ci-dessous.

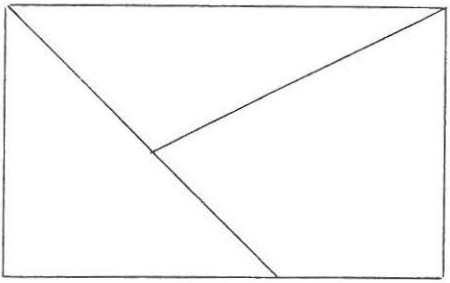


Figure 86

Les positions d'équilibre semblent dans ce cas se présenter comme un élément de stabilité inconsciente. Nous examinons cette notion de stabilité dans le paragraphe suivant page 204.

f) Nous constatons que dans les 9 cas que nous avons analysés en a, b et c les élèves qui utilisent de façon importante des triangles à côtés verticaux ou horizontaux n'arrivent pas à trouver la solution du problème, à l'exception de l'élève correpondant au protocole 4-14;01-2 qui bénéficie d'une forte intervention de l'expérimentateur, alors qu'un élève sur trois trouve la solution dans notre classe de quatrième. Le blocage est donc net, ce qui confirme le fait que nous avons affaire à un équilibre.

Le nombre de dessins et l'analyse des protocoles de la classe de quatrième, du point de vue de l'équilibre, nous semblent suffisants pour prouver l'importance de l'équilibre associé à ce problème particulier, que nous appelons l'équilibre de l'horizontale et de la verticale, ainsi que l'existence de la notion générale d'équilibre.

Pour compléter notre réflexion sur cette position d'équilibre, examinons la stabilité de cet équilibre.

6. LA STABILITE DE L'EQUILIBRE

La stabilité d'un équilibre se caractérise par le fait que un élève qui sait dépasser une position d'équilibre, revient à cette position d'équilibre, en cas de difficulté dans la recherche de sa solution.
Nous allons montrer que de tels cas se présentent de façon très nette.

Examinons tout d'abord le protocole 5-11;06.
L'élève, dès le début, veut utiliser la diagonale joignant le coin supérieur droit au coin inférieur gauche de R, car c'est le plus grand segment contenu dans le rectangle. Mais comme elle envisage de construire un triangle directement semblable à T, c'est l'échec. Elle est obligé de se contenter d'un triangle en travers, celui que nous représentons ci-dessous à la figure87 .
Mais les dimensions de ce triangle ne lui conviennent pas.
Elle en réalise donc un autre, toujours en travers.

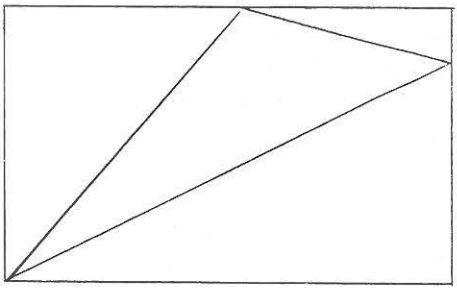


Figure 87

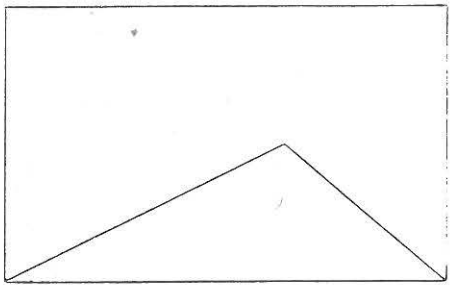


Figure 88

Elle ne le trouve pas assez ressemblant; d'où son quatrième essai qui n'est même pas achevé. Elle revient alors à sa diagonale. Mais voulant conserver l'orientation du triangle, c'est encore l'impasse en ce 5ème essai. Après tous ces échecs, apparaît sa première position d'équilibre vers la 20ème minute de recherche. Elle aboutit ainsi à la figure 88 représentée ci-dessus.

Alors, elle déclare :

- C'est le même mais ce n'est pas le plus grand.

Alors vont se succéder deux tentatives encore pour construire un triangle semblable à T dont le grand côté est la diagonale. Après chacune de ces tentatives qui échouent, elle revient à la position d'équilibre; c'est ainsi qu'elle réalise dans l'ordre les figures 89, 90, 91 et 92 représentées ci-dessous.

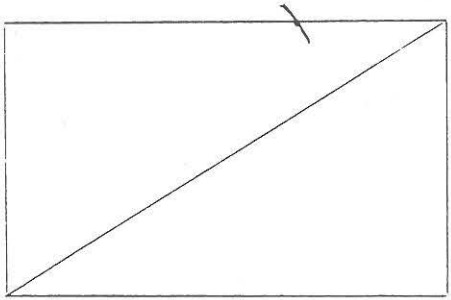


Figure 89

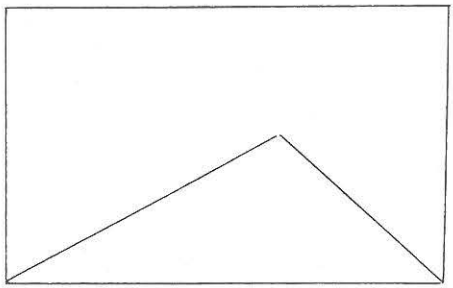


Figure 90

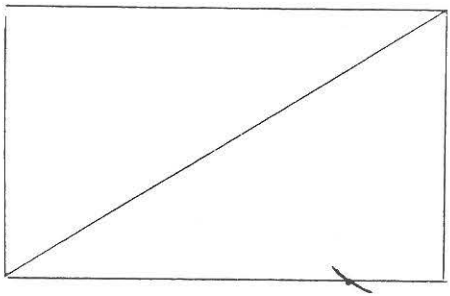


Figure 91

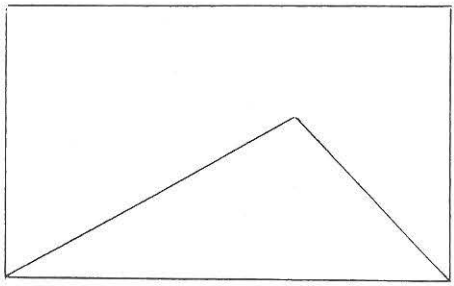


Figure 92

La recherche s'achève sur une nouvelle tentative.

C'est là, pour nous, un cas type d'équilibre stable tel que nous l'avons défini.

Dans le protocole 4-14;06, après la construction du triangle représenté à la figure 93 ci-dessous, l'élève déclare :

- C'est ça mais pas exactement. Il faut qu'il soit plus relevé. Il faudrait mesurer, avec une équerre, mais je ne sais pas m'en servir.

L'élève se trouve donc dans une impasse.

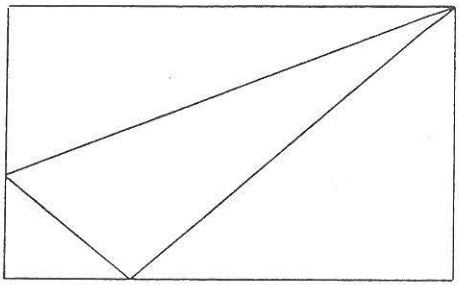


Figure 93

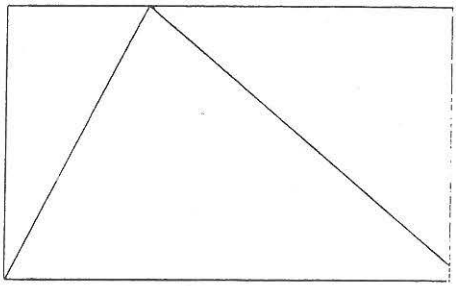


Figure 94

Elle construit donc un triangle en position d'équilibre, c'est la figure 94 représentée ci-dessus.
Elle sait d'ailleurs parfaitement dépasser cette position d'équilibre comme le montrent la figure 93 et le fait qu'en fin de recherche elle trouve la solution du problème.

Dans le protocole 3-14;00-1, MAP place des triangles comme ceux des figures 95 et 96 représentées ci-dessous.

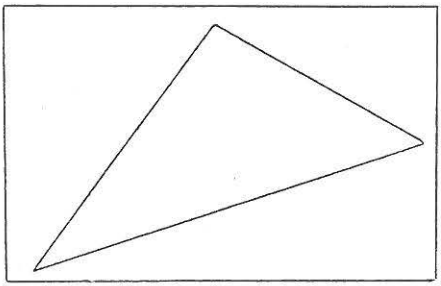


Figure 95

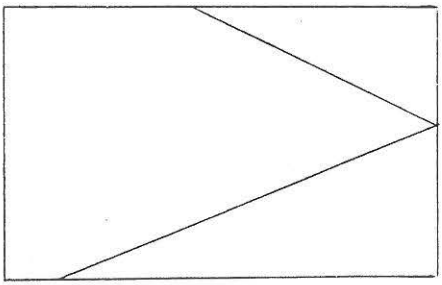


Figure 96

Ces triangles ne conviennent pas. Après plusieurs tentatives qui durent jusqu'à la vingtième minute, elle réalise un triangle en position d'équilibre : c'est sa figure 97 représentée ci-dessous.

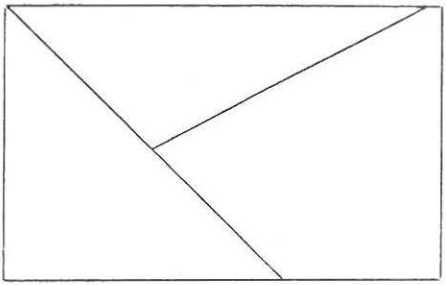


Figure 97

Dans les trois exemples que nous venons de présenter, les protocoles montrent que l'élève utilise la position d'équilibre, sait la dépasser mais la réintroduit en cas de difficulté dans la recherche de sa solution. Ces trois attitudes conjuguées nous font dire que, pour ces élèves, l'équilibre est stable.

Nous avons relevé un certain nombre de protocoles où l'équilibre est stable; ce sont en dehors des trois déjà cités, les protocoles :

5-12;01 5-12;09-2 4-13;07 3-14;03-1 3-14;10 3-14;11
2-15;01 2-16;00-1 1-16;10-3 0-17;05 0-18;07-2 0-19;00

Ajoutons encore deux remarques au sujet de la stabilité de cet équilibre.

Nous avons trouvé des protocoles où l'équilibre de la verticale et de l'horizontale existe, et où le dépassement et la stabilité de cet équilibre sont parfaitement maîtrisés, en ce sens que l'élève se sert de la position d'équilibre comme d'une situation plus simple, comme d'un palier, lui permettant d'atteindre le cas général qu'il a en vue. C'est le cas de 0-16;06 que nous avons cité au paragraphe 2 de ce chapitre, c'est encore le cas de Gil et Mar dont les protocoles 3-14;01 et 3-15;00 sont dans la partie F.

Certains élèves n'utilisent pas, pour notre problème SIM, les positions d'équilibre mais à l'occasion d'un problème plus difficile, comme le deuxième problème correspondant à un triangle de dimensions 4, 8 et 8,5, ont·voit réapparaître les positions d'équilibre.

C'est ce qui se passe, par exemple, dans les protocoles :

2-15;02 2-15;09 2-16;00-2

En conclusion des paragraphes qui précèdent, nous disons que *l'équilibre de l'horizontale et de la verticale est très fort dans notre problème, qu'il est très stable, et que, s'il apparaît à partir de la 5ème, il se prolonge jusqu'en classe de Terminale.*

7. UNE ANALYSE DES PROTOCOLES DE NOS ELEVES DE SIXIEME

Dans les paragraphes précédents, nous avons volontairement laissé de côté les élèves de 6ème.

Sur les 77 feuilles des élèves de 6ème dont nous disposons, une seule comporte le triangle T, les 76 autres comportent le rectangle R avec un dessin d'élève. Ce sont ces 76 feuilles que nous prenons en considération.

Sur ces 76 feuilles, nous n'en trouvons que 5 où sont dessinés des triangles avec un côté parallèle à la longueur ou à la largeur du rectangle. L'équilibre que nous avons étudié précédemment, si net de la 5ème à la Terminale, est donc absent chez nos élèves de 6ème.

Par contre, ce que les élèves essaient de reproduire dans le rectangle R, c'est un triangle dont les côtés sont inclinés par rapport à la longueur ou à la largeur du rectangle de la même manière que ceux de T le sont par rapport aux bords de la feuille carrée sur laquelle ils se trouvent.

Nous disons que l'élève veut conserver les pentes des côtés des triangles par rapport aux bords de la feuille.

C'est ainsi que nous trouvons 56 feuilles où l'élève essaie de reproduire la configuration de la figure 99 ci-après; c'est ce que nous constatons en examinant les 7 feuilles du protocole 6-11;02-1 que nous représentons à la page suivante, figure 98.

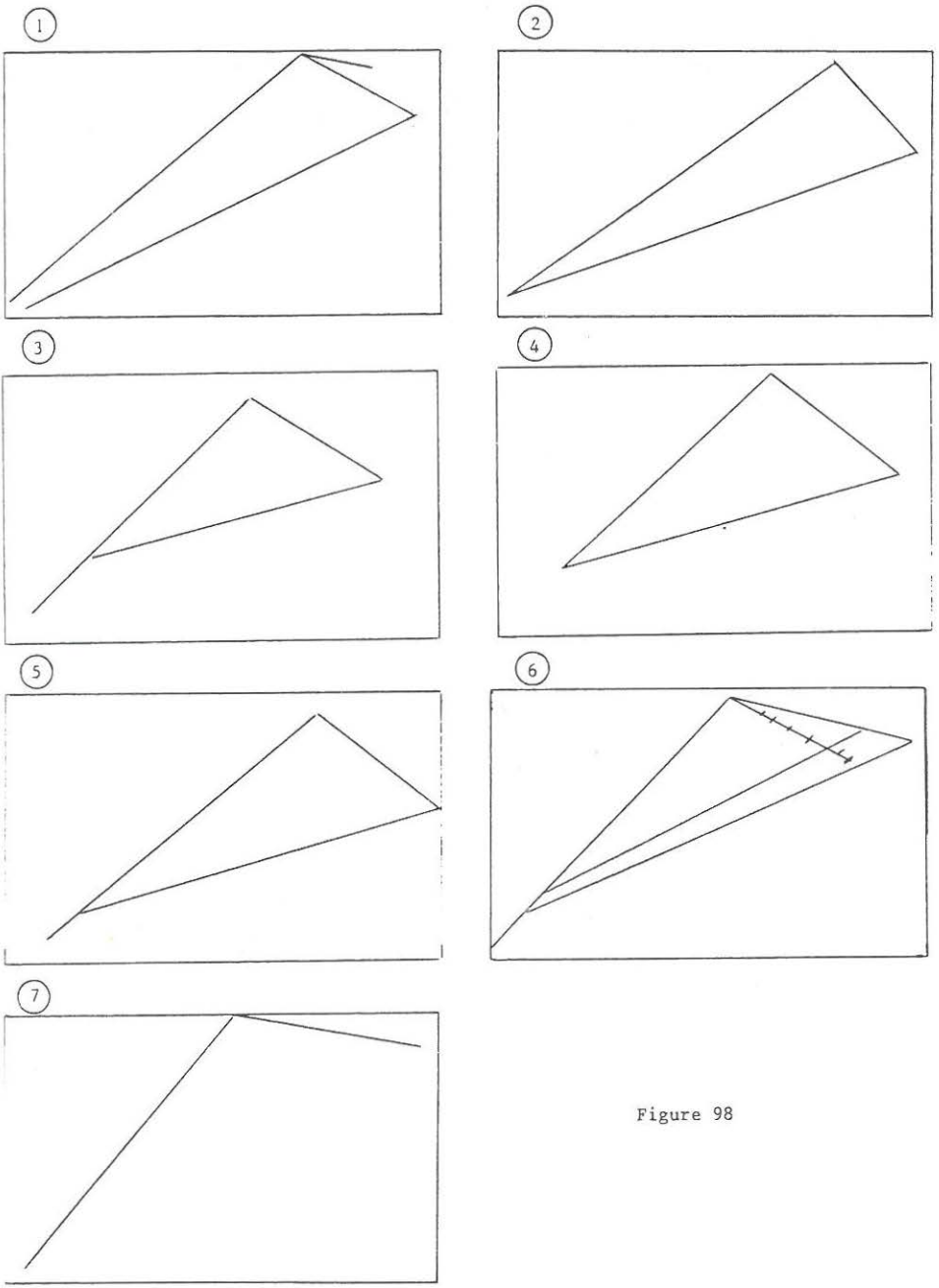


Figure 98

Trois feuilles essaient de reproduire la configuration présentée à la figure 100 ci-dessous; ce sont trois feuilles du protocole 6-11;11-2.

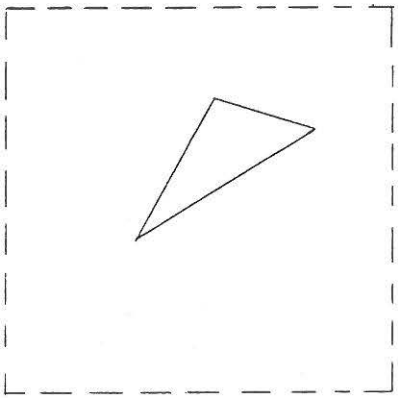


Figure 99

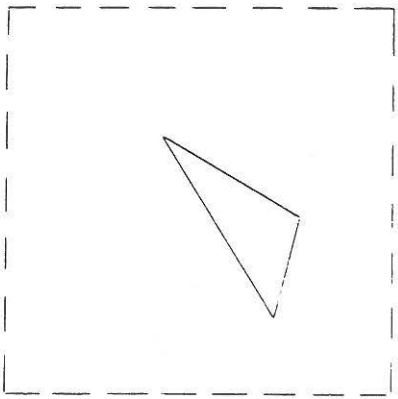


Figure 100

Huit feuilles essaient de reproduire la configuration représentée à la figure 101 , ce sont huit feuilles du protocole 6-12;11.

Quatre feuilles essaient de reproduire la configuration représentée à la figure 102, ce sont quatre feuilles du protocole 6-11;04.

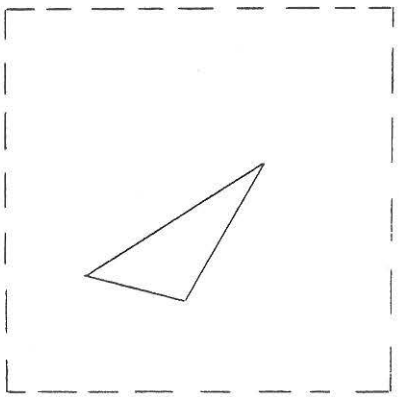


Figure 101

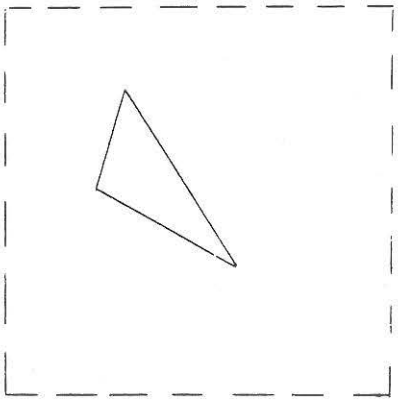


Figure 102

Nous avons là une grande cohérence entre tous les dessins de nos élèves de 6ème, cohérence d'autant plus remarquable qu'elle disparaît dans nos autres classes. Comment l'expliquer ?

Pour obtenir quelques explications, nous avons analysé chaque protocole du point de vue de l'importance de la conservation des pentes des côtés des triangles par rapport aux bords des feuilles; nous présentons ci-dessous deux analyses partielles.

Nous analysons tout d'abord le protocole 6-11;07 qui rend compte du travail de COR.

Dans le premier triangle dessiné par COR que nous reproduisons sur la figure 103 ci-dessous, le petit côté AB vaut 2 x 4 cm et le côté moyen AC est de 2 x 6 cm; mais les inclinaisons de ces deux côtés sont choisies au coup d'oeil. COR trouve que le côté moyen du triangle T est plus incliné par rapport à l'horizontale que le côté AC qu'elle vient de tracer. Durant tout son travail, COR place le triangle T dans la position indiquée par la figure 99 , les bords des feuilles sur lesquelles se trouvent le rectangle R et le triangle T étant deux à deux parallèles. Dans ces conditions, il est exact que la pente de AC par rapport à l'horizontale est plus petite que la pente du côté moyen de T.

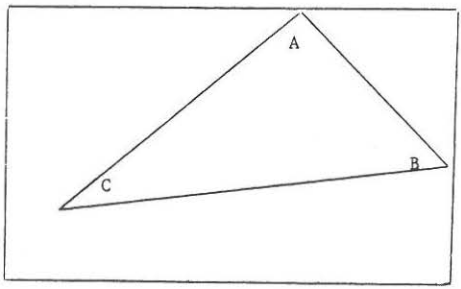


Figure 103

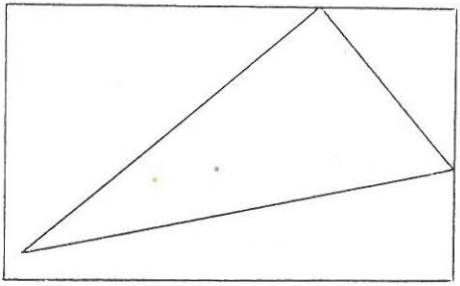


Figure 104

Toujours en examinant son premier dessin (figure 103) l'élève estime qu'en allongeant le segment AC, du côté de C, elle obtient un côté BC plus incliné, donc plus ressemblant au grand côté du triangle donné T.

Elle passe donc, à la cinquième minute, à une deuxième réalisation que nous reproduisons sur la figure 104 ci-avant; elle ne modifie pas le petit côté, par contre selon son anticipation, le moyen côté s'est allongé et donc le grand côté s'est incliné. Mais là encore, elle trouve que le grand côté qu'elle vient de tracer, n'est pas assez penché.

Elle entreprend donc un troisième dessin. Les feuilles portant le rectangle donné R et le triangle donné T, sont toujours disposées côte à côte, avec les bords 2 à 2 parallèles. Elle trace le petit côté, en lui donnant une longueur de 2 x 4 cm, puis trace le côté moyen sans se préoccuper de la longueur, elle achève alors son dessin que nous représentons à la figure 105. COR observe et déclare nettement :

- Non, il n'est pas assez toujours penché; il n'est pas assez penché vers le sol.

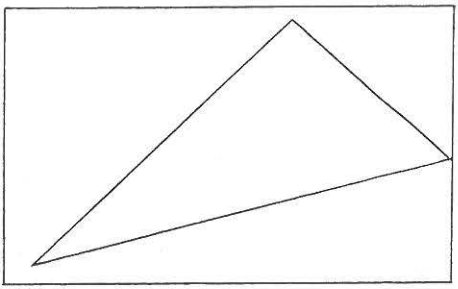


Figure 105

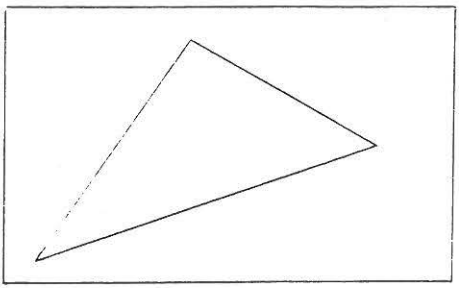


Figure 106

Elle désire donc bien avoir un triangle dont les pentes des côtés par rapport aux bords sont conservées.

Dans son quatrième dessin, d'ailleurs, elle essaie de pencher un peu plus le grand côté. Nous représentons ce dessin sur la figure 106.

Dans son cinquième dessin, la conservation des angles apparaît pour la première fois ainsi que l'idée de décalquer; d'où son sixième dessin représenté à la figure 107 ci-dessous. Dans ce dernier dessin, le grand angle est décalqué, les feuilles R et T étant superposées, leurs bords parallèles deux à deux. Le grand côté est ensuite tracé, sans qu'il soit décalqué, ceci pour des nécessités d'agrandissement.
On peut constater, sur la figure 107, représentant son sixième dessin, que les pentes sont très bien conservées.

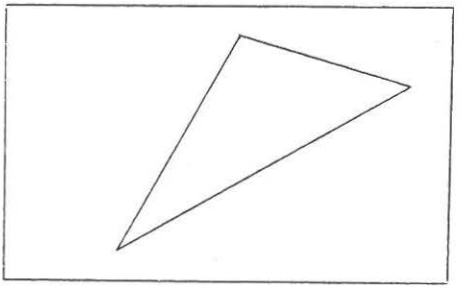


Figure 107

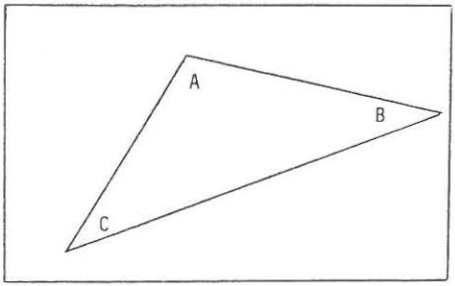


Figure 108

Dans son septième dessin, on trouve pour les côtés AB et AC très exactement les pentes du petit et du moyen côté de T.
Nous représentons ce dernier dessin sur la figure 108 ci-dessus.
Mais là encore, elle trouve que "ça ne va pas".
Elle constate que, comme sur son premier dessin, le grand côté du triangle donné T est plus "penché" que le côté BC qu'elle vient de tracer.

Dans le protocole, de façon très nette, l'élève veut que les pentes des côtés du triangle soient conservées. Les bords des feuilles sur lesquelles se trouvent T et R jouent donc un rôle déterminant.

Analysons maintenant un passage du protocole 6-11;11-2.

Aux alentours de la 24ème minute, l'élève dessine sur le triangle T proposé, deux segments : AM approximativement parallèle à un bord de la feuille et PQ parallèle à l'autre bord. Nous représentons sur la figure 109 le triangle T, les segments AM et PQ, ainsi que les bords de la feuille tracés en pointillés.

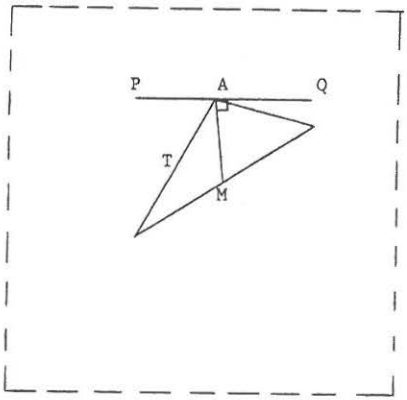


Figure 109

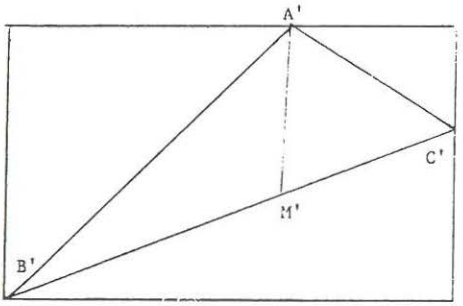


Figure 110

L'élève ajoute à son sixième dessin un segment "vertical", dit-elle; la figure 110 ci-dessus présente son sixième dessin ainsi que le segment vertical A'M'.

Elle essaie donc d'avoir un triangle avec des côtés ayant la même inclinaison par rapport aux bords de la feuille que les côtés de T.

Un peu plus tard, elle compare par transparence T et son triangle A'B'C'; pour cela, elle dispose le petit côté et le côté moyen de T parallèlement à A'C' et A'B'; elle constate alors que AM n'est plus parallèle à A'M'.

Elle modifie donc la figure 109. Nous représentons la feuille sur laquelle se trouve T, après les modifications de dessin, à la figure 111 ci-après. Cette modification consiste à tracer une nouvelle verticale AN et un rectangle UVRS circonscrit du triangle T de telle sorte que les pentes des côtés de T par rapport à ce rectangle soient les mêmes que celles du triangle A'B'C' par rapport au rectangle R.

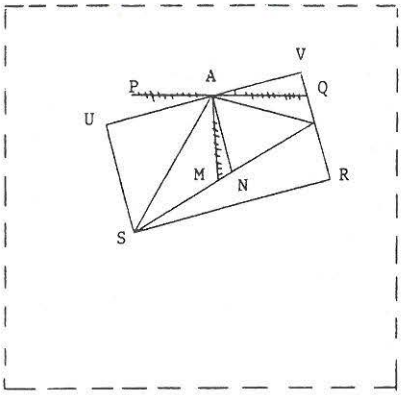


Figure 111

Nous voyons donc cet élève, que la conservation des angles a éloigné de la conservation des pentes, revenir à la conservation des pentes.

Dans d'autres passages de ce même protocole 6-11;11-2, l'élève explicite son intérêt pour la conservation des pentes; ainsi à la septième minute, elle dit : "c'est penché pareil". A la 14ème minute : "il est penché pareil".

Si nous examinons nos neuf protocoles de 6ème, nous voyons que dans sept d'entre eux, les élèves utilisent le mot "penché" ou "redressé".

En définitive, les dessins, le vocabulaire des élèves et l'analyse des procédures, nous montrent que pour nos élèves de 6ème, le triangle semblable cherché doit conserver les pentes des côtés par rapport au cadre de référence constitué par les bords de la feuille.

8. L'EQUILIBRE DE LA CONSERVATION DES PENTES

Nous venons de montrer dans le paragraphe précédent que nos élèves de 6ème, pour résoudre le problème, se contraignent à chercher un triangle dont les pentes des côtés sont les mêmes que celles

des côtés correspondants de T, les pentes étant évaluées au coup d'oeil, c'est-à-dire qualitativement, par rapport aux bords deux à deux parallèles des feuilles sur lesquelles se trouvent le rectangle R et le triangle T.
Cette contrainte les empêche de trouver la solution du problème; elle crée donc un très fort blocage. Nous avons là, par définition, une position d'équilibre. Nous parlons désormais *de l'équilibre de la conservation des pentes.*
Cet équilibre, très net chez tous nos élèves de 6ème, l'est aussi dans certains protocoles de 5ème comme 5-12;09-2 et 5-13;00. Mais, si par la suite cet équilibre fait quelques rares apparitions, il est très vite dépassé. On peut donc dire que l'équilibre de la conservation des pentes est réservé aux plus jeunes de nos élèves de l'enseignement secondaire.

Nous allons examiner, maintenant, comment est dépassé l'équilibre de la conservation des pentes.

Donnons tout d'abord, la liste des protocoles pour lesquels cet équilibre apparaît et pour lesquels il y a tentative de dépassement, que cette tentative échoue ou réussisse :

6-11;04 6-11;11-2 5-11;06 5-12;01 5-12;09-2 5-13;00
5-13;03 5-13;05 5-13;08 5-14;01 5-14;00-1

Il ressort de l'analyse de ces protocoles que l'équilibre de la conservation des pentes est perturbé, c'est-à-dire qu'il se crée un déséquilibre, lorsque l'élève introduit des nouvelles contraintes pour la recherche du triangle.

Ces contraintes perturbatrices de l'équilibre sont de trois sortes :

a - celles qui proviennent de la recherche du plus grand triangle et conduisent l'élève à utiliser la diagonale, ou à placer les sommets du triangle cherché sur les côtés du rectangle.

b - celles qui émanent du souci de mesurer, notamment de construire des segments de mesures données, et qui conduisent l'élève à chercher un triangle double, pseudo-proportionnel, ou proportionnel.

c - celles qui résultent de la décision prise par l'élève d'utiliser les angles; il introduit alors la conservation des angles et reproduit aussi des angles de mesure donnée.

Analysons le protocole 5-12;09-2 de l'élève LIE, où de façon très nette apparaissent l'équilibre de la conservation des pentes et un déséquilibre.

Dès la première minute, LIE trace le triangle représenté par la figure 112 ci-dessous, elle essaie de respecter les pentes. Elle constate d'ailleurs que "c'est pas assez penché", et elle parle alors du petit côté du triangle qu'elle vient de dessiner :

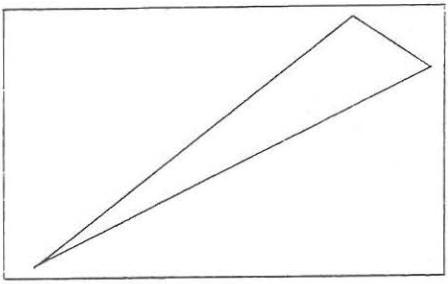


Figure 112

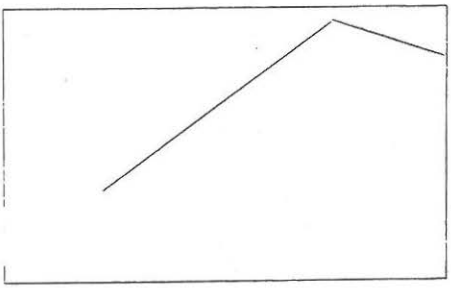


Figure 113

elle réalise donc un deuxième dessin, représenté par la figure 113 ci-dessus, où la pente du petit côté est parfaitement conservée. Ce qui nous fait dire que l'équilibre de la conservation des pentes est net.

Dès ce deuxième dessin, elle envisage de construire un triangle double. Elle réussit avec son cinquième dessin que nous représentons par la figure 114, à tracer un triangle double du triangle donné T.

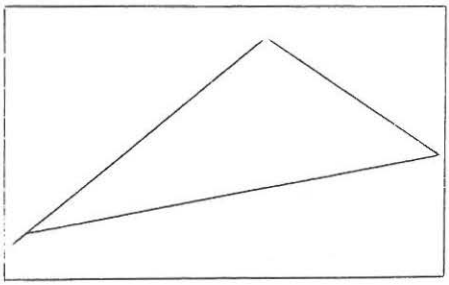


Figure 114

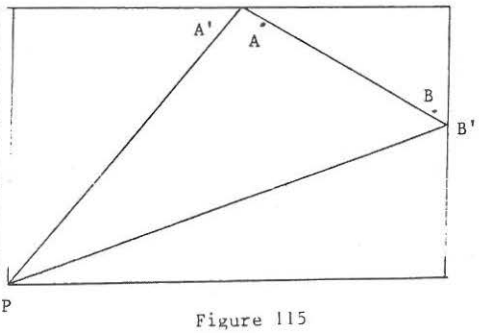


Figure 115

Par la suite, afin d'agrandir ce dernier triangle, LIE utilise les pseudo-proportions et construit encore deux autres triangles en se donnant les mesures des côtés qu'elle veut tracer. Notamment, dans son 6ème dessin représenté par la figure 115 ci-dessus, ayant choisi tout d'abord un triangle PAB et constatant qu'il manque 2cm au segment AB, elle décide, pour le rallonger, de choisir les points A' et B'. Et nous pouvons constater que A'B' a, en valeur absolue, une pente plus grande que la pente AB. Mais alors elle trouve que ce triangle PA'B' n'est pas le même que T, en effet, elle déclare :
- Non, parce que celui-là (A'B') n'est pas assez penché.
Elle ajoute que :
- le grand côté doit être monté à ce niveau.
Elle veut dire par là que le point B' doit être un peu plus haut, donc que les pentes des côtés PB' et A'B' correspondent un peu mieux aux pentes du grand et du petit côté de T.

La recherche d'un triangle double ou pseudo-proportionnel, qui introduit certaines mesures de longueurs, est donc une nouvelle contrainte qui perturbe l'équilibre de la conservation des pentes. On peut dire encore que l'élève ressent une contradiction à vouloir conserver les pentes d'une part, et à vouloir construire le plus grand triangle possible respectant certaines mesures d'autre part.

Nous voyons donc apparaître un déséquilibre très net de l'équilibre de la conservation des pentes.
Ce déséquilibre n'est pas très loin d'atteindre un dépassement. En effet, à la 35ème minute, devant le blocage de l'élève, l'expérimentateur pose la question suivante :
- Ton grand triangle et le triangle T ont à peu près la même position, peux-tu donner à ton triangle d'autres positions ? Est-ce qu'on peut en le tournant le rendre encore plus grand ?

LIE réalise alors, en utilisant les pseudo-proportions, et en prenant la diagonale comme grand côté de son triangle, ses deux derniers dessins représentés par la figure 116 ci-dessous :

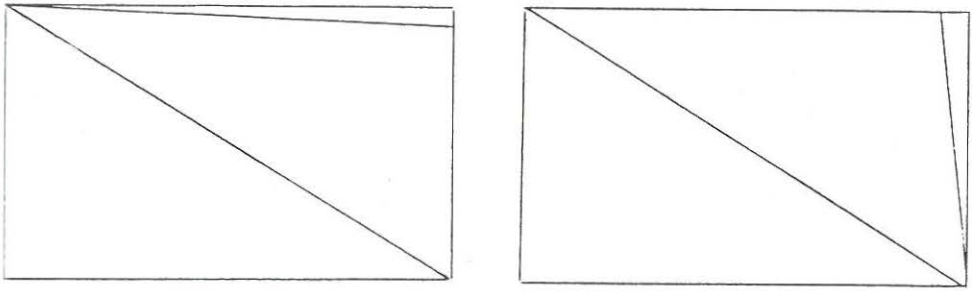


Figure 116

Dans ces deux dessins, nous trouvons l'équilibre de l'horizontale et de la verticale, et l'équilibre de la conservation des pentes semble abandonné. Nous n'en concluons pas que le dépassement de ce dernier équilibre est net à cause de la forte intervention de l'expérimentateur, mais nous voyons apparaître sans conteste l'ébauche de ce dépassement.

Comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, l'équilibre de la conservation des pentes est qualitatif, aucune mesure n'est associée à ces pentes. Nous venons de voir avec LIE que le déséquilibre provient de l'introduction d'éléments quantitatifs que sont les mesures de longueurs.

Cette dualité du qualitatif et du quantitatif correspondant à la dualité de l'équilibre de la conservation des pentes et de son déséquilibre est particulièrement explicite chez CAT dont le protocole 5-13;00 se trouve dans la partie F. En effet, CAT pendant le premier quart d'heure cherche des triangles conservant les pentes ce qui donne, entre autre, la figure 117 représentée ci-après, très comparable au triangle T tel que nous l'avons représenté à la figure 102.

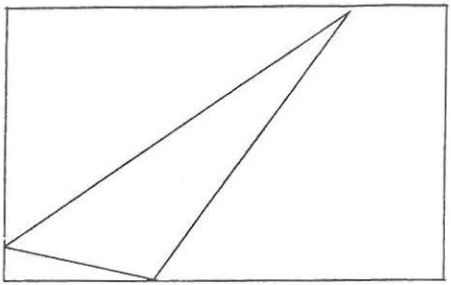


Figure 117

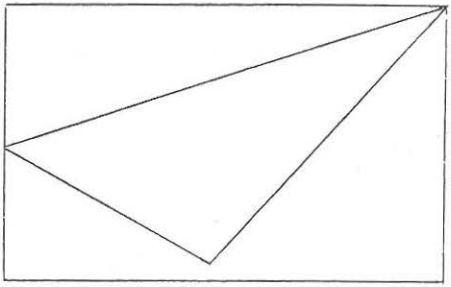


Figure 118

CAT cherche ensuite à construire des triangles doubles, proportionnels ou pseudo-proportionnels en utilisant des mesures. C'est ainsi qu'elle réalise un triangle proportionnel, avec $2 + \frac{1}{4}$ comme échelle, que nous représentons à la figure 118 ci-dessus.

Mais des difficultés et des échecs avec les mesures et les calculs lui font choisir préférentiellement des triangles tracés au coup d'oeil, et conservant les pentes. C'est ainsi que nous obtenons le dialogue suivant :

CAT - Il vaut mieux faire des traits sans les mesurer.

...

EXPERIMENTATEUR - Qu'est-ce qui serait le mieux ?

CAT - De ne pas mesurer ... de mesurer seulement un côté et les deux autres de les faire un plus petit, un plus grand et sans les mesurer.

EXP - Tu penses que les premiers que tu as dessinés sont mieux que les derniers ?

CAT - Oui.

CAT - J'essaie d'imaginer le plus grand. Il vaut mieux voir sur le papier, pas les mesurer; pas au pif, mais faire comme on le voit sur le modèle.

EXP - Qu'est-ce que ça veut dire comme on voit sur le modèle ?

CAT - Ben, dans le même sens.

Ces explications de CAT montrent bien la force de l'équilibre de la conservation des pentes.

Mais le déséquilibre est là puisqu'à la fin de sa recherche, CAT ne sait pas choisir entre la solution représentée par la figure 118 où le triangle est proportionnel à T et le dernier triangle tracé que nous représentons par la figure 119 où la conservation des pentes a joué de façon privilégiée.

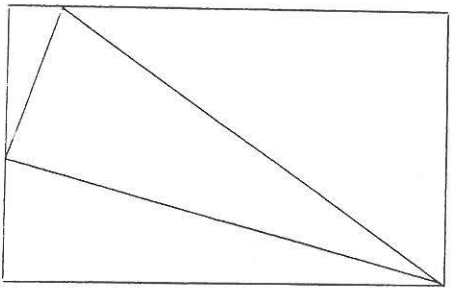


Figure 119

Pour résumer l'analyse de ces deux protocoles, nous disons que la mesure des longueurs et donc le point de vue quantitatif, est un élément important pour dépasser l'équilibre de la conservation des pentes. Un autre argument s'ajoute à cette affirmation. En effet, parmi tous les protocoles de nos élèves de 6ème, où règne l'équilibre de la conservation des pentes, seuls deux d'entre eux mettent en évidence la construction des longueurs de mesures données. Dans le premier protocole portant le numéro 6-11;07, COR se contente de doubler le petit côté du triangle, ce qui ne perturbe pas son équilibre; dans le deuxième 6-11;04, l'équilibre de la conservation des pentes est dépassé.

Une autre contrainte perturbe l'équilibre de la conservation des pentes; il s'agit de la conservation des angles. Pour comprendre comment apparaît ce déséquilibre, nous renvoyons à l'analyse du protocole 6-11;11-2 (pages 214 et 215). Nous estimons, de façon générale, que la volonté de construire un angle égal à un angle donné et cela de façon rigoureuse, soit par mesure d'angle,

soit par parallèlisme précis, soit par décalquage, oblige l'élève à perdre de vue la conservation des pentes, qui, répétons le, n'est que qualitative et donc globale.
D'une manière plus générale encore, l'acquisition de la notion d'angle et les deux équilibres qui ont été étudiés jusqu'ici nous paraissent très liés; nous examinons cette liaison au cours du paragraphe 10, page 224.

9. EQUILIBRES ET DEPASSEMENTS

Nous différencions dans nos analyses ce qui est du domaine des processus, et ce qui est du domaine des notions mathématiques. Dans ce paragraphe, nous allons présenter le processus associé à l'équilibre et à son dépassement.

Commençons par analyser le protocole 3-14;00-1 de MAP, qu'on trouve dans la partie F. Une première analyse soucieuse de s'adapter à la chronologie nous permet de découper la recherche de MAP en 4 phases. Dans une première phase correspondant au dessin représenté par la figure 120 ci-dessous, l'élève s'appuie sur l'équilibre de la conservation des pentes.

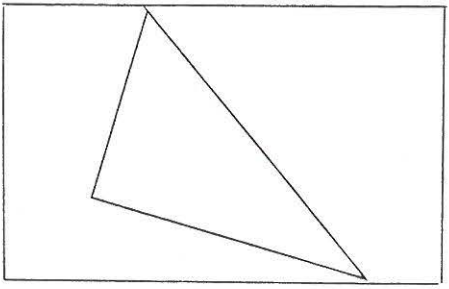


Figure 120

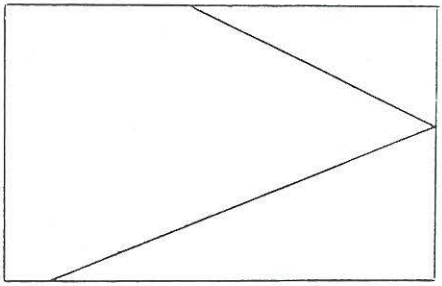


Figure 121

Dans une deuxième phase, où nous trouvons trois dessins, l'équilibre de la conservation des pentes est dépassé grâce à l'introduction de la

conservation des angles, à la mesure de ces angles et à la recherche d'un triangle dont les sommets sont sur les côtés du rectangle.
Durant cette phase, MAP construit notamment la figure 121 représentée ci-avant.
Dans une troisième phase, c'est l'équilibre de la verticale et de l'horizontale qui est utilisé.
Deux dessins sont réalisés durant cette phase.
La figure 122 ci-dessous reproduit un de ces deux dessins.

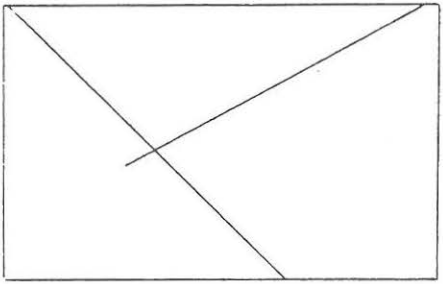


Figure 122

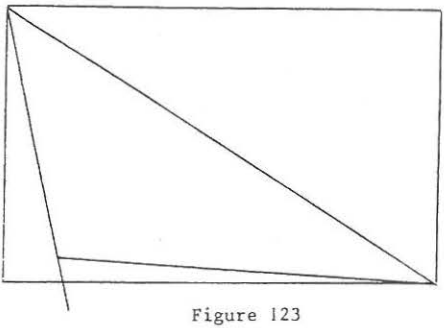


Figure 123

Dans une quatrième phase, c'est l'équilibre de l'horizontale et de la verticale qui est dépassé.
Grâce à l'utilisation de la diagonale, des angles et des proportions, MAP obtient la solution avec le dessin que nous représentons par la figure 123 ci-dessus.

Les analyses faites jusque là montrent que la notion d'équilibre est rattachée à un processus dont les deux phases principales sont :

Equilibre et *Dépassement*

Si nous voulons détailler encore plus ce processus, nous le découpons en quatre parties consécutives :

Equilibre , *Déséquilibre* , *Dépassement* , *Nouvel Equilibre.*

Bien entendu, la description théorique du processus lié à l'équilibre que nous venons de donner ne se retrouve pas telle quelle dans le déroulement chronologique de la recherche d'un élève. Même pour MAP,

où il semble y avoir une correspondance remarquable, le dépassement très bien maîtrisé de l'équilibre de l'horizontale et de la verticale montre que cet équilibre doit être dominé avant qu'il apparaisse à nos yeux objectivement. De fait, la deuxième phase de la recherche de MAP correspond, elle aussi, à un dépassement de l'équilibre de l'horizontale et de la verticale, comme nous l'avons dit lors de l'étude de la stabilité (page 206 et 207). Les éléments objectifs de l'équilibre peuvent donc apparaître[1] chronologiquement après les éléments objectifs dus au dépassement. Il peut se faire aussi que l'équilibre, le déséquilibre et le dépassement soient inextricablement mêlés dans un contexte, qui est de surcroît, peu explicite; dans ces conditions, il est impossible de retrouver le processus lié à l'équilibre dans le déroulement chronologique de la recherche de l'élève.

10. EQUILIBRES ET ANGLES

Comme nous nous attachons aussi à comprendre comment se développe chez l'élève la notion d'angle, nous allons montrer que les deux équilibres que nous avons mis en évidence sont très liés à la notion d'angle.

Nous remarquons en premier lieu que l'équilibre de la conservation des pentes, très fort dans une classe de sixième et encore net chez six de nos élèves de cinquième, implique dans notre logique d'expérimentateur, la conservation des directions, donc des angles. Nous pensons que l'équilibre de la conservation des pentes est, dans une première période, une approche du concept d'angle chez l'élève. Durant cette première période, d'ailleurs, la mesure des angles est inexistante.

Dans une deuxième période, la notion d'angle a des difficultés à se dégager de la notion de pente.

En effet, nous constatons qu'un certain nombre d'élèves désirant construire un angle de mesure donnée, construisent de fait une demi-droite faisant un angle avec l'horizontale ou la verticale, c'est-à-dire avec une longueur ou une largeur du rectangle R.

Nous rencontrons une telle attitude dans les huit protocoles suivants :

5-11;05 5-12;04 5-12;09-3 5-13;05 5-14;01 4-13;02-1 4-14;01-2 3-14;00-1

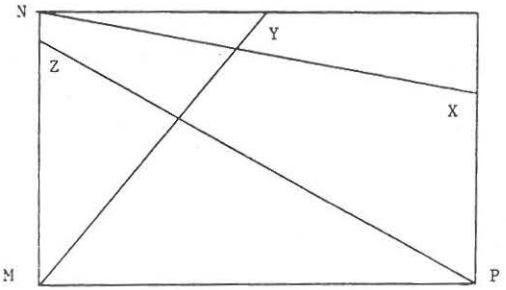


Figure 124

C'est ainsi que LEG, (4-13;02-1), dès le début de sa recherche, voulant construire son triangle et tracer les angles de ce triangle, construit une demi-droite NX faisant avec la largeur du rectangle un angle qu'il veut égal au grand angle de T; il construit ensuite une demi-droite MY faisant avec cette même largeur un angle qu'il veut égal à l'angle moyen de T; et enfin; pour lui, la demi-droite PZ fait avec la longueur inférieure du rectangle un angle égal au petit angle T (cf. figure 124). Nous trouvons là une notion d'angle et de mesure d'angle perturbée par la prégnance des angles dont un côté est horizontal ou vertical, nous disons que la notion d'angle est perturbée par la notion de pente.

Dans une troisième période, les angles se forment grâce à l'équilibre de l'horizontale et de la verticale.

C'est ainsi que dans le protocole 5-12;01, l'élève après avoir réalisé le triangle représenté sur la figure 125 ci- après, constate que le grand angle de son triangle mesure 102° alors que le grand angle de T mesure 105°.

Elle veut donc corriger son dessin, pour cela elle réalise la figure 126. Elle trace la diagonale, elle ne mesure pas les côtés;

préoccupée par le traçage de l'angle de 105°, elle construit cet angle en plaçant un de ses côtés sur la longueur inférieure du rectangle.

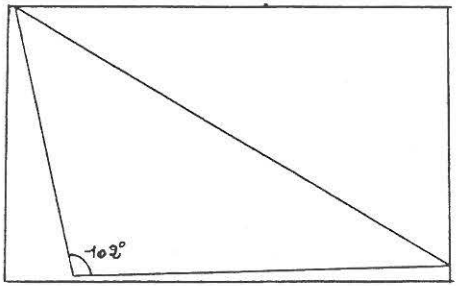


Figure 125

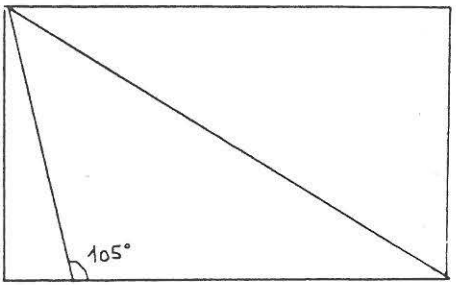


Figure 126

Pour confirmer le rôle de l'équilibre de l'horizontale et de la verticale dans la formation de la notion d'angle, nous examinons, parmi tous nos élèves de quatrième, les 10 pour lesquels il y a une nette conservation des angles. Nous constatons alors que 9 d'entre eux ont accédé à l'équilibre de l'horizontale et de la verticale; le dixième, correspondant au protocole 4-13;04-2, a largement dépassé cet équilibre.

Pour compléter la description en trois périodes que nous avons donnée de la coordination entre les deux équilibres étudiés en ce chapitre et la notion d'angle, examinons de façon globale la classe de cinquième.

Si nous laissons de côté, parmi nos élèves de cinquième, les deux élèves présentés dans les protocoles 5-11;06 et 5-13;08 qui n'utilisent pas de mesures d'angles mais des longueurs et même des hauteurs pour chercher leur problème, nous rencontrons trois sortes d'élèves.

Tout d'abord, ceux qui en sont à l'équilibre de la conservation des pentes avec dépassement plus ou moins avancé, mais qui n'introduisent pas d'angles; ils correspondent aux trois protocoles : 5-12;09-2 5-13;00 5-13;03.

Ensuite, ceux pour lesquels les pentes interfèrent avec les angles, en créant d'ailleurs des perturbations; ils correspondent aux cinq protocoles :

5-11;05 5-12;04 5-12;09-3 5-13;05 5-14;01.

Ceux enfin qui introduisent les angles en plaçant un côté de l'angle horizontal, ils associent donc les angles à l'équilibre de l'horizontale et de la verticale; ils correspondent aux deux protocoles :

5-12;01 et 5-12;10.

Quant à nos deux derniers élèves de cinquième, ils maîtrisent les angles et ont dépassé l'équilibre de l'horizontale et de la verticale; ils correspondent aux protocoles 5-12;06 et 5-12;09-1.

Nous retrouvons donc les trois périodes présentées plus haut : tout d'abord, la domination des pentes, ensuite les interférences conflictuelles entre angles et pentes, enfin l'installation des angles associés à l'équilibre de la verticale et de l'horizontale. Avec bien entendu une quatrième période où la notion d'angle bien maîtrisée se dégage de l'équilibre de la verticale et de l'horizontale.

oooOOooo

- CHAPITRE XIV -

LES CONTRADICTIONS

1. LES CONTRADICTIONS OBSERVEES : C.O.

Certains processus élémentaires peuvent se décrire comme suit :
l'élève envisage de dessiner une figure satisfaisant à des contraintes qu'il se donne; il réalise alors une figure; il l'observe et constate qu'une des contraintes qu'il a prévue n'est pas respectée; il rejette alors cette figure.

Donnons un exemple d'un tel processus.

Nous prenons cet exemple dans le protocole 4-15;08 de JIS. JIS vient de réaliser la figure 127 représentée ci-après: dans cette figure les côtés du triangle ABC ont pour mesure en centimètres :
AB = 2 x 4 + 2,5 = 10,5 ; AC = 2 x 6 + 2,5 = 14,5 ; CB = 2 x 8 + 2,5 = 18,5.

Nous avons donc là un triangle pseudo-proportionnel au triangle T donné. Le côté AB est égal à une largeur du rectangle.

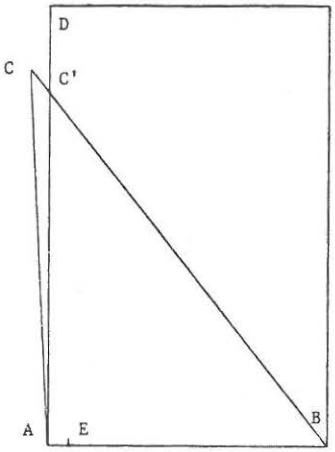


Figure 127

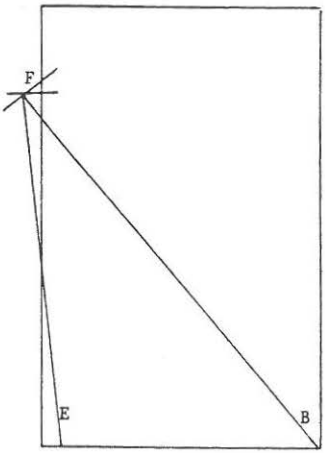


Figure 128

C'est alors que commence le processus élémentaire que nous voulons décrire. JIS mesure CC' la distance de C à la longueur AD du rectangle, "pour voir, dit-il de combien ça sort". Il décide alors d'enlever "ça" ; c'est-à-dire qu'il décide de prendre un nouveau point E sur la largeur AB du rectangle tel que AE = CC' et de reconstruire, en utilisant la pseudo-proportionnalité comme précédemment, un nouveau triangle BEF dont le petit côté sera BE. Selon lui, le triangle BEF se trouvera alors à l'intérieur du rectangle. Il calcule ses longueurs des deux côtés de son nouveau triangle BEF; puisque BE = 10,5 - 0,8 , il prend EF = 14,5 - 0,8 = 13,7 et BF = 18,5 - 0,8 = 17,7 ; il trace alors le triangle BEF que nous représentons sur la figure 128 ci-dessus.

Le tracé étant terminé, c'est avec une réelle surprise que JIS constate que le sommet F est encore à l'extérieur du rectangle.

JIS - Je ne comprends pas.

Là, je suis un peu perdu.

Je pensais qu'il rentrerait vers la droite mais il est redescendu vers le bas.

Dans le cas d'un tel processus élémentaire, nous nous trouvons en présence d'une contradiction chez l'élève entre une prévision ou une anticipation de l'élève et un fait infirmant cette prévision.

Nous disons qu'il s'agit là *d'une contradiction observée* par l'élève, ou plus brièvement d'une contradiction observée, que nous notons au moyen de deux lettres C.O.

Mais le déroulement d'un processus élémentaire conduisant à une C.O. est rarement aussi clair.

Nous allons donc donner un sens un peu plus général à la notion de C.O.

Tout d'abord, la contrainte que veut respecter l'élève peut provenir d'une anticipation implicite; cette contrainte peut aussi prendre naissance au cours d'un processus élémentaire et même n'apparaître qu'après la réalisation de la figure.

Comme exemple, examinons le début du protocole 3-13;10.

L'élève trace une diagonale du rectangle puis déclare :

- Je vais mettre le côté le plus grand du triangle sur la diagonale.

Nous représentons le dessin qu'elle est en train de réaliser par la figure 129 ci-dessous.

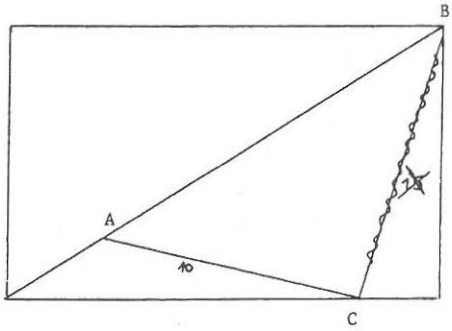


Figure 129

Comme la diagonale mesure 20 cm et que le grand côté du triangle proposé T mesure 8 cm, elle associe 10 cm aux 4 cm du petit côté de T, et 15 cm au côté moyen de T. Par tâtonnement, elle trace le segment AC de 10 cm; elle trace ensuite BC et marque le nombre 15 à côté de ce segment.

Elle mesure alors BC; il ne mesure pas 15 cm; elle est déçue ; elle barre le segment BC et le nombre 15.

Nous avons là une réalisation qui n'a pas été anticipée explicitement dans sa totalité; mais les étapes de sa réalisation montrent que l'élève se contraint, entre autres, à tracer un triangle dont le grand côté est porté par la diagonale et dont les dimensions sont, en centimètres, 20, 15 et 10. L'élève refuse ensuite le côté BC du triangle qu'elle vient de tracer, car BC ne mesure pas 15 cm. Elle constate aussi un peu plus tard que AB est différent de 20.

ELEVE - Je suis bête ! Mais non !

Le triangle est donc refusé.

Dans cet exemple, la contrainte entrainant le refus de la réalisation est vraisemblablement une anticipation implicite puisque l'élève commence par calculer les mesures des trois côtés du triangle avant de réaliser ce triangle mais on pourrait aussi admettre que cette contrainte apparaît en cours de réalisation puisque la diagonale devant servir de grand côté pour le triangle, est tracée avant que ne soient effectués les calculs. Dans tous les cas, on peut affirmer que la réalisation de l'élève ne satisfait pas à des contraintes qu'elle veut respecter et que dans ces conditions l'élève refuse cette réalisation. Nous avons là aussi ce que nous appelons C.O.

Une autre situation peut encore se présenter. L'élève refuse la réalisation avant même que cette dernière soit achevée.

C'est ainsi que EDW (protocole numéro 3-14;11) termine un processus élémentaire en ayant obtenu le triangle AEF semblable à T dans une similitude de rapport 2,25. Nous avons représenté ce triangle à la figure 130 ci-dessous.

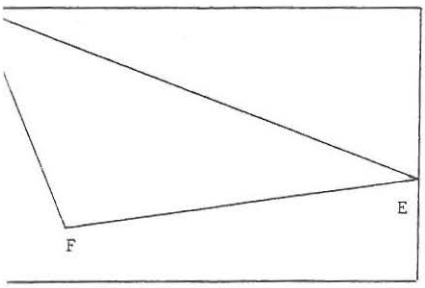


Figure 130

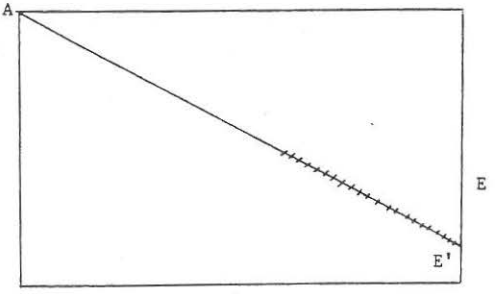


Figure 131

Alors un nouveau processus élémentaire commence. EDW envisage de tracer un triangle dont le grand côté sera AE' avec AE' = 19 cm ; E' doit être sur la largeur droite du rectangle R ; E' est au dessous de E puisque AE = 18 cm. Son triangle AE'F' doit être semblable à T avec maintenant le rapport $\frac{19}{8} > 2{,}25$.
A peine a-t-elle tracé le segment AE', qu'elle le barre comme l'indique son dessin représenté à la figure 131 ci-avant, car elle veut agrandir davantage. Elle indique d'ailleurs quelques secondes après que c'est la diagonale qu'il faut choisir.
Nous avons encore affaire à une C.O. avec un rejet de la réalisation du triangle AE'F', qui ne satisfait pas à la contrainte d'être le plus grand triangle. Le rejet est effectué avant que ne s'achève la réalisation.

Les deux variantes que nous venons de présenter dans la définition d'une C.O. -la première montrant que la contrainte peut apparaître à différents moments du processus élémentaire, la seconde montrant que la réalisation peut être inachevée lors du rejet- nous amènent à donner d'une C.O. la définition suivante :

Si, durant un processus élémentaire, l'élève, après sa réalisation ou au cours de sa réalisation, exprime le rejet de cette réalisation parce qu'elle ne satisfait pas à une ou plusieurs contraintes qu'il veut respecter, nous sommes en présence d'une contradiction observée.

Cherchons maintenant à savoir avec quelle fréquence se présentent les C.O. Nous avons, pour cela, compté le nombre de feuilles de l'élève où se trouve le rectangle R et où l'élève a tracé ou ébauché un dessin. Chaque feuille correspond à un ou plusieurs processus élémentaires ; nous avons compté les feuilles accompagnant au moins un processus élémentaire muni d'une C.O. Le rapport entre le nombre de feuilles avec C.O. et le nombre total de feuilles est en pourcentage d'environ 60 %.

Les feuilles qui ne s'accompagnent pas d'un processus élémentaire avec C.O. sont pour les deux tiers d'entre elles des feuilles donnant un processus satisfaisant l'élève; nous trouvons notamment parmi ces feuilles celles donnant un triangle solution; un tiers de cet ensemble de feuilles s'accompagne de processus insuffisamment explicites pour que nous puissions savoir s'ils débouchent ou non sur une C.O.

Nous pouvons aussi compter différemment. Par exemple, pour les protocoles qui s'y prêtent, c'est-à-dire pour plus d'un protocole sur deux, nous pouvons faire le quotient entre le nombre de processus élémentaires accompagnés d'une C.O. et le nombre total de processus élémentaires. Un tel quotient nous donne un pourcentage supérieur à 60 %. Compte-tenu qu'un certain nombre de feuilles s'accompagnent de processus insuffisamment explicites pour que nous puissions savoir s'il existe ou s'il n'existe pas de C.O. et compte-tenu du fait que ces feuilles ont été comptées sans C.O., nous pouvons estimer que dans notre problème SIM deux processus élémentaires sur trois débouchent sur une C.O.

Ajoutons encore qu'ayant fait nos énumérations classe par classe, nous n'avons pas relevé de différences significatives entre les classes. Il semble donc que la C.O. corresponde à un comportement bien établi pour tous nos élèves de l'enseignement secondaire.

Examinons maintenant plus attentivement les dix protocoles qui ne présentent aucune C.O. selon notre première méthode de calcul faisant intervenir le nombre de feuilles. Dans quatre de ces protocoles, nous trouvons un processus conduisant rapidement et avec beaucoup de maîtrise à la solution.

Dans deux autres protocoles, nous ne trouvons qu'un nombre très restreint de contraintes, non contradictoires entre elles. Deux élèves effacent toute C.O. en faisant intervenir l'approximation. Un élève de sixième fourni un travail extrêmement qualitatif et les C.O. n'apparaissent qu'en fin de recherche lorsqu'il en vient à comparer ses 10 dessins, à la demande de l'expérimentateur. Notre dixième élève, un élève de terminale, est à la recherche d'une méthode; les processus élémentaires ne sont qu'ébauchés; son dessin est fait à main levée; il n'exploite pas d'observable; c'est le seul élève ayant dessiné uniquement à main levée.

2. LES CONTRAINTES ; LES CHAMPS DE CONTRAINTES

Nous avons déjà présenté, lors de l'étude des angles et des proportions, des élèves qui se donnent des contraintes.
Par exemple, lorsque l'élève veut obtenir un triangle T" dont tous les angles doivent être égaux aux angles correspondants de T, il introduit ainsi une contrainte. Autre exemple de contraintes : l'élève ayant préalablement obtenu un triangle T', veut alors construire un triangle T" dont certains segments remarquables doivent être le double des segments remarquables correspondants de T'.
Rappelons qu'*une contrainte est une consigne que veut respecter l'élève dans la réalisation de sa construction géométrique*. Ajoutons que l'énoncé de cette consigne est dû à l'expérimentateur, car à ce sujet, l'élève est peu explicite.

La contrainte que respecte l'élève est, en général, la conséquence d'une proposition, explicite ou non, que l'élève admet.
C'est ainsi que le premier exemple de contrainte que nous avons donné correspondant à la proposition :

Si un triangle T" a ses angles égaux aux angles correspondants d'un triangle T' alors le triangle T" est semblable à T'.

Le deuxième exemple de contraintes que nous avons donné correspond à la proposition :

Si un triangle T" a certains segments remarquables doubles des segments remarquables correspondants d'un triangle T' alors le triangle T" est semblable à T'.

A chaque processus élémentaire est associé un ensemble de contraintes que se donne l'élève ; nous appelons cet ensemble de contrainte un champ de contraintes.

Notre premier objectif, dans l'analyse des protocoles, consiste à reconnaître le champ de contraintes associé à chaque processus élémentaire.

Prenons un exemple. Considérons le processus élémentaire associé au dessin d'ERI représenté à la figure 132 ci-dessous. (Protocole 5-12;04)

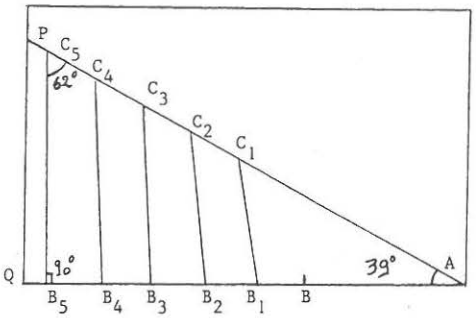


Figure 132

A la cinquième minute, ERI réalise la figure 132 . Il décalque tout d'abord le petit angle du triangle proposé dans le coin inférieur droit A du rectangle, en plaçant un côté de cet angle, celui correspondant au côté moyen du triangle, sur la longueur inférieure du rectangle.

ERI - J'ajoute deux centimètres aux côtés pour avoir la plus grande figure qui rentre.

Il construit ainsi l'angle $\widehat{QAP}$, puis, marque sur la longueur inférieure AQ, à environ 6,1 cm du coin inférieur droit A, un point B ; il construit ensuite un premier triangle AB_1C_1 avec AB_1 = 8 cm et AC_1 = 10 cm; ces deux deux côtés étant respectivement portés par les deux côtés de l'angle $\widehat{QAP}$.

Il construit successivement les triangles AB_2C_2, AB_3C_3, AB_4C_4, AB_5C_5, obtenus en allongeant chaque fois le grand côté et le côté moyen de 2 cm.

Il a construit ainsi cinq triangles et se déclare satisfait par le plus grand. A la dixième minute, l'expérimentateur lui demande :

- Peux-tu vérifier que c'est le même en plus grand ?

ERI - Il me faudrait un rapporteur.

ERI utilise alors correctement le rapporteur fourni par l'expérimentateur pour mesurer les angles du triangle AB_5C_5. Il note ces mesures sur sa figure 132. Il conclut que sa figure est fausse car elle comporte un angle droit.

Nous estimons que sur la totalité de ce processus le champ de contraintes est constitué par cinq contraintes :

(1) ERI veut un triangle dont le côté moyen soit porté par la longueur inférieure du rectangle donné R.

(2) ERI veut un triangle dont les angles soient égaux aux angles correspondants de T.

(3) ERI veut un triangle dont les côtés soient pseudo-proportionnels aux côtés correspondants de T.

(4) ERI veut un triangle qui soit contenu dans le rectangle R.

(5) ERI veut un triangle qui soit le plus grand possible.

Pour trouver le champ de contraintes associé à un processus élémentaire nous nous heurtons à deux sortes de difficultés. D'une part, ce champ de contraintes dépend de certaines décisions prises par l'expérimentateur, d'autre part, il dépend de l'attitude du sujet, c'est-à-dire de l'élève vis à vis de son propre champ de contraintes. Examinons plus en détails ces deux difficultés.

Avant de définir le champ de contraintes, l'expérimentateur doit délimiter le processus élémentaire qu'il prend en considération. En effet, une modification des limites du processus élémentaire modifie le champ de contraintes ; c'est ainsi que dans l'exemple précédent la contrainte (2) est modifiée si nous arrêtons le processus lorsque l'élève "se déclare satisfait par le plus grand". Elle devient alors :

(2') ERI veut un triangle dont le petit angle soit égal au petit angle de T.

Selon les choix et les buts de l'expérimentateur la définition d'une contrainte peut se présenter de façon différente. C'est ainsi que la contrainte (3) de notre exemple se présente d'une façon qui peut paraître plus juste sous la forme :

(3') ERI veut un triangle dont d'une part le grand côté est égal au grand côté de T auquel s'ajoute un nombre entier de fois 2 cm et dont, d'autre part, le côté moyen de T auquel s'ajoute le même nombre entier de fois 2 cm.

Si on s'en tient strictement au processus élémentaire décrit plus haut, (3') semble préférable. Si on veut une contrainte se présentant avec un certain degré de généralisation, (3) se justifie.

D'une manière générale, nous admettons qu'une contrainte est susceptible d'une certaine variation dûe aux choix de l'expérimentateur au moment de l'analyse.

Remarquons par ailleurs que les conséquences déduites d'un champ de contraintes peuvent dépendre ou ne pas dépendre de ces variations. C'est ainsi qu'il n'existe pas de triangles satisfaisant au champ de contraintes associé au processus élémentaire présenté ci-dessus; ce résultat est vrai pour le champ (1) (2) (3) (4) (5) aussi bien pour le champ (1) (2) (3') (4) (5).

Bien entendu, le champ de contraintes dépend aussi de l'élève. Tout d'abord, une contrainte peut ne pas apparaître, ni explicitement, ni implicitement, au cours de la recherche de l'élève, elle peut donc échapper totalement à l'analyse.

En second lieu, une contrainte insuffisamment explicite, parce qu'elle va de soi pour l'élève ou bien au contraire parce qu'il n'y a pas de prise de conscience de cette contrainte de la part de l'élève peut rendre problématique son existence.

Enfin, l'élève peut, au cours d'un même processus, modifier une contrainte ou encore faire fluctuer le champ de contraintes.

Ajoutons toutefois que malgré ces difficultés, la détermination du champ de contraintes associé à un processus élémentaire est assez aisée pour des protocoles suffisamment détaillés.

En ce qui concerne les protocoles du problème SIM, nous pouvons identifier de façon satisfaisante le champ de contraintes de trois processus élémentaires sur quatre.

Précisons encore que, dans la définition d'un champ de contraintes, nous tenons compte en général du processus élémentaire tout entier, et non de la seule anticipation, mais aussi de ce qu'a fait l'élève avant que n'apparaisse le processus élémentaire. C'est ainsi que si nous avons pu choisir chez ERI la containte (3) c'est parce que l'élève a utilisé auparavant la pseudo-proportionnalité, en ajoutant aux trois côtés du triangle d'autres nombres que des multiples de deux.

Nous dirons, pour résumer ce qui précède, que le champ de contraintes est un compromis entre la production objective de l'élève qui est composée, pour l'essentiel, des phrases qu'il prononce et des dessins qu'il réalise, et les modèles développés par l'expérimentateur.

Dans un premier paragraphe, nous nous sommes servis de la notion de contrainte pour définir les contradictions observées par l'élève; nous allons maintenant utiliser la notion de champ de contraintes pour continuer à analyser les contradictions, mais du point de vue de la logique de l'expérimentateur.

3. LES CONTRADICTIONS LOGIQUES : C.L.

Examinons le processus élémentaire suivi par ERI et décrit au paragraphe précédent à la page 237. Nous constatons immédiatement que le champ de contraintes lié à ce processus est logiquement contradictoire. En effet, il n'existe pas de triangle satisfaisant à la fois les cinq contraintes de ce champ. Nous disons qu'il y a là une contradiction logique.

D'une manière générale, *si, dans les limites d'un processus élémentaire, la réalisation géométrique devant satisfaire le champ de contraintes n'existe pas, nous disons qu'il y a contradiction logique*. Nous notons cette contradiction logique au moyen de l'abréviation C.L.

Pour savoir si la réalisation géométrique devant satisfaire le champ de contraintes est ou n'est pas possible, encore faut-il que ce champ de contraintes soit suffisamment précis. Or, nous rencontrons

des champs de contraintes qui sont très qualitatifs.

C'est ainsi, par exemple, que dans le protocole 6-11;11-2, au début de sa recherche, l'élève veut que sont triangle T' satisfasse aux contraintes suivantes :

(1) Les côtés de T' doivent avoir, par rapport aux bords de la feuille, à peu près les mêmes pentes que les côtés de T.

(2) Le petit côté de T' ne doit pas être trop petit par rapport au grand côté de T' ; une certaine proportion correspondant à celle du petit et grand côté de T doit être respectée.

(3) Le sommet du petit angle doit se trouver dans le coin supérieur gauche du rectangle R.

(4) Les sommets de T' doivent se trouver sur le bord du rectangle R.

Il réalise alors le triangle ABC que nous représentons sur la figure 133 ci-dessous.

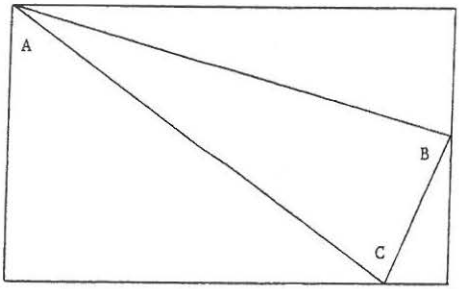


Figure 133

Nous disons que ce champ de contraintes est qualitatif car nous pouvons tracer bien des triangles sans pouvoir décider si les contraintes (1) et (2) sont ou ne sont pas satisfaites, donc sans pouvoir décider si le champ de contraintes (1) (2) (3) (4) est ou n'est pas satisfait.

Par définition, un champ de contrainte sera dit qualitatif s'il existe au moins une réalisation pour laquelle on ne peut pas décider si elle satisfait ou non le champ de contraintes.

De ce fait, nous ne pouvons en tirer aucune conclusion quant à l'existence d'une C.L. Par contre, remplaçons dans notre exemple la contrainte (1) par la contrainte (1') :

(1') Les côtés de T' doivent avoir, par rapport aux bords de la feuille, exactement les mêmes pentes que les côtés de T.
Alors le nouveau champ de contraintes constitué par (1') (2) (3) (4) est logiquement contradictoire, car les seules contraintes (1') (3) et (4) sont contradictoires entre elles.
Nos définitions, tant d'une C.L. que d'un champ de contraintes qualitatif impliquent que nous ne pouvons pas avoir, à la fois une C.L. et un champ de contraintes qualitatif.
Remarquons toutefois qu'un champ de contraintes peut contenir des contraintes qualitatives et être logiquement contradictoire; ce qui est le cas du champ de contraintes (1') (2) (3) et (4) précédemment décrit, qui contient pourtant la contrainte (2) très qualitative.

D'une manière générale, l'existence ou non d'une C.L. dépend du champ de contraintes qui peut être plus ou moins précis, plus ou moins variable; cette C.L. peut provenir d'une partie de ce champ; deux parties différentes du champ peuvent donner naissance à des C.L., nous pouvons alors parler de C.L. multiple.

Avant d'examiner ce qui nous paraît essentiel, à savoir les relations entre les C.O. et les C.L., donnons encore la définition d'une C.L. liée à un espace probabilisé.

Pour introduire le nouveau concept, considérons le protocole 3-14;10 entre la 18ème et la 27ème minute.

Au cours des minutes précédant la minute 18, l'élève vient de tracer le triangle A'B'C' représenté sur la figure 134 ci-dessous. Mais pour elle ce n'est pas le plus grand triangle possible.
Alors commence, à la 18ème minute, un nouveau processus élémentaire. L'élève veut tracer un triangle T' répondant au champ de contraintes suivant :

- le sommet du petit angle T' sera le coin inférieur gauche du rectangle donné R.
- le sommet de l'angle moyen sera choisi au hasard sur la largeur de R situé à droite.
- les angles de T' seront respectivement égaux à ceux de T; pour les obtenir, il sera fait usage du décalquage.

- T' sera le plus grand possible et sera contenu dans R, il faudra donc qu'il ait ses trois sommets sur le bord de R.

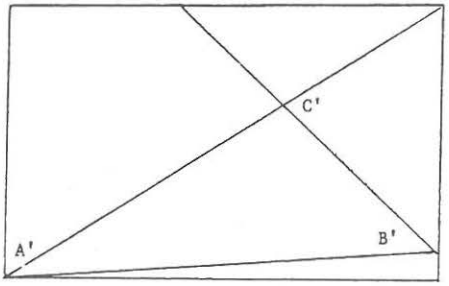


Figure 134

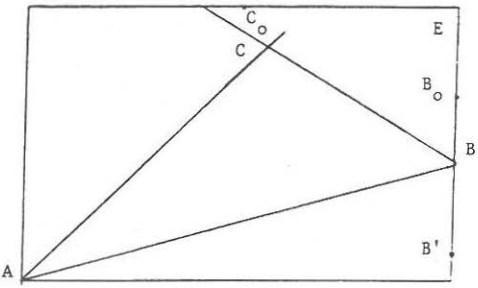


Figure 135

Elle trace effectivement le triangle ABC représenté sur la figure ci-dessus; pour cela, elle trace d'abord AB avec un point B dont la position n'a pas été choisie de façon précise, mais simplement au-dessus de B', le point de la figure 134, de sorte que AB soit plus grand que AB'.

On s'aperçoit donc que, si on munit le segment EB' des probabilités géométriques ou, plus généralement, d'un espace probabilisé continu, la probabilité pour qu'il existe un triangle T' répondant à son champ de contrainte est nulle. En effet, un seul point B_o de l'intervalle EB' donne un triangle AB_oC_o satisfaisant ce champ de contrainte. Nous dirons, en utilisant la terminologie de la théorie des probabilités que ce champ de contraintes présente une *contradiction logique presque sûre*[1]. *Nous écrivons de façon abrégée C.L.p.s.*

Nous constatons d'ailleurs que l'élève a conscience qu'elle va se heurter à cette C.L.p.s. car, dès le début du processus élémentaire, que nous venons d'analyser, elle déclare :

- ... Là y a beaucoup d'erreurs à faire.

et par la suite, après avoir réalisé d'autres triangles répondant au même champ de contraintes, elle déclare :

- Je crois qu'il y a un problème. Je peux pas tomber juste au hasard. C'est pas possible ou, alors, il faudrait vraiment que j'ai de la chance. Alors on doit pouvoir calculer sans avoir de la chance.

D'une manière plus générale, supposons qu'un champ de contraintes dépende d'une variable x, prenant ses valeurs dans sur un ensemble E que nous munissons d'une structure d'espace probabilisé. Si ce champ de contraintes est contradictoire pour toutes les valeurs de x appartenant à une partie F de E telle que la probabilité de F existe et soit égale à $p \in [0,1]$, alors nous avons affaire à une C.L. *de probabilité p*. Si $p = 1$, nous retrouvons une C.L.p.s. Dans nos expériences, ce sont le plus souvent les probabilités géométriques que nous faisons intervenir [1]. Cette notion de C.L. liée à un espace probabilisé est utile car l'élève se donne fréquemment des contraintes ayant un aspect aléatoire.

4. LIENS ENTRE C.O. ET C.L. LES CONTRADICTIONS ANALYSEES : C.A.

Nous distinguons d'une part la classe des C.O. provenant d'un défaut dans la réalisation de l'élève, d'autre part la classe des C.O. dues à une C.L. du champ de contraintes. Examinons un exemple de chacun des deux types de C.O.

Considérons tout d'abord le protocole 5-12;09-2. L'élève, LIE, veut construire, dans R, un triangle T' dont les côtés sont le double de ceux de T. Elle réalise pour cela la figure 136 ci-après. Elle trace, tout d'abord, un segment BC de 16 cm. Elle place ensuite le point A à 12 cm de C. LIE trace alors les segments AC et AB. Mais le segment AB ne lui plaît pas, car ce n'est pas le double du petit côté de T. LIE a donc obtenu une réalisation qui ne respecte pas son champ de contraintes composé des deux contraintes :

- obtenir un triangle T' double de T.
- obtenir un triangle T' contenu dans R.

Remarquons encore que ce champ de contraintes n'est pas contradictoire. Nous avons là une C.O. provenant d'un défaut dans la réalisation de l'élève.

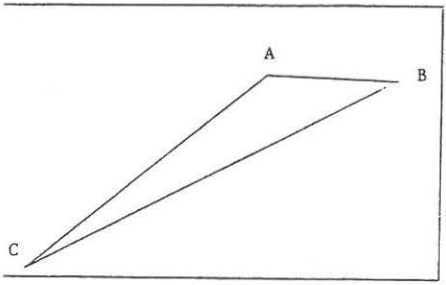


Figure 136

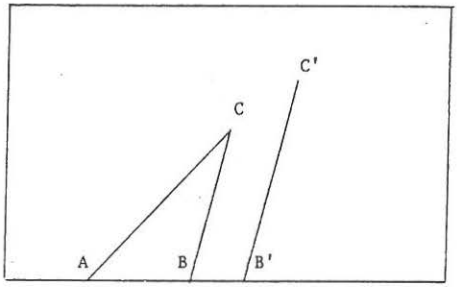


Figure 137

Considérons maintenant le protocole 3-14;03-1. Pour obtenir sa deuxième réalisation que nous représentons sur la figure 137 ci-dessus, l'élève dessine tout d'abord le triangle ABC égal au triangle donné T, le petit côté AB étant porté par la longueur inférieure du rectangle. Puis, elle décide de tracer un triangle AB'C' avec AB' = 6 cm, et B'C' = 8 cm ; elle veut de plus que B'C' soit parallèle à BC. Elle se donne donc le champ de contraintes suivant :

- les côtés du triangle cherché doivent avoir 2 cm de plus que les côtés correspondants de T.
- les deux plus petits côtés de AB'C' doivent être parallèles à ceux de ABC.
- AB'C' comme ABC doivent avoir leurs petits côtés portés par la longueur inférieure du rectangle R.

Le champ de contraintes est logiquement contradictoire car un triangle pseudo-proportionnel à T ne peut pas conserver les angles de T en général et en aucun cas ne peut conserver le grand angle[1] ; nous avons donc bien une C.L.

Après avoir tracé le segment B'C', l'élève constate que le troisième côté AC' "ça ne marche pas"; il ne mesure pas 10 cm (= 8 cm + 2 cm) et il n'est pas confondu avec AC. Nous avons donc une C.O. Cette contradiction observée par l'élève est due à la C.L. de son champ de contraintes.

Dans ce chapitre XIV consacré aux contradictions, nous attachons moins d'importance au premier type de C.O., ce type de contradiction qui provient d'un défaut dans la réalisation. Cette réalisation qui ne respecte pas une contrainte que s'est donnée l'élève, apparaît notamment lorsqu'une contrainte qualitative l'amène à modifier sa construction en cours de réalisation. Ces C.O. sont aussi dues à des erreurs de mesure ou de calcul, à des difficultés dans l'usage des instruments, à des insuffisances techniques. Il faut cependant prendre garde que derrière les insuffisances techniques peuvent se cacher des lacunes conceptuelles. C'est ainsi que la construction de LIE, donnée au début de ce paragraphe, peut cacher des carences portant sur les cas d'égalité des triangles, en l'occurence, le troisième cas d'égalité.

Nous allons examiner plus attentivement les C.O. dues à une C.L. du champ de contraintes, à la fois pour mieux comprendre les processus de résolution de problème, et pour mieux dégager les concepts mathématiques utilisés par les élèves et la manière dont ils les coordonnent.

Considérons tout d'abord les dix premières minutes du protocole 4-13;04-2. L'élève commence par mesurer les dimensions de T, il les double et obtient 16 cm, 8 cm, 12 cm. Il déclare alors :
- Je vais voir si je peux doubler les dimensions.
Il déplace le double décimètre dans le rectangle et dit :
- Je crois qu'en mettant le côté le plus long en biais je peux faire un trait de 18 cm.
L'élève commence alors le dessin que nous représentons sur la figure 138 ci-après.

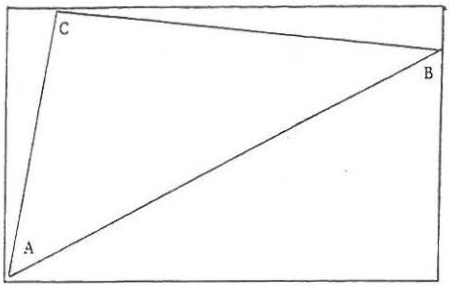


Figure 138

A partir d'un sommet A, l'élève trace un segment AB de 18,5 cm.
- Faut-il faire un triangle qui soit proportionnel à celui-là, dit-il, en désignant ainsi le triangle donné T.
L'expérimentateur évite de répondre.
L'élève écrit : $18\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$
Il explique que ces nombres sont obtenus en doublant et en ajoutant 2,5.
Le triangle ABC est terminé en plaçant C tel que AC = 10,5 cm et BC = 14,5 cm. L'élève mesure au rapporteur les angles de T et note 29°, 47° et 105°. Puis il mesure les angles du triangle ABC qu'il vient d'obtenir. Il obtient 34°, 51°, 95°. Il déclare alors :
- Je crois que ça ne va pas parce que j'ai doublé puis ajouté.
Ce processus élémentaire nous permet de mettre en évidence sans aucune ambigüité une C.O. puisque après avoir comparé les angles, l'élève déclare que "ça ne va pas", et une C.L. puisque la pseudo-proportionnalité est contradictoire avec la conservation des angles. Enfin, l'élève analyse parfaitement la cause de sa C.O. en accusant sans hésitation les pseudo-proportions, il maîtrise donc parfaitement la C.L.; nous disons que l'élève a analysé la contradiction ou encore que nous nous trouvons en présence d'une contradiction analysée.

D'une manière générale, *si au cours ou à la fin d'un processus élémentaire l'élève, après avoir mis en évidence une C.O., due à une C.L. du champ de contraintes, analyse cette contradiction comme provenant de son champ de contraintes contradictoire, nous disons que nous avons affaire à une contradiction analysée, notée C.A.*

Nous constatons toutefois que les C.A. ne se présentent pas toujours de façon aussi évidente. Ce sont souvent les processus élémentaires, succédant à celui durant lequel est apparue une C.A., qui confirment l'existence de cette C.A. C'est ce que nous observons avec le protocole 4-14;01-2.

En effet, à la 17ème minute, ayant placé le côté moyen de T parallèlement à la longueur du rectangle R, l'élève trace le segment BC parallèle au petit côté de T, dont l'extrêmité B est au coin supérieur gauche du rectangle R. Nous avons représenté sur la figure 139 ci-dessous le tracé de l'élève dans le rectangle R ainsi que la position du triangle T.

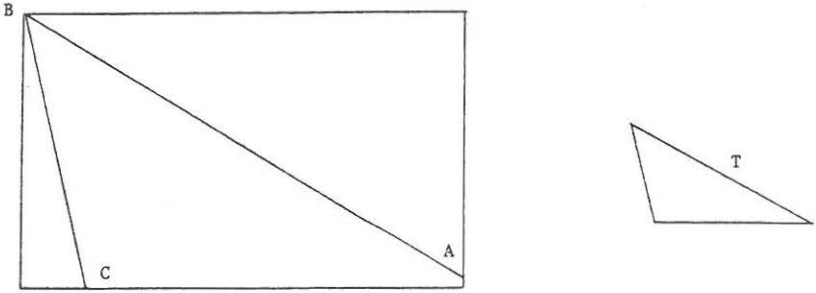


Figure 139

L'élève trace ensuite le segment BA parallèle au grand côté de T. L'expérimentateur lui fait observer ce qui se passe en A. L'élève déclare :

- Si je m'arrange pour que ça aille en A, alors ça n'ira plus en B.

L'élève compare par transparence, en superposant le triangle T au rectangle R, les angles de son triangle ABC aux angles correspondants du triangle T.

De la 22ème à la 26ème minute, l'élève essaie infructueusement de construire des angles dans R, mais elle s'embrouille, n'est pas satisfaite et abandonne.

A la 26ème minute, l'élève prolonge les côtés du triangle T comme l'indique la figure 140 ci-dessous, pour mieux reproduire les angles lors de la superposition des feuilles; elle passe alors à une nouvelle réalisation que nous présentons à la figure 141.

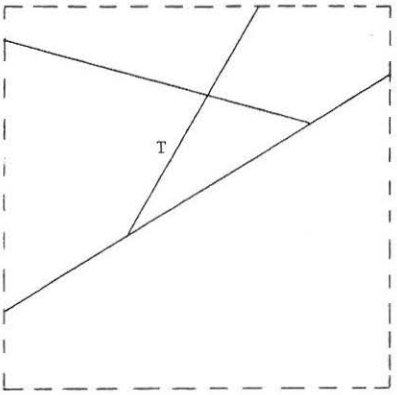


Figure 140

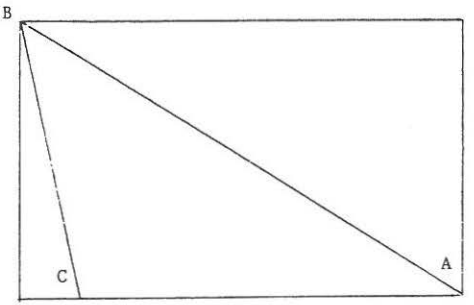


Figure 141

Après avoir tracé la diagonale AB, l'élève reproduit en B l'angle moyen de T en se servant de T comme d'un calque; elle obtient ainsi le segment BC.
Mais elle se trouve à nouveau devant la difficulté rencontrée lors de sa réalisation de la figure 139. L'angle $\widehat{BAC}$ est plus grand que le petit angle de T.

Dans chacun des deux processus élémentaires correspondants respectivement aux figures 139et 141 que nous venons de décrire, nous trouvons une C.O. Le champ de contraintes que se donne l'élève est le suivant :

(1) Elle veut construire un triangle T' dont le sommet de l'angle moyen soit au coin supérieur gauche de R.

(2) Elle veut un triangle T' ayant les mêmes angles que T.

(3) Elle veut que T' soit contenu dans R.

(4) Elle veut que T' ait son côté moyen porté par la longueur inférieure de R.

(5) Elle veut que le sommet du petit angle de T' soit le coin inférieur droit de R.

Ce champ de contraintes est contradictoire; nous avons donc une C.L. L'élève a pris conscience que la C.O. provient de cette C.L. comme le montre sa déclaration citée plus haut. Après la réalisation de la figure 141 elle précise qu'elle est obligée de raccourcir la diagonale, c'est-à-dire de placer le point B un peu plus haut en B' sur la largeur du rectangle, ceci afin d'avoir un angle égal au petit angle de T.

Elle réalise donc la figure 142 représentée ci-dessous :

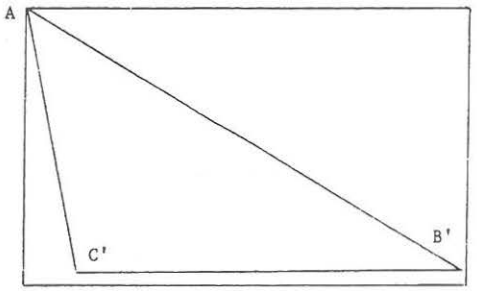


Figure 142

Elle a donc modifié son champ de contraintes et à la place de (4)et (5),

(4') Elle veut que T' ait son côté moyen parallèle à la longueur inférieure de R.

(5') Elle veut que le sommet du petit angle de T' soit sur la largeur du rectangle situé à gauche.

On peut dire alors, grâce au processus élémentaire associé à la figure 142 que la C.O. due à une C.L. que nous rencontrons dans les deux processus associés aux figures 139 et 141 s'accompagnent d'une C.A.

On peut remarquer qu'une C.A. débouche généralement sur une accommodation du champ de contraintes. Dans notre exemple précédent le champ de contraintes composé des contraintes (1) (2) (3) (4) (5) s'est accomodé pour devenir le nouveau champ de contraintes (1) (2) (3) (4') (5'). Réciproquement, nous devons être attentifs à une

accommodation d'un champ de contraintes contradictoire car si cette accommodation bénéficie d'une prise de conscience suffisante de la part de l'élève elle peut être l'indice d'une C.A., au moins implicite.

Les questions que nous nous posons à l'occasion de chaque processus élémentaire dont nous voulons faire une analyse dialectique sont :

Y a-t-il une C.O. ?

Y a-t-il une C.L. ?

Y a-t-il une C.A. ?

Il est bien rare que nous puissions répondre par oui ou par non à chacune de ces trois questions, car ces trois types de contradictions forment souvent un brouillamini difficile à démêler. C'est pourtant grâce à ces interrogations conçues comme trois pôles d'analyse que nous arrivons à cerner la situation. Dans le paragraphe suivant, nous essayons, grâce à cette méthode d'analyse, d'éclaircir certains processus élémentaires particulièrement confus.

5. ANALYSE DIALECTIQUE

Nous allons maintenant utiliser toutes les notions introduites dans les quatre paragraphes précédents pour analyser trois exemples. Ces exemples sont tirés des protocoles rédigés dans la partie F. Il est fortement souhaitable, pour regarder d'un oeil critique l'analyse qui suit, de lire les passages correspondant aux trois protocoles cités qui donnent un aspect plus descriptif du travail de l'élève.

Le premier exemple que nous examinons est constitué par les dix premières minutes de la recherche de MAR consignées dans le protocole 3-15;00.
MAR essaie de construire un triangle T'. Sa réalisation se trouve sur la figure 143ci-après. Cette réalisation veut se plier aux contraintes suivantes :

(1) Le grand côté de T' doit être la diagonale AB du rectangle R.

(2) Le petit côté de T' doit avoir une de ses extrémités en A et doit être porté par la largeur de R située à gauche.

(3) Le triangle T' doit être proportionnel au triangle T.

MAR calcule donc le petit côté de son triangle T', soit $\frac{19,5}{8} \times 4 = 9,75$, place le point C sur la largeur de R à 9,75 cm de A. Elle mesure CB et ne trouve pas les $\frac{19,5}{8} \times 6 = 14,625$ prévus.

Elle annonce donc :

- ça ne marchera pas.

Nous avons donc une C.O. et bien entendu aussi une C.L.

De plus, MAR, sans analyser cette C.L., voit bien d'où viennent les difficultés car elle ajoute :

- Il faut que je prenne l'écartement.

Elle cherche à résoudre cette contradiction dans l'introduction des angles.

Nous pouvons estimer qu'il s'agit là d'un début de C.A., mais l'analyse n'est pas facile à développer pour l'élève d'autant plus que la contrainte provenant de l'équilibre de l'horizontale et de la verticale ne bénéficie pas semble-t-il d'une prise de conscience nette.

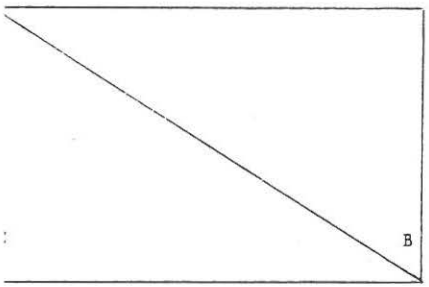


Figure 143

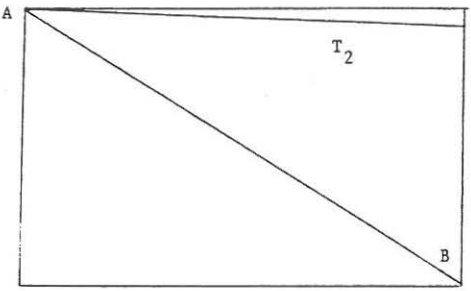


Figure 144

Le deuxième exemple est constitué par les deux processus élémentaires associés au dessin de la feuille n° 8 de LIE; ces deux processus sont décrits dans le protocole 5-12;09-2.

Au cours du premier processus, l'élève essaie de construire un triangle T_1 qui doit satisfaire aux contraintes suivantes :

(1) Le grand côté de T_1 doit être la diagonale du rectangle.

(2) Les côtés de T_1 doivent être pseudo-proportionnels à ceux de T, très exactement ils doivent être obtenus au moyen de la formule

2 x (côté de T) + 2 + 2

(3) Le triangle T_1 doit être contenu dans R.

(4) Le petit côté de T_1 doit être porté par la largeur du rectangle.

Ce processus élémentaire s'accompagne d'une C.O. Il est muni d'une C.L.

Cette C.L. est multiple, puisque (2) et (3) sont logiquement contradictoires, ainsi que (1) (2) et (4). Cette C.L. est partiellement analysée, puisque LIE observe que (3) et (4) sont contradictoires avec la contrainte suivante, impliquée par (2) :

(2") Le petit côté de T doit être égal à 2 x (4) + 2 + 2 = 12.

Nous avons donc une contradiction analysée.

Cette analyse partielle amène LIE à accomoder son champ de contraintes en modifiant (2).

Nous passons alors au deuxième processus élémentaire. Dans ce processus, l'élève essaie de construire un triangle T_2, dont la réalisation se trouve sur la figure 144 ci-dessus, et qui doit satisfaire les contraintes suivantes :

(1) Le grand côté de T_2 doit être égal à la diagonale AB du rectangle R.

(2') Les côtés de T_2 doivent être pseudo-proportionnels à ceux de T, très exactement ils doivent être obtenus au moyen de la formule :

2 x (côté de T) + 2 + 1

(3) Le triangle T_2 doit être contenu dans R.

(4) Le petit côté de T_2 doit être porté par la largeur du rectangle R.

(5) Le triangle T_2 doit être plus grand que les triangles précédemment obtenus.

(6) Le côté moyen de T_2 doit être penché comme l'est celui de T.

Remarquons tout d'abord que ce champ de contraintes n'est pas qualitatif bien que deux de ses contraintes soient très qualitatives. En effet, nous ne savons même pas si (6) préconise une conservation qualitative des angles ou une conservation qualitative des pentes, quoique tout ce qui précède dans ce protocole nous fasse plutôt opter pour la deuxième conservation. (5) est aussi une contrainte qualitative.

Nous constatons immédiatement que ce processus élémentaire s'accompagne d'une C.O. et d'une C.L. multiple. En effet, les contraintes (2') et (1) sont logiquement contradictoires, ainsi que (2') et (3) ou encore (2') et (4). Nous constatons ensuite que la réalisation, c'est-à-dire le triangle T_2 est bâti sur des erreurs de calcul ou d'appréciations numériques. Tout d'abord, LIE estime que le petit côté de T_2 doit mesurer 10 cm au lieu de 11 cm. Elle estime que le côté moyen de T_2 convient car il mesure (12 + 2 + 3) alors qu'elle devrait exiger (12 + 3) pour ce côté. Enfin elle ne tient pas compte du fait que la diagonale mesure 1 cm de plus que la longueur prévue par (2').

Par ces multiples défauts dans la réalisation, elle est arrivée à éliminer la C.L. Il ne lui reste plus qu'une C.O. due au coup d'oeil correspondant à la contrainte (6). En conséquence de quoi nous ne trouvons aucune C.A.

Le troisième exemple que nous examinons concerne les 25 dernières minutes de la recherche de CHA présentée dans le protocole 4-13;03. Cette période se décompose en quatre processus élémentaires que nous numérotons comme dans le protocole : (5.1) , (6.1) , (7.1) , (8.1) .

Au cours du processus élémentaire (5.1) l'élève essaie de construire un triangle T_5 dont la réalisation se trouve sur la figure ci-après et qui doit satisfaire aux contraintes suivantes :

(1) Le triangle cherché doit avoir des angles égaux aux angles correspondant de T.

(2) Le côté moyen du triangle cherché doit être porté par la longueur supérieure de R.

(3) Le triangle cherché doit être contenu dans R.

(4) Le petit côté de T_5 doit mesurer 6 cm.

(5) Le côté moyen de T_5 doit mesurer 8 cm.

(6) Le sommet du petit angle de T_5 doit se trouver au coin supérieur gauche E du rectangle R.

Nous constatons que ce processus élémentaire s'accompagne d'une C.O. et d'une C.L. multiple. La C.O. est due à la C.L. Nous constatons aussi que la réalisation est obtenue avec beaucoup de difficultés techniques, des erreurs de mesures et de construction.

Lorsque CHA constate que le sommet V du petit angle de son triangle T_5 n'est pas à l'intérieur de R, donc que la contrainte (3) n'est pas satisfaite elle déclare :

- Ouf ! ... ça tombe pas tout à fait dans l'angle ...! Mais enfin ... presque !

Elle en vient donc à accepter son triangle T_5 (SLV) et à faire disparaître la C.O. associée à (3). Cela est du au fait qu'elle ajoute une contrainte (7) qu'on peut exprimer de la manière suivante :

(7) Le triangle T_5 doit avoir des mesures bénéficiant d'une certaine approximation.

Cette contrainte modifie les précédentes et rend d'ailleurs le nouveau champ bien moins contraignant; elle permet d'effacer la C.O. précédente ; elle efface aussi la C.L. car le champ de contraintes est devenu qualitatif. Ce procédé qui permet d'effacer des contradictions au moyen de l'approximation est important chez nos élèves.

Une dernière contrainte apparaît enfin, c'est la contrainte suivante :

(8) Le triangle T_5 doit être plus grand que les triangles obtenus précédemment.

Cette contrainte introduit à nouveau une C.O. Mais le champ de contraintes restant qualitatif à cause de (7) nous n'avons plus de C.L. Et a fortiori, nous n'avons pas de C.A.

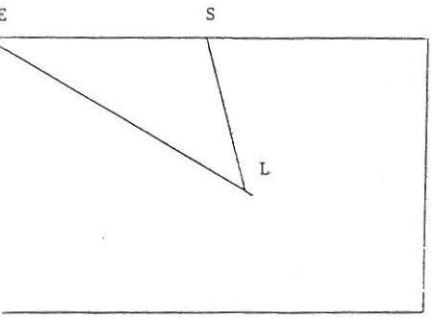


Figure 145

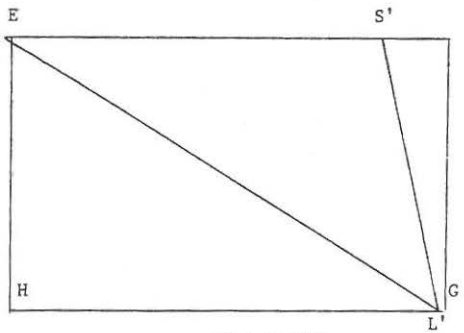


Figure 146

Le processus élémentaire (6.1) conduit à une réalisation T_6 représentée par la figure 146 ci-dessus, pour laquelle la C.O. précédente a disparu.

Le champ de contraintes auquel doit satisfaire le triangle T_6 comporte les contraintes (1) (2) et (3) du processus (5.1) ; à ces trois contraintes s'ajoute les deux contraintes suivantes :

(4') Le petit côté de T_6 doit passer au moins approximativement par le coin inférieur droit G du rectangle.

(5') Le triangle cherché doit être plus grand que tous les triangles réalisés depuis le début de la recherche du problème.

Après la réalisation, CHA constate à regret que le sommet V' du petit angle de son triangle T_6 (S'L'V') sort. Nous avons affaire à une C.O.

Avons-nous une C.L. ? Si nous gardons le champ de contraintes (1) (2) (3) (4') (5') qui est qualitatif, nous n'avons pas de C.L. Mais l'attitude de l'élève en (6.1) (7.1) et même (8.1) montre que l'approximation qu'il accepte dans (4') n'est pas très large. Nous pouvons, par exemple, supposer que pour lui le sommet L' de l'angle moyen doit être pris sur la droite HG, passant par la longueur inférieure du rectangle, à proximité de G. Nous pouvons aussi supposer que l'erreur L'G se répartit selon une loi gaussienne centrée en G et d'écart type de l'ordre du demi-centimètre (dans sa réalisation L'G est nettement inférieure à un demi-centimètre) alors le champ de contraintes devient logiquement contradictoire avec une probabilité très forte, nettement supérieure à 0,99.

CHA rencontre encore dans le processus (6.1) de grandes difficultés de réalisation ce qui l'éloigne d'une prise de conscience de la C.L. et bannit la possibilité d'une C.A.

Le processus élémentaire (7.1) conduit à la réalisation T_7 représentée par la figure 147 ci-dessous. L'élève envisage d'éliminer la C.O. précédente et ceci d'autant plus facilement que V'E = L'G (cf. figure 146).

Il se donne donc le champ de contraintes constitué par les quatre contraintes précédentes : (1) (2) (3) (5') auxquelles il ajoute les deux contraintes suivantes :

(4") le petit côté du triangle cherché doit passer par le coin inférieur droit G du rectangle.

(4"') le triangle T_7 doit se déduire de T_6 au moyen d'une translation définit par le vecteur $\overrightarrow{V'E}$.

Nous avons là une C.L. multiple. Mais l'élève se contente de la C.O. associée à (5'). De nouveau, nous ne trouvons pas de C.A.; l'analyse échappe à l'élève.

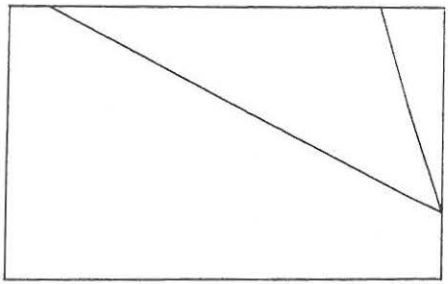


Figure 147

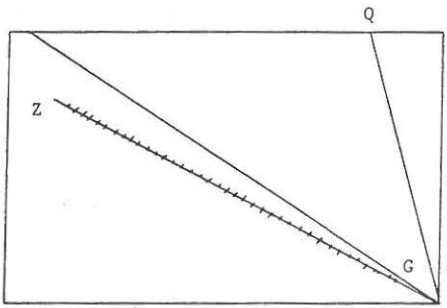


Figure 148

Le processus élémentaire (8.1) conduit à la réalisation T_8 représentée par la figure 148 ci-dessus.

Le champ de contraintes est constitué par les contraintes (1) (2) (3) (4") énoncées, auxquelles s'ajoute une variante de la contrainte (5') soit :

(5") Le triangle T_7 doit être plus grand que tous les triangles réalisés depuis le début de la recherche du problème, à l'exception de T_6 qui n'est pas contenu dans R.
Elle est satisfaite par sa réalisation. Cette réalisation présente un angle moyen avec une erreur de 5°, mais dans ces conditions, il n'y a pas de C.O.
La C.L., qui existe, échappe donc totalement à l'élève; il ne peut pas y avoir de C.A.

Ajoutons à l'étude du processus (8.1) une dernière remarque. Nous aurions pu diviser (8.1) en une suite de plusieurs processus élémentaires. Ainsi, l'activité de l'élève commençant au début de (8.1) et s'achevant lorsque l'élève dit "peut-être plus loin", aurait pu être compté comme un processus élémentaire muni du champ de contraintes (1) (2) (3) (4"). Il aurait fait apparaître une C.O. due à un défaut de réalisation, ainsi, bien entendu, qu'une C.L. Il n'y aurait pas eu de C.A. Nous n'avons pas introduit ce sous-processus élémentaire de (8.1) car la C.O. due à un défaut de réalisation le rend moins intéressant.
Le sous-processus élémentaire de (8.1) commençant avec la découverte du point Q et se terminant lorsque l'élève efface GZ (cf. protocole rédigé dans la partie F) est plus intéressant. Mais, l'élève traite la C.O. comme un défaut de réalisation. Il arrive ainsi à faire disparaître cette C.O. grâce à l'erreur de 5°, dont nous avons déjà parlé dans la construction de l'angle moyen G du triangle. Ce sous-processus élémentaire met en évidence le rôle important de la réalisation et des capacités techniques de l'élève.

Nous appelons *analyse dialectique* d'un processus élémentaire, l'analyse qui étudie les trois types de contradictions :

C.O. (cf. page 230).

C.L. (cf. page 241).

C.A. (cf. page 246).

les deux principales notions qui les accompagnent,

la réalisation,

le champ de contraintes (cf. page236)

ainsi que les différentes variations qui leurs sont attachées,

le champ de contraintes qualitatif ou non (cf. page242)

la C.O. due à un défaut de réalisation ou à une C.L. (cf. page246)

Les C.L., avec une certaine probabilité, notamment les C.L.p.s. (cf. page 245).

L'analyse dialectique d'une suite de processus élémentaire, fait intervenir, en plus de l'analyse dialectique de chaque processus élémentaire, l'évolution des diverses notions que nous venons de citer, notamment le changement qui s'effectue lorsqu'on passe du champ de contraintes d'un processus élémentaire au champ de contraintes des processus suivants.

A la question fondamentale :
Quelles sont les démarches de pensée suivies par un élève devant résoudre un problème de géométrie ?
Une réponse globale est : l'élève procède par contradiction.
Une réponse détaillée est fournie par l'analyse dialectique.

L'analyse dialectique est une méthode d'analyse des processus. Elle présente aussi un autre avantage : celui de permettre l'étude des concepts mathématiques. Elle permet, pour employer le langage piagétien de connaître les mécanismes structuraux à travers la dynamique fonctionnelle.

C'est ainsi que, chez LIE, qui est, lors de l'épreuve, au début de sa cinquième, et qui est âgée de 12 ans et 9 mois, les difficultés techniques éliminent les C.L. Le qualitatif reste maître du terrain. Nous sommes au début de l'enseignement secondaire et nous avons, là, une analyse dialectique qui montre l'importance qu'ont les structures qualitatives; ceci risque fort d'être assez général pour les élèves débutants dans le secondaire.

Nous trouvons avec CHA et MAR le rôle prépondérant de la conservation des angles, qui est la bouée de sauvetage pour MAR et qui est une contrainte indéracinable pour CHA, alors qu'elle n'est pas introduite par LIE.
Dans les trois exemples, nous voyons le rôle primordial joué par l'équilibre de l'horizontale et de la verticale, qui, dans les limites des processus étudiés, apporte une contradiction insurmontée.
Nous avons vu enfin l'importance de la technique dans l'évolution des processus de LIE et de CHA.

6. L.L.C. - SOUS PROBLEMES - CHAMP DE CONTRAINTES MUNI D'UNE VARIABLE

Se rattachant à l'analyse dialectique traitée au paragraphe précédent qui reste l'outil essentiel dégagé au cours de ce chapitre, nous allons examiner les trois points particuliers que sont : les lacunes locales compensées, les sous-problèmes, le champ de contraintes muni d'une variable.

a) Lors de l'expérimentation portant sur le problème CRI, nous avons mis en évidence et défini *la notion de lacune locale compensée* (cf. chapitre VI). Il nous paraît donc naturel de nous demander si les L.L.C. apparaissent aussi avec le problème SIM. La réponse est manifestement affirmative. Ainsi à la charnière entre les deux processus élémentaires consécutifs pris parmi ceux cités au paragraphe 5 précédent, nous trouvons une L.L.C. Il y a L.L.C. à la fin du premier processus élémentaire suivi par LIE. Il y a L.L.C. à la fin des trois premiers processus élémentaires suivis par CHA et que nous avons présentée sous les numéros (5.1) (6.1) (7.1) .

De façon générale, une L.L.C. implique nécessairement l'existence d'une C.O. par définition même de ces deux notions. Par contre, une C.O. ne se développe pas obligatoirement en une L.L.C. C'est ainsi que la C.O. accompagnant le processus de MAR que nous avons analysé au paragraphe 5 page 254 ne se transforme pas en L.L.C. comme le montre l'étude de la suite de la recherche de cet élève. Il en est de même pour le processus (8.2) de LIE.

Une L.L.C. peut aussi bien provenir d'une C.O. due à un simple défaut dans la réalisation que d'une C.O. due à une C.L.

C'est ainsi qu'au tout début du protocole 5-12;09-2, nous voyons LIE dessiner le triangle représenté ci-dessous à la figure 149 et déclarer aussitôt que "ça va pas" parce que "c'est pas assez penché". LIE parle alors du petit côté de son triangle dont la pente n'a pas l'inclinaison du petit côté de T, inclinaison repérée par rapport aux bords des feuilles de R et de T parallèles deux à deux.

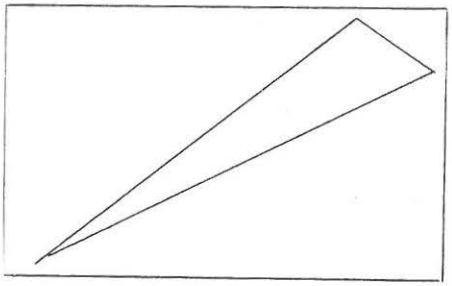


Figure 149

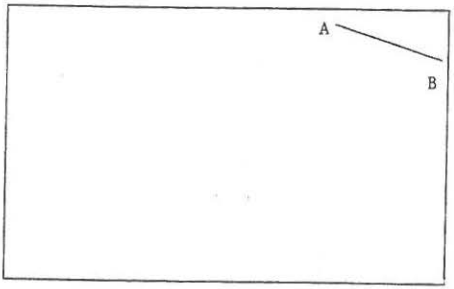


Figure 150

Elle trace alors le petit côté AB sur une nouvelle feuille, nous la représentons à la figure 150 ci-dessus et ce petit côté a maintenant l'inclinaison voulue. Nous avons là une L.L.C., provenant d'une C.O. due à un défaut dans la réalisation, le champ de contraintes étant d'ailleurs réduit pour le premier processus élémentaire à la volonté d'une conservation qualitative des pentes.

Par contre, au début du protocole 5-11;06, GAL analyse parfaitement (c'est une C.A.) qu'il n'est pas possible d'avoir un triangle dont le grand côté soit la diagonale AB de pente positive, dont les pentes des autres côtés soient aussi conservées et qui soit à l'intérieur du rectangle R, selon la figure 151 représentée ci-dessous.

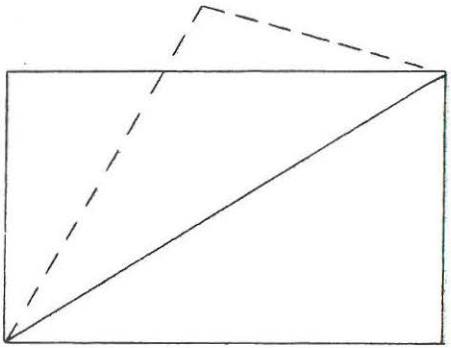


Figure 151

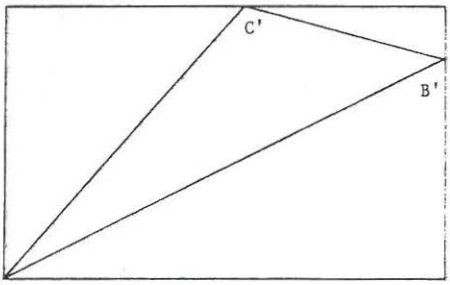


Figure 152

Elle envisage donc de tracer "cette diagonale, ici, un peu plus bas" ; elle a donc trouvé une compensation portant sur la position de la diagonale et trace alors un segment A'B', puis le triangle A'B'C' que nous représentons à la figure 152 ci-dessus. Cette L.L.C. provient d'une C.O. due à une C.L. En définitive, la L.L.C. n'apporte rien de plus que ce que nous obtenons grâce à l'analyse dialectique d'une suite de processus élémentaires.

A l'occasion de notre première expérimentation, nous avons fait apparaître les L.L.C. et non l'analyse dialectique. Cela tient au fait que le souci d'alléger notre réflexion, en évacuant au maximum les difficultés dues aux concepts mathématiques, a eu pour conséquence de rendre la recherche des élèves insuffisamment explicite, ce qui nous a privé de beaucoup d'informations. Lors de cette expérience, nous n'avions pas non plus une habitude suffisante quant à la rédaction des protocoles ce qui a accru ce manque d'information. De plus, avec une L.L.C., la C.O. est deux fois plus apparente pour l'expérimentateur. Elle apparaît lorsqu'est explicitée la lacune locale. Elle apparaît une seconde fois lorsque l'élève compense

cette C.O. Ce n'est donc pas un hasard si la L.L.C. s'est installée dans nos conceptions antérieurement à la notion de C.O.

Grâce à l'observable que fut, pour nous, la L.L.C. et que nous avons pu dégager lors de l'étude du problème CRI, et grâce aussi aux insuffisances que présentait pour nous cette notion de L.L.C., nous avons pu accéder lors du problème SIM à l'analyse dialectique. Nous espérons que cette analyse dialectique, grâce à ses insuffisances, nous conduira, par une équilibration majorante, à des notions encore plus satisfaisantes.

b) Le deuxième point que nous examinons dans ce paragraphe est celui traitant *des sous-problèmes*.

Commençons par examiner l'exemple constitué par le processus élémentaire associé au premier dessin de FAL; ce processus est décrit dans le protocole 3-14;01.

FAL fait une constatation et prend une décision.

FAL - Là, il y a huit centimètres et là il y a 17, je vais le mettre deux fois.

Il constate que le plus grand côté de T mesure 8 cm, tandis que la longueur de R mesure 17 cm, il veut donc prendre un triangle dont le grand côté double celui de T, sera placé sur la longueur inférieure de R. Il réalise son dessin que nous représentons à la figure 153 ci-après. Une fois le triangle achevé, il fait une remarque a son sujet :

FAL - Il n'est pas le plus grand possible.

Il semble bien que sa remarque ne soit pas une C.O.; en effet, FAL s'est donné comme objectif dans ce processus élémentaire de construire un triangle double de T, il a atteint cet objectif, il a résolu un sous-problème du problème proposé; il va alors s'attaquer au problème général.

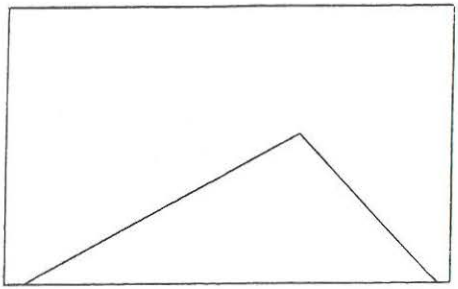


Figure 153

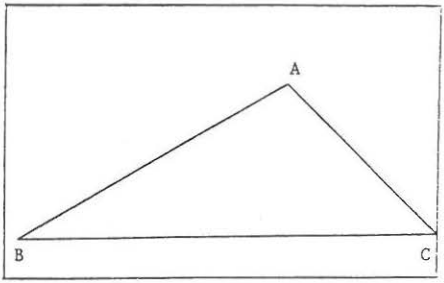


Figure 154

Il est souvent difficile de bien distinguer les processus élémentaires de recherche de sous-problème et les processus débouchant sur une C.O. . C'est le cas, par exemple, du processus décrit ci-dessous et consigné dans le protocole 5-12;10. L'élève réalise le triangle ABC, double de T, représenté à la figure 154 ci-dessus.
Il pense alors que le triangle obtenu est la solution. L'expérimentateur lui demande pourquoi. En réponse l'élève dit :
- J'aurais pu le faire plus grand.
Et il montre la région autour du point B, en voulant signifier que de ce côté l'agrandissement est possible.

Est-ce un processus élémentaire de recherche de sous-problème ou un processus élémentaire débouchant sur une C.O. ?

Nous estimons toutefois qu'environ une feuille de dessin sur huit correspond à un processus qui se présente comme la recherche d'un sous-problème. Ces processus ne débouchent pas sur une C.O. mais sur la mise en place de nouvelles contraintes permettant d'aborder un problème plus général. Ils dénotent une maîtrise plus grande des champs de contraintes.

c) Durant une suite de processus élémentaires, l'élève peut faire intervenir un *même champ de contraintes muni d'une variable*. Cela nous paraît correspondre à une maîtrise plus grande du problème qu'une recherche utilisant une suite de processus s'enchaînant par C.O. .
Le dernier type de suite de processus élémentaires enchaîné par C.O.

nous paraît assez bien représenté par l'exemple tiré du protocole 4-13;03 que nous avons longuement analysé au paragraphe 5 de ce chapitre. (Page 257 et suivantes).

Examinons maintenant un exemple de suite de processus élémentaires faisant intervenir un même champ de contraintes muni d'une variable.

Nous prenons cet exemple dans le protocole 3-12;03-2.

Entre la 15ème et la 17ème minute, l'élève a tracé un triangle, double du triangle T, dont le côté moyen est porté par la longueur supérieure du rectangle; nous représentons ce triangle ABC sur la figure 155 ci-dessous.

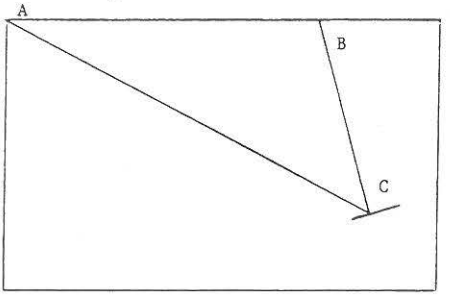


Figure 155

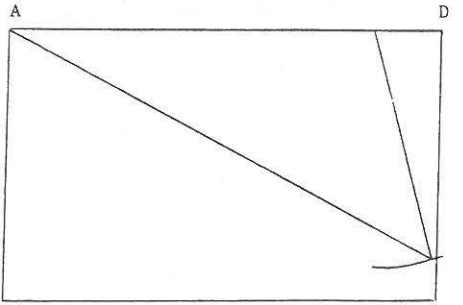


Figure 156

Il déclare alors :

- Je peux l'agrandir, il faut que je multiplie par un nombre entre deux et trois.

Il cherche à construire un triangle, ayant le sommet du petit angle en A, ayant le côté moyen porté par AD, proportionnel à T, qui reste à l'intérieur du rectangle R, et qui est le plus grand possible. Il fait alors varier le rapport de proportionnalité entre 2 et 3.

Après son premier essai, il déclare :

- 2,3 c'est bon.

Il essaie un nouveau rapport et déclare :

- 2,4 c'est trop long.

Il essaie 2,35, puis 2,36 ; il choisit en définitive 2,35 et réalise le triangle que nous représentons à la figure 156 ci-dessus. Il a donc, tout au long de ce processus, travaillé avec le même champ de contraintes, en faisant varier le rapport de proportion jusqu'à ce qu'il trouve la proportion cherchée.

On peut, aussi bien, décomposer ce processus en processus élémentaires faisant apparaître des C.O., et, même, des C.L. et des C.A.. Mais, dans ce cas, nous ne prenons pas en compte cette variation du champ de contraintes qui semble correspondre à une maîtrise beaucoup plus grande de la suite des processus élémentaires.

Sur les 81 protocoles du problème SIM, nous en trouvons une bonne douzaine où apparaît nettement ce processus; citons par exemple les protocoles de ERI et EDW qui se trouvent dans la partie F de ce texte.

Nous rencontrons de plus une demi douzaine d'élèves tentés par un tel processus, mais une maîtrise insuffisante du champ de contraintes les empêche d'aboutir à l'organisation de ce type de processus.

Ajoutons encore qu'une bonne maîtrise de ce processus peut s'accompagner d'un échec dans la solution du problème faute de concepts mathématiques convenables; c'est notamment le cas pour ERI et pour JIS.

7. CONSERVATION DES ANGLES ET CONSERVATION DES PROPORTIONS : ANALYSE DIALECTIQUE

Nous allons examiner dans ce paragraphe :

a) Les rapports entre la conservation des angles et la proportion double (D_0 D_1 ou D_2).

b) Les rapports entre la conservation des angles et la proportion en général (D_3 D_4 ou P).

c) L'origine des pseudo-proportions.

d) L'élimination des pseudo-proportions.

Nous utiliserons, pour ces différentes études, une analyse dialectique. Nous nous référons aux procédures définies dans les chapitres XI et XII.

a) Nous examinons les processus élémentaires pour lesquels le champ de contraintes contient à la fois une contrainte correspondant aux comportements D_0, D_1 ou D_2 et une contrainte correspondant à un des cinq comportements définissant la conservation des angles.

Dans ces situations, l'élève veut donc construire à la fois des côtés doubles de ceux du triangle donné T et des angles égaux à ceux du triangle T.

Nous rencontrons deux possibilités.

Dans le premier cas, les deux contraintes sont utilisées conjointement sans que l'une prédomine sur l'autre. Elles contribuent toutes deux à la découverte d'un triangle double de T. C'est ainsi que MAP, dont le travail est relaté dans le protocole 3-14;00-1, à la 22ème minute, construit le triangle que nous avons représenté sur la figure 157 ci-dessous. Pour cela, elle trace tout d'abord la demi-droite Ax faisant un angle $\widehat{yAx}$ égal à l'angle moyen de T. Puis, elle place les points B et C respectivement sur Ax et Ay de telle sorte que AB et AC soient le double du petit et du grand côtés de T. MAP trace alors le triangle ABC; puis elle vérifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux aux grand et petit angles de T. MAP a donc utilisé la proportion double et la conservation des angles pour construire son triangle.

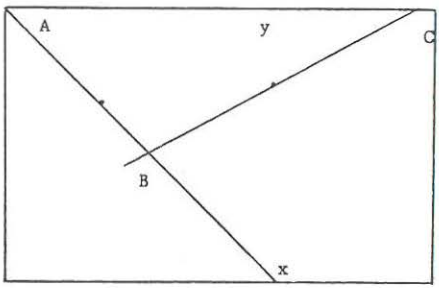


Figure 157

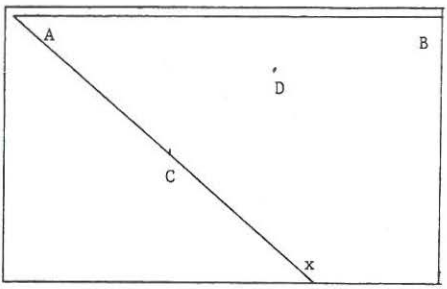


Figure 158

Dans le deuxième cas, l'une des deux contraintes domine l'autre. Nous rencontrons cinq protocoles correspondant à cette situation : 5-11;06 , 5-12;09-3 , 5-14;02-1 ; 4-13;2-1 , 4-13;06.

Examinons plus particulièrement LEG, dont le travail est relaté dans le protocole 4-13;02-1. A la 20ème minute, il mesure les trois côtés du triangle T et trouve 8 cm, 6 cm, 4 cm, puis déclare vouloir " Multiplier tout par deux"

Il commence à réaliser la figure 158. Pour cela, il trace le segment AB = 16 cm double du grand côté de T. Puis ayant mesuré les angles de T qu'il trouve égaux à 100°, 40° et 30°, il trace la demi-droite AX telle que BAX = 40°. LEG place sur la demi-droite AX le point C tel que AC = 8 cm, double du petit côté de T. Il mesure à nouveau le grand angle de T et trouve 105°. Il marque un point D tel que, pour lui, $\widehat{ACD}$ = 105°, alors qu'en fait $\widehat{ACD}$ = 101°. B est nettement en dehors de la droite CD. Il mesure à nouveau longuement les angles de T. LEG explique à l'expérimentateur qu'il est gêné parce qu'il "n'arrive pas à trouver chaque fois le même résultat".
LEG a donc utilisé la proportion double et la conservation des angles. Mais la contrainte de conservation des angles devient très vite le critère dominant sa réalisation bien qu'il soit parfaitement conscient des défauts de ses réalisations. La C.O. porte seulement sur la conservation des angles. Nous disons que dans ce cas la conservation des angles domine la proportion double.

Dans les quatre autres protocoles cités, c'est la même domination de la conservation des angles sur le double qui apparaît.

b) Examinons maintenant les processus élémentaires pour lesquels *le champ de contraintes contient à la fois une contrainte correspondant aux comportements* D_3, D_4 *ou P et une contrainte correspondant à un des cinq comportements définissant la conservation des angles.*
Quelques protocoles sont inutilisables pour cette analyse, notamment à cause d'une trop forte intervention de l'expérimentateur portant sur les comportements étudiés.

Parmi les 23 protocoles analysables, 20 d'entre eux présentent des processus où se rencontrent conjointement la conservation des angles et la conservation des proportions, sans que l'une prédomine sur l'autre. Dans le protocole 3-14;11 de EDW, nous rencontrons une telle situation. C'est ainsi que EDW à la 18ème minute trace, comme nous le faisons sur la figure 159 ci-après, un segment AC = 10cm;

puis, à l'aide du rapporteur, l'élève marque un point D tel que $\widehat{ACD} = 105°$ qui est la mesure du grand angle de T. EDW précise qu'elle essaie de multiplier par 2,5.

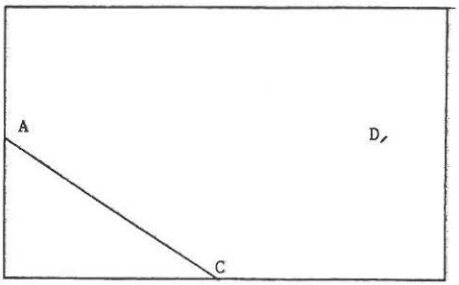


Figure 159

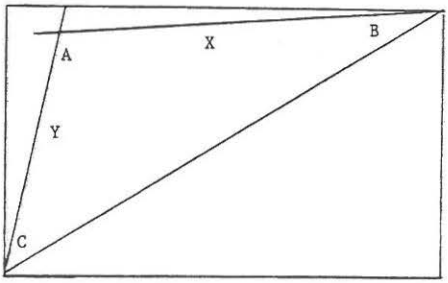


Figure 160

Parmi les 23 protocoles analysables, nous trouvons 4 protocoles[1] montrant des processus élémentaires avec des différences dans l'usage de la conservation des angles et de la conservation des proportions. Ce sont les protocoles 4-13;04-2 , 4-13;06 , 3-13;10 , et 3-15;00.

Dans le protocole 4-13;04-2 l'élève envisage la proportion d'échelle 2,5 mais déclare alors :

- ça ne rentre pas donc je vais essayer en partant des angles.

Ainsi, la conservation des angles lui permet de se dégager de la C.O. due à la proportion 2,5.

Dans le protocole 4-13;06, l'élève, après avoir tracé la diagonale BC et l'angle $\widehat{XBC} = 29°$ que nous représentons sur la figure 160 ci-dessus, se pose une question :

- Je ne sais pas comment faire pour trouver. Par deux, cela me donnera le même, par trois, ça ne rentre pas.

En effet, il a déjà tracé un triangle double et a constaté qu'il y avait plus grand; il observe de même qu'un triangle triple de T ne rentre pas dans le rectangle.

- Je vais mesurer l'autre angle et puis je vais tracer les deux droites. Il construit donc l'angle $\widehat{BCY}$ égal à l'angle moyen de T et marque le point A à l'intersection.

Dans ces deux derniers protocoles, les C.O. dues au fait que les procédures D_3 et D_4 ne suffisent pas pour résoudre le problème, amènent l'élève à utiliser la conservation des angles plutôt que la conservation des proportions.
Au tout début des protocoles 3-13;10 et 3-15;00, les élèves utilisent la conservation des proportions et diverses autres contraintes mais aboutissent à une C.O.; pour la suite de leur travail, ils s'appuient alors sur la conservation des angles.

Nous constatons encore, dans notre second cycle, que lorsque la conservation des angles et la conservation des proportions se présentent conjointement, alors elles font jeu égal; l'une ne domine pas l'autre.

Il semble en définitive que l'acquisition du concept de similitude passe par deux étapes consécutives : *dans une première étape, la conservation des angles bien installée domine nettement la conservation desproportions en voie de formation. Dans une deuxième étape, la conservation des angles et la conservation des proportions ont une égale valeur; la classe de troisième se trouve à la charnière de ces deux étapes.* L'hypothèse que nous venons d'énoncer est cohérente avec les analyses globales des chapitres XI et XII, ainsi qu'avec l'analyse dialectique des paragraphes a et b qui précèdent.

c) Nous allons maintenant analyser tous les protocoles où apparaît la pseudo-proportion (Ps). On peut retrouver la liste de ces vingt protocoles sur le tableau 168 de la page 280.
La question que nous nous posons est : *comment apparaissent les pseudo-proportions ?*

Pour répondre à cette question, nous prenons en considération, dans chacun de nos vingt protocoles, le processus élémentaire faisant apparaître pour la première fois une contrainte Ps.
Nous examinons comment a varié le champ de contraintes lors du passage d'un processus élémentaire précédent à ce processus.

La première constation que nous faisons est la suivante : deux fois sur trois[1] la pseudo-proportion apparaît après l'usage du double (D_o ou D_1 ou D_2) et quelquefois de façon nette comme un paliatif à l'incapacité de résoudre le problème avec les seules proportions simples (D_o, D_1, D_2, D_3, D_4). C'est ainsi que dans le protocole 5-12;09-2 de LIE, nous voyons apparaître en cours de recherche un triangle double que nous représentons sur la figure 161 ci-dessous. Puis, LIE a une idée.

-Je vais prendre 6, trois fois.

Elle veut prendre un triangle triple de T et pour cela envisage le triple du côté moyen de T. Mais elle se rend compte aussitôt que c'est impossible.

LIE - ça marchera pas, ça fera trop grand ... 8 si je prends 3 fois ça fera trop grand, ça dépassera le carré.

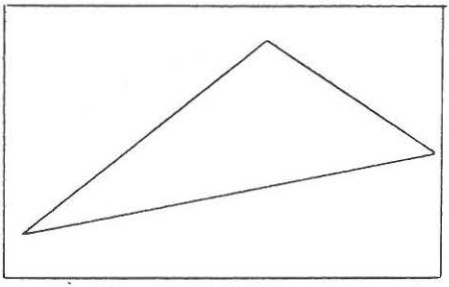


Figure 161

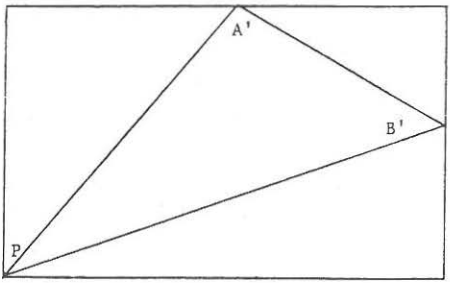


Figure 162

Elle pense, quand même, pouvoir en trouver un plus grand. Elle se propose alors de prendre son précédent triangle et d'ajouter 2 cm à chaque côté. Elle réalise ainsi, non sans mal, le triangle PA'B' que nous représentons sur la figure 162 ci-dessus.

Nous constatons en deuxième lieu que quatre fois sur cinq[2] l'apparition des pseudo-proportions est accompagnée explicitement du verbe "ajouter". Et ainsi, non seulement l'idée d'addition court-circuite la multiplication nécessaire aux proportions, et donc à la similitude, mais encore cette idée est renforcée par l'image qui présente un segment s'ajoutant, bout à bout, à un segment initial. C'est ainsi

que GAL dont le travail est relaté dans le protocole 5-11;06 après avoir construit le triangle ABC, reproduit sur la figure 163 ci-dessous, déclare :

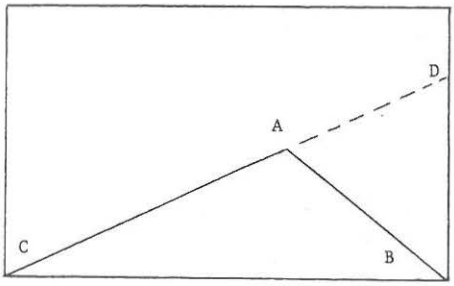


Figure 163

- Je vais voir combien je peux ajouter sur chaque branche.
Elle prolonge le côté CA de son triangle et obtient AD = 6,5 cm.
GAL - ... essayer d'ajouter 6,5 cm.
Elle veut alors agrandir le côté BC de 6,5 cm; ce qui fait 17 + 6,5 = 23,5 .
Nous trouvons une situation analogue dans le protocole 3-15;00 de MAR.

Nous constatons toutefois que cet "ajout" participe à des procédures faisant apparaître des subtilités qui dépassent la simple idée d'addition. Il en est ainsi dans les protocoles 5-12;10 , 5-13;00, 4-13;04-1 , 3-14;03-1 que nous allons examiner.
Dans le protocole 5-12;10, on voit l'élève construire un triangle double dont le grand côté est parallèle à la longueur du rectangle. Il constate alors qu'il manque 5 mm à ce grand côté pour qu'il occupe toute la longueur du rectangle. Il dit alors qu'il faut rajouter 0,25 cm aux 8 cm du grand côté du triangle donné T avant de doubler. Il procède donc aux calculs des côtés du triangle cherché selon les formules :

(8 + 0,25) x 2 = 16,5
(6 + 0,25) x 2 = 12,5
(4 + 0,25) x 2 = 8,5

quoique cette pseudo-proportionnalité donne les mêmes résultats que ceux obtenus par la formule habituellement utilisée par les élèves :

$$2a + 0,5 ,$$

elle correspond a un souci de la proportionnalité beaucoup plus grand. Dans les protocoles 5-13;00 et 3-14;03-2, les ajouts sont tout d'abord des ajouts proportionnels correspondant aux formules

$$2a + \frac{1}{2}a \quad , \quad 2a + \frac{1}{4}a \quad \text{et} \quad a + \frac{1}{2}a .$$

Ils deviennent ensuite des ajouts non proportionnels et c'est la pseudo-proportionnalité qui reprend le dessus.

Dans le protocole 4-13;04-1, l'ajout de $\frac{1}{2}$ cm devient l'agrandissement et l'agrandissement revient à tracer des parallèles à 1 ou 2 cm des côtés d'un premier triangle selon les figures 164 et 165 représentées ci-dessous :

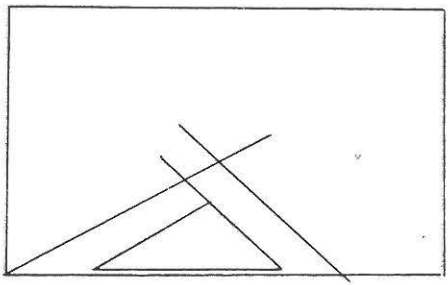


Figure 164

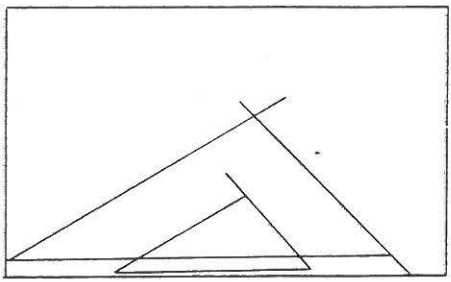


Figure 165

En définitive, nous assistons d'une part à une convergence de la géométrie et du numérique amenant un renforcement de l'addition vis à vis de la multiplication. Et ce phénomène paralyse l'épanouissement des proportions. Mais, nous constatons d'autre part que les insuffisances des proportions simples (D) font apparaître les pseudo-proportions, qui servent de marche pied à l'épanouissement de la similitude par la mise en place de la conservation des proportions. Il nous reste à examiner comment l'élève arrive à s'échapper de la pseudo-proportionnalité pour accéder aux proportions.

d) Vingt élèves font usage de la pseudo-proportionnalité.
Nous donnons dans le tableau 168 représenté ci-après une vue d'ensemble de la situation.
On examine uniquement les processus élémentaires (notés PE dans notre tableau) dans lesquels intervient comme contrainte la pseudo-proportion (notée Ps dans notre tableau). Dans ces PE, on regarde : si la conservation des angles (notée α dans notre tableau) appraît comme contrainte, si l'élève constate qu'il y a une contradiction observée (notée C.O. dans notre tableau) et quelle est la cause de cette C.O.
Les P.E. caractérisés dans la colonne de droite sont extraits des protocoles dont le numéro est donné dans la colonne de gauche. On retrouve deux fois le protocole 4-13;02-2 car on peut répartir ses P.E. dans deux classes différentes. Nous soulignons le numéro des protocoles débouchant sur la solution.

Donnons maintenant quelques exemples particuliers de processus élémentaires que nous caractériserons dans le tableau .

Dans le protocole 4-14;05, nous voyons l'élève tracer tout d'abord le triangle MNO, que nous représentons sur la figure 166 ci-dessous, double du triangle donné T. Puis, il décide d'agrandir de 0,8 cm les côtés de ce triangle MNO; il obtient en définitive un triangle M_1N_1P qui lui convient.

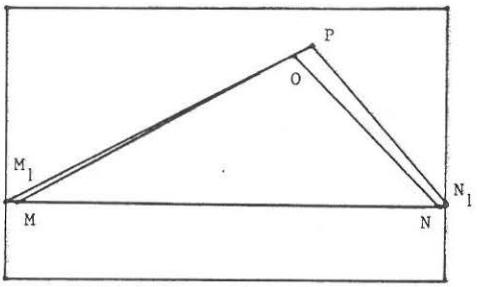


Figure 166

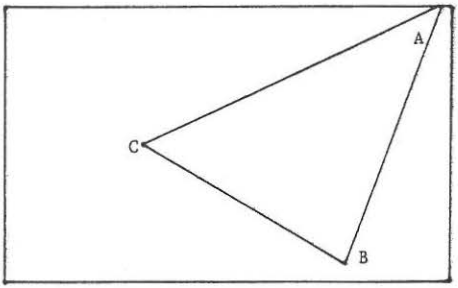


Figure 167

PE : processus élémentaire ; CO : contradiction observée ;
α : conservation des angles ; Ps : pseudo-proportion

4-13;04-1 4-14;05	α est présente, mais CO ne sont pas dues à l'usage des Ps
3-13;11 5-13;08 0-18;07-2	α n'apparaît pas, CO n'existent pas ou ne sont pas dues au Ps.
5-13;00 4-14;01-1 4-13;02-2	On ne trouve pas α nette; chaque PE débouche sur CO due au coup d'oeil; on peut encore dire que CO est due à une α qualitative.
4-13;02-2 5-11;06	α n'apparaît pas; CO qui apparaît est dûe à une contradiction logique propre aux seules Ps.
3-14;03-2 1-16;06-2	α n'apparaît pas; CO n'est pas nette, mais, dans PE suivants, Ps a été abandonnée au profit de la proportionnalité.
6-11;04 5-12;09-2	Les contraintes sont nombreuses mais mal maîtrisées par l'élève; CO sont nettes et conduisent l'élève à se déterminer en fonction de α ou de la conservation des pentes.
5-12;10	α est présente; CO est fondée sur la contradiction logique entre α et Ps mais l'analyse n'est pas faite par l'élève; il efface CO au moyen de l'approximation.
4-15;08	α est présente sans prise de conscience de la part de l'élève CO sont fondées sur la contradiction logique entre α et Ps mais l'analyse n'est pas faite; c'est l'impasse.
5-12;04	α est présente; nette CO due à la contradiction logique entre α et Ps aboutissant, dans les PE suivants à des Ps compensées dans le sens de la proportionnalité.
4-13;04-2 3-14;03-1 3-14;00-1 3-15;00	α est présente; nette CO, due à la contradiction logique entre α et Ps, aboutissant, dans PE suivants, à l'élimination des Ps et à l'usage de α avec ou sans intervention de la proportionnalité.

Tableau 168

La pseudo-proportionnalité est utilisée et aucune C.O. n'apparaît.

Dans le protocole 5-13;00, nous voyons CAT dessiner le triangle ABC que nous représentons sur la figure 167 ci-avant. C'est un triangle pseudo-proportionnel à T selon la formule

$$a + 5$$

CAT déclare ensuite que le grand côté AC n'est pas assez grand, compte tenu de ce qu'est le grand côté de T. Elle voit donc une C.O. due au coup d'oeil ou encore à une notion qualitative de conservation des angles ou des proportions.

Dans le protocole 5-11;06 de GAL, l'élève dessine le triangle ABC que nous représentons sur la figure 169 ci-dessous, en utilisant la pseudo-proportionnalité consistant à doubler puis à ajouter 0,7 cm. MAG mesure alors la hauteur de T et trouve 3 cm. Il mesure la hauteur du triangle ABC, trouve 6 cm et dit :

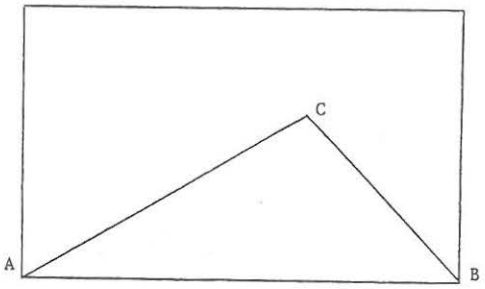


Figure 169

- J'avais ajouté 7O, alors c'est pas ça ... si c'est ça ...

L'élève constate que la pseudo-proportionnalité ne se répercute pas sur tous les segments remarquables d'un triangle. Il constate donc que cette pseudo-proportionnalité est contradictoire en elle-même. Ne regrettons pas que son protocole s'achève là car cette contradiction propre à la pseudo-proportionnalité est difficile à observer pour un élève compte-tenu de la précision des tracés qu'elle nécessite.[1]

Au début de sa recherche relatée dans le protocole 5-12;04, ERI construit cinq triangles pseudo-proportionnels à T; il passe d'un triangle au suivant en ajoutant chaque fois 2 cm à deux des côtés. Nous représentons ces cinq triangles sur la figure 170 ci-dessous.

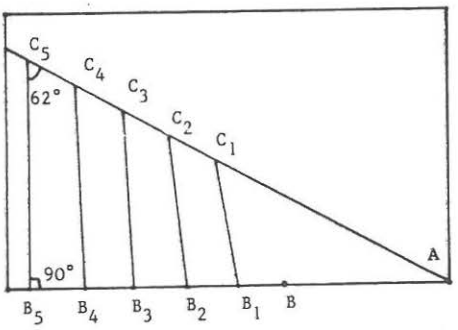


Figure 170

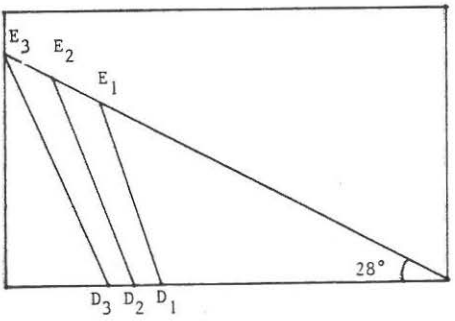


Figure 171

Il observe alors, pour le dernier triangle AB_5C_5 que les angles ne sont pas conservés; c'est la contradiction entre la conservation des angles et les pseudo-proportions qui apparaît. Il en arrive, après une longue recherche faisant jouer un rôle essentiel à la conservation des angles, à construire trois nouveaux triangles que nous représentons sur la figure 171 ci-dessus vérifiant les égalités :

$AE_1 = 8 + 7$ et $AD_1 = 6 + (7 - 2)$

$AE_2 = 8 + 7 + 2$ et $AD_2 = 6 + (7 - 2) + 1$

$AE_3 = 8 + 7 + 2 + 2$ et $AD_3 = 6 + (7 - 2) + 1 + 1$;

le petit angle $\hat{A} = 28°$ est égal au petit angle de T.

C'est cet agrandissement qui tient compte des longueurs relatives des deux plus grands côtés de T que nous appelons une pseudo-proportion compensée dans le sens de la proportionnalité.

Dans le protocole 4-13;04-2, l'élève construit tout d'abord en utilisant la pseudo-proportionnalité un triangle ABC tel que

AB = 2.8 + 2,5 BC = 2.6 + 2,5 AC = 2.4 + 2,5

Il mesure les angles de T; il trouve 29°, 47° et 105°. Il mesure les angles de ABC; il trouve 34°, 51° et 95°. La contradiction observée apparaît nettement. Il déclare :
- Je crois que ça ne va pas parce que j'ai doublé puis j'ai ajouté.
Par la suite, il résoud le problème en utilisant uniquement la conservation des angles.

Pour en revenir à nos résultats globaux, si nous examinons tous les processus élémentaires dans lesquels intervient comme contrainte la pseudo-proportion et qui se terminent par une C.O. nettement dûe aux pseudo-proportions, nous les trouvons selon notre tableau 168 dans les protocoles :
5-13;00 , 4-14;01-½ , 4-13;02-2 , 5-11;06 , 6-11;04 , 5-12;09-2 , 5-12;10 , 4-15;08 , 5-12;04 , 4-13;04-2 , 3-14;03-1 , 3-14;00-1 , 3-15;00 .
Leur analyse montre que pour l'essentiel *c'est la conservation des angles qui contrecarre ou élimine les pseudo-proportions et permet ainsi l'accès à la proportionnalité dans toute sa généralité.*

Dans le domaine numérique pur, les pseudo-proportions sont aussi un élément déformant pour les proportions; l'élimination des pseudo-proportions est donc nécessaire à l'acquisition de la proportionnalité. Les conclusions auxquelles nous venons d'aboutir montrent que la conservation des angles caractérisant la similitude contribue à cette élimination. Donc *la géométrie contribue à l'acquisition de structures numériques.*

oooOOooo

PARTIE C

LE PROBLÈME PEN

- CHAPITRE XV -

LA TECHNIQUE D'EXPERIMENTATION DU PROBLEME PEN

1. L'ENONCE

Une feuille (21 x 29,7) est distribuée.

Sur cette feuille, est dessiné un pentagone régulier dont le rayon du cercle circonscrit vaut 10 cm.

L'énoncé de la question posée est :

"Quel est le nombre de triangles de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm qui ont leur trois sommets sur le bord du pentagone régulier?"

La figure 172 ci-après reproduit, à l'échelle 1/2 la feuille distribuée. Nous appelons problème PEN le problème dont nous venons de donner l'énoncé.

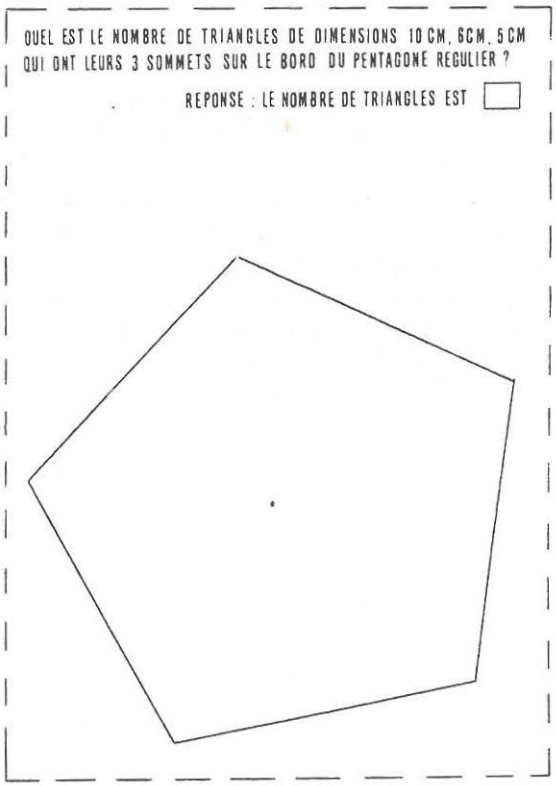


Figure 172

2. LA SOLUTION

La réponse à ce problème est 20.

Pour démontrer ce résultat, on constate tout d'abord qu'un triangle solution, de dimensions 10, 6, 5, a nécessairement ses trois sommets sur deux côtés consécutifs du pentagone, car la distance de deux côtés non consécutifs du pentagone est strictement supérieure à 10.

Le côté de 10 cm d'un triangle solution ne peut pas être porté par un côté du pentagone car les plus petits angles de T mesurent environ 22° et 27° tandis que l'angle de deux côtés consécutifs du pentagone est 108° ; ceci est immédiatement visible sur la première partie de la figure 173 ci-dessous.

Par contre, on peut placer le petit côté de 5 cm sur un côté du pentagone de telle sorte que le sommet opposé à ce côté soit aussi sur le bord du pentagone. Un mouvement de translation montre que, pour une orientation déterminée du triangle et un côté choisi du pentagone, il existe une et une seule solution.

Le même raisonnement est valable pour le côté de 6cm. On peut se référer à la deuxième et à la troisième parties de la figure 173.

Le groupe diédral D_5 nous oblige à multiplier ces deux solutions par 10, d'où la réponse[1].

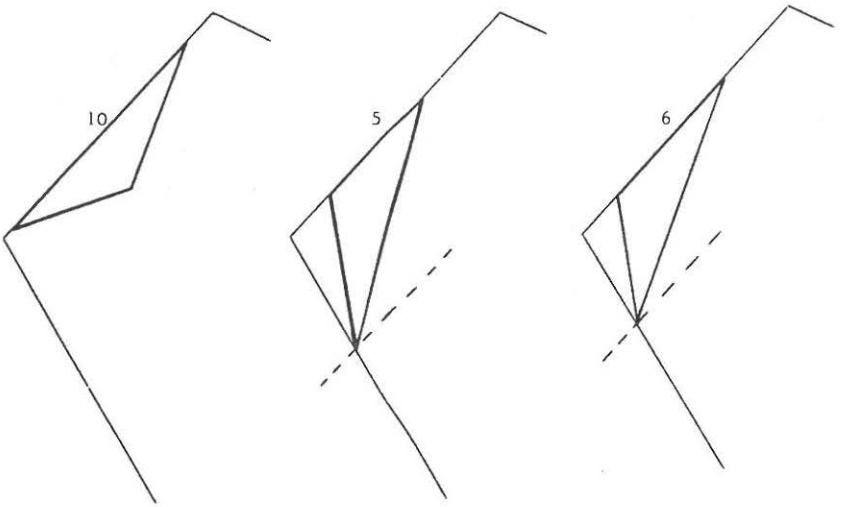


Figure 173

3. EXPERIMENTATEURS ET ELEVES

L'expérience qui est décrite ci-après a été menée par les dix enseignants suivants :
AUDIBERT G., AUGE A., BELLARD N., BRUNET R., CHAUVET B., CHEVALIER A., CONEJERO M.T., FABRE C., FAYOL M.[1], GROS C., LEENHARDT N.
Elle s'est déroulée durant les mois d'Avril et Mai 1981.
Cette expérimentation a eu lieu dans quatre établissements scolaires différents qui sont :

Le collège des Garrigues - MONTPELLIER
Le collège de LATTES - HERAULT
Le collège du CRES - HERAULT
Le lycée Montaury - NIMES - GARD

Elle a porté sur 74 élèves, répartis comme suit :
10 élèves de 6ème, 14 élèves de 5ème, 16 élèves de 4ème, 14 élèves de 3ème, 10 élèves de seconde C, 10 élèves de première D.
L'âge[2] des élèves évolue selon le graphique 174 ci-après. Nous représentons chaque élève par un trait de 2 mm. L'ordonnée de ce trait est l'âge de l'élève. Ces élèves sont regroupés par classe.

4. LE DEROULEMENT DE L'EXPERIENCE

Comme pour le problème CRI et le problème SIM, l'expérience se déroule dans un établissement scolaire durant une séance d'une heure. Au début de l'expérimentation, l'équipe des expérimentateurs prend en charge les élèves, se présente et s'installe (cf. pages 74 et 75).
Un expérimentateur chargé de donner la consigne distribue la feuille sur laquelle se trouve le pentagone (cf. page 289). Le pentagone est dessiné sur une feuille de papier semi-transparente[3]. Puis, il dit en montrant cette feuille :
"Sur la feuille que nous venons de distribuer est dessiné un pentagone régulier.
Voici les dimensions des côtés d'un triangle".
Il écrit alors au tableau : 10 cm, 6 cm, 5 cm et continue :
"Quel est le nombre de triangles ayant ces dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm qui ont leurs 3 sommets sur le bord du pentagone ?".

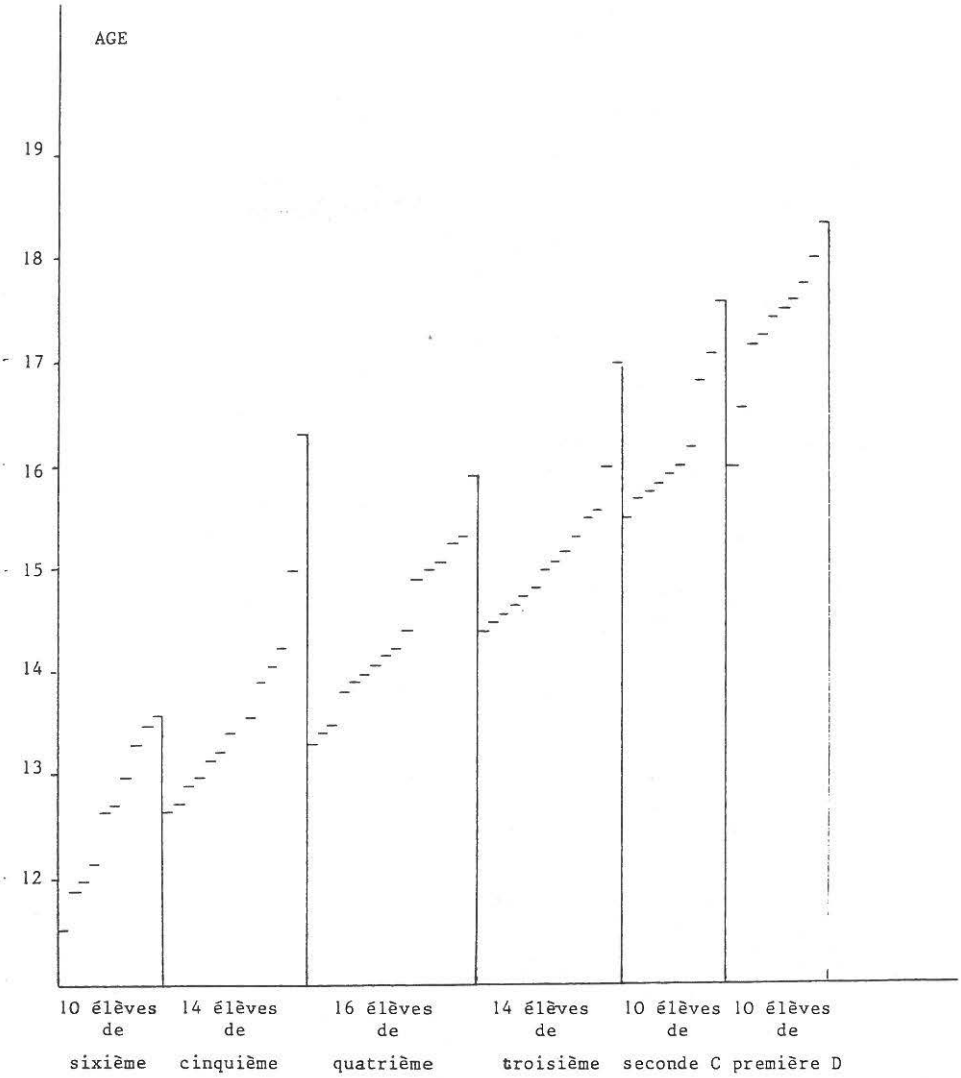

AGE
19
18
17
16
15
14
13
12
10 élèves de sixième
14 élèves de cinquième
16 élèves de quatrième
14 élèves de troisième
10 élèves de seconde C
10 élèves de première D

Figure 174

Il parcourt en même temps du doigt le bord d'un pentagone ; il ajoute :
"L'énoncé est écrit sur la feuille du pentagone régulier et le nombre qu'on vous demande est à indiquer dans le petit carré blanc".
Et il montre ce carré.
Pour terminer, il précise :
"On vous donnera autant de feuilles que vous voudrez ainsi que des feuilles de brouillon si c'est nécessaire, mais n'effacez pas s'il vous plaît.
Nous disposons d'un certain matériel. Nous vous prêterons un instrument si vous le demandez".
Les instruments de dessin sont cachés et ne sont délivrés qu'après une demande explicite.

Les expérimentateurs restent attentifs à ce que l'énoncé soit très vite assimilé sans erreur. L'énoncé de ce problème est d'une assimilation plus difficile que les précédents; l'élève confond côtés et sommets du triangle, le bord et un côté du pentagone, un triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm et des triangles ayant leurs 3 côtés égaux à 10, ou égaux à 6 cm, ou à 5 cm, etc ... Mais, après une ou deux lectures de l'énoncé, les ambigüités et les erreurs sont levées.

L'usage du magnétophone est systématique.
Pour faciliter la prise de note, l'expérimentateur dispose d'un petit carnet et sur chacune des pages est reproduit à l'échelle 1/2 la feuille distribuée à l'élève.

Pendant toute la durée de la recherche du problème faite par l'élève, l'expérimentateur prend des notes et sollicite des explications selon les modalités prévues pour le problème CRI; il essaie de comprendre le comportement de l'élève avant, pendant et après chaque dessin (cf. pages 76 et 77).

Durant les dix premières minutes, l'expérimentateur n'intervient que pour comprendre ce que veut faire l'élève.

Si, passé ce délai, l'élève reste bloqué plusieurs minutes sans aucune activité, l'expérimentateur intervient en disant : "Dessine le triangle dont les côtés sont 10 cm, 6 cm, 5 cm". Puis il n'intervient plus jusqu'à la 20ème minute que pour comprendre le travail de l'élève.

Si, passé ce nouveau délai, l'élève est encore bloqué pendant plusieurs minutes, l'expérimentateur fournit à l'élève une feuille semi-transparente sur laquelle est dessiné un triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm.

Si durant sa recherche, l'élève a vu qu'une solution le conduit automatiquement à cinq solutions, alors on peut consacrer les dernières minutes de l'épreuve à deux problèmes analogues. Dans le premier problème, on fournit un polygone irrégulier, ayant un axe de symétrie et dont tous les angles sont égaux. Dans le deuxième problème, on fournit un pentagone irrégulier dont tous les côtés sont égaux. Dans les deux cas, le reste de la consigne est inchangé. Ces deux derniers pentagones sont aussi tracés sur papier semi-transparent[1]. Nous les représentons respectivement aux figures 175 et 176 ci-dessous.

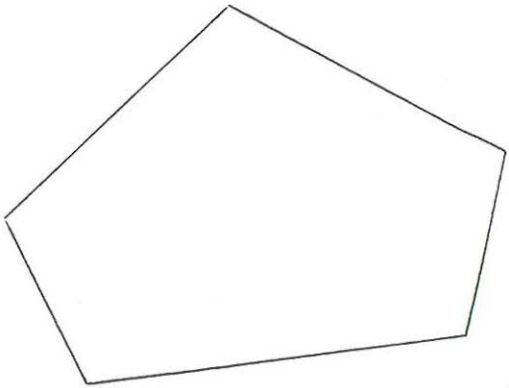


Figure 175

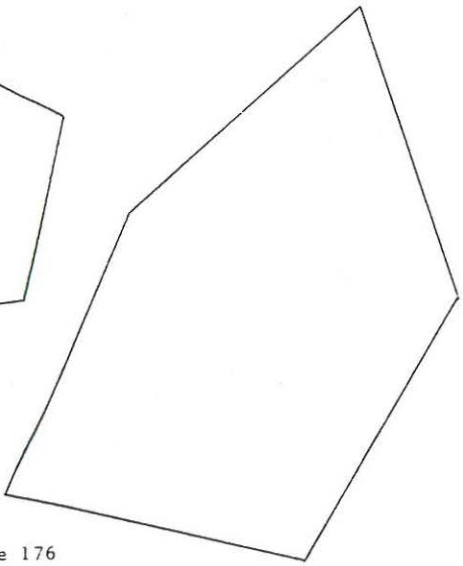


Figure 176

5. LES PROTOCOLES

Les protocoles sont rédigés avec les mêmes modalités que pour le problème CRI.

Dans la partie F, se trouvent **dix** protocoles du problème PEN numérotés[1]

6-12;02 5-13;05 5-13;11 4-13;04 4-14;11 4-15;04
3-15;02 3-16;00 2-15;06 1-17;09

Nous appelons respectivement

RIA THI LIV CAN CLA SYL KAY PYV LIV BRA

6. LES REPONSES

Les réponses au problème, fournies par les élèves, ont été essentiellement

0 ou 1 , 5 , 10 et 20

Nous donnons dans le tableau 177 ci-dessous la répartition de plus de 85% des réponses[2]. Dans ce tableau, les résultats sont indiqués en pourcentages approximatifs; la progression des résultats est alors évidente :

réponses \ classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère
20		5	5	[35]	[60]	[60]
10	30	[65]	[40]	30	20	20
5	[50]	15	25	20		
0 ou 1	20	15	20			

Tableau 177

7. LES PROCESSUS ELEMENTAIRES

L'existence de processus élémentaires est très nette dans le problème PEN. Nous continuons à utiliser la notion de processus élémentaire comme une hypothèse confirmée expérimentalement, comme une méthode d'analyse du déroulement de l'expérience, et comme une technique de rédaction des protocoles.
Nous constatons, de plus, que le nombre de processus élémentaires est le même, en moyenne, dans chacune de nos classes. Plus précisément, cette moyenne est égale à 10 dans notre classe de 1ère D et elle est de 13 dans chacune des cinq autres classes. Il semble donc que nous ayons là un rythme dans le travail de recherche de l'élève assez régulier tout au long de notre enseignement secondaire, ce qui renforce notre confiance dans cette unité rythmique qu'est le processus élémentaire; on peut confronter les processus élémentaires entre eux car ils sont, semble-t-il, de même nature.

8. LE PROBLEME PEN ET NOTRE PROBLEMATIQUE

Comme le montre la réponse à ce problème, proposée aux pages 289 et 290, nous constatons que les concepts de translation, rotation et symétrie jouent un rôle déterminant dans sa résolution. De plus, comme le triangle donné T est déterminé uniquement par les mesures de ses côtés tandis que le pentagone régulier se présente sous la forme d'un dessin, cela amène les élèves à construire un triangle connaissant les mesures des trois côtés; ils sont donc confrontés au troisième cas d'égalité[1]. Avec la translation, la rotation, la symétrie, la construction de triangles, le troisième cas d'égalité nous sommes bien dans le domaine de la géométrie euclidienne qui est notre champ conceptuel.

Nous avons envisagé dans le déroulement de l'expérience quatre interventions possibles :

- L'expérimentateur demande à l'élève de dessiner le triangle T dont les mesures des côtés sont données.
- Il donne le triangle T, dessiné sur une feuille semi-transparente.
- Il pose un problème analogue portant sur un pentagone irrégulier dont les angles sont égaux.
- Il pose un problème analogue portant sur un pentagone irrégulier dont les côtés sont égaux.

Les deux premières interventions ont pour but de relancer la recherche de l'élève, en posant un sous-problème dans le premier cas, en suscitant le décalquage dans les deux cas. La première intervention a été pratiquée trente fois; cela nous empêche d'analyser le processus de différenciation lié au sous-problème correspondant.

L'une ou l'autre des deux dernières interventions ont été pratiquées dix sept fois. Elles ont pour but de voir si, dans ses réponses, l'élève fait intervenir seulement le nombre de côtés du pentagone ou s'il prend en compte la régularité, et si cela le conduit aux concepts de rotation ou de symétrie.

Nous avons remarqué au cours de nombreuses observations[1] les difficultés rencontrées par les élèves pour coordonner, dans un même problème, des questions se rapportant à une classification des situations, et les questions se rapportant aux propriétés géométriques et aux transformations des figures. Cette coordination joue un rôle important dans le problème PEN puisque, d'une part, l'élève doit classer les triangles; il doit envisager des triangles ayant soit leur grand côté, soit leur côté moyen, soit leur petit côté porté par un côté du pentagone. D'autre part, il doit transformer les triangles par rotation, symétrie ou translation. Nous essayons à l'occasion du problème PEN d'analyser les difficultés dues à une telle coordination.

De plus, à travers cette coordination, nous pouvons examiner les démonstrations proposées par les élèves, donc examiner encore une fois la notion de preuve si difficile à saisir dans la pensée de l'élève.

Bien entendu, nous reprenons à l'occasion de ce problème l'étude des processus déjà introduits lors des deux précédents problèmes.

oooOOooo

- CHAPITRE XVI -

TRANSLATION ET ROTATION

1. TRANSLATION - MOUVEMENT DE TRANSLATION - MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

Nous avons envisagé dans notre démonstration à la page 290 d'utiliser un mouvement de translation rectiligne. L'élève fait-il, lui aussi, appel à un tel mouvement plan ?

Considérons le protocole 5-12;09 de ROU. Au cours de sa recherche, ROU prend un segment FG de 6 cm sur le côté IV du pentagone. Puis en deux coups de compas, elle construit le point H situé à 10 cm de F et à 5 cm de G.
Nous représentons ce triangle sur la figure 178 ci-après.

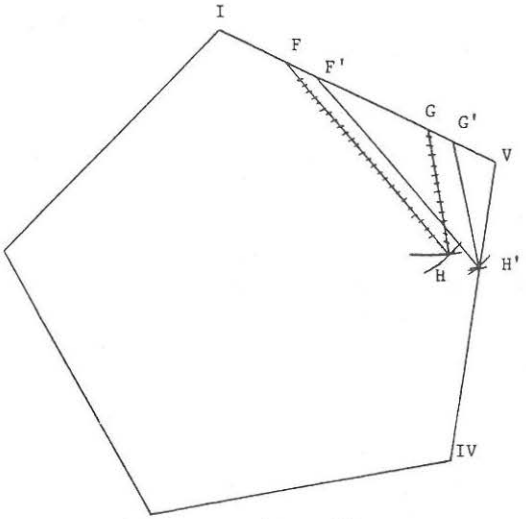


Figure 178

Elle relit encore une fois l'énoncé, constate que H n'est pas sur le pentagone, et déclare :

- Il faudra partir de I.

Elle prend alors une ouverture de compas de 10 cm, place la pointe en I, observe sans tracer et dit :

- Non, il faut rapprocher le triangle pour que H soit sur V IV.

Son compas ayant encore une ouverture de 10 cm, elle place la pointe sèche en F et la pointe du crayon en H. Elle déplace ensuite ce compas, en laissant ses deux pointes sur une ligne parallèle à FH, et en parcourant, de la pointe sèche, le côté I V, en direction de V. Elle s'arrête lorsque la pointe du crayon rencontre le côté V IV du pentagone au point H'. Elle obtient ainsi le segment F'H'. ROU place alors G' à 5 cm de F' et vérifie au moyen du compas que G'H' = 5 cm. Elle considère le triangle F'G'H'.

ROU - Celui-là marche.

Après cet exemple, il ne fait donc aucun doute que le mouvement de translation rectiligne existe chez nos élèves.

En effet, dix huit élèves[1] utilisent le mouvement de translation. Ils se répartissent dans chaque classe suivant le tableau 179 ci-dessous :

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Nombre d'élèves utilisant le mouvement translation	4	5	1	3	3	2	18
% approximatif dans chaque classe	40	35	5	20	30	20	25

Tableau 179

La seule conclusion qu'il nous semble raisonnable de tirer de ce tableau 179 est que le mouvement de translation rectiligne est utilisé de la sixième à la première.
Nous contrôlons encore que l'existence de cette notion chez l'élève ne dépend pas de l'expérimentateur puisque huit expérimentateurs sur les dix en rendent compte, et les deux expérimentateurs qui n'en font pas état dans leurs protocoles ont eu moins d'élèves à observer[2].

La question que nous nous posons maintenant est la suivante : est-ce que la translation avec ou sans mouvements de translation est utilisée[3] ?

Nous trouvons seulement deux protocoles,que nous avons comptabilisés avec les dix huit précédents où,l'usage de la translation est net et explicite. Ce sont les protocoles 3-15;02 et 2-17;07. Examinons successivement ces deux protocoles.
Dans le protocole 3-15;02, nous voyons KAY à la 22ème minute construire le triangle IIIAB que nous représentons sur la figure 180 ci-après. Ce triangle est tel que IIIA = 5 cm IIIB = 10 cm et AB = 6 cm. Elle déclare :
- Je le prends parallèle.
Elle construit donc la parallèle au côté IIIA passant par le point B; cette parallèle rencontre le côté IV V du pentagone au point K.

Elle mesure le segment BK et trouve 4,7 cm. KAY place sur le côté III IV du pentagone les points R et S tels que IIIR = 4,7 cm et RS = 5 cm. Le triangle RSK est la solution cherchée. Remarquons toutefois que cette construction est assez laborieuse et conduit à des erreurs que l'élève rectifie; pour avoir tous les détails de la procédure suivie par KAY on peut se référer au protocole qui se trouve dans la partie F.

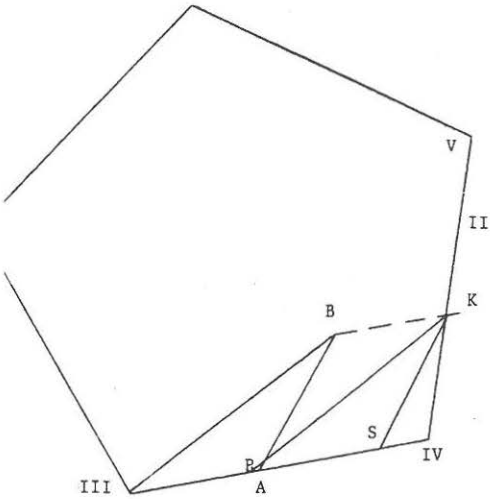


Figure 180

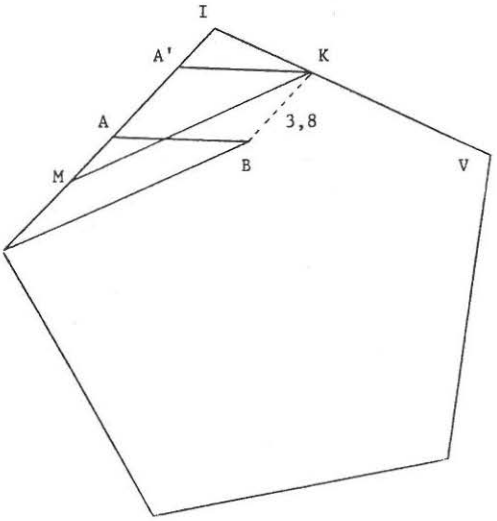


Figure 181

Dans le protocole 2-17;07, VER pratique la même démarche qu'on peut suivre sur la figure 181 ci-dessus, mais arrive un peu plus rapidement au résultat. Elle construit tout d'abord le triangle IIAB tel que IIA = 6 cm $A\widehat{I}B$ = 22° et IIB = 10 cm. Ce triangle est égal au triangle donné T. Elle mesure ensuite la distance de B au point K∈IV, tel que BK soit parallèle à I II, et ajoute :

- J'ai remarqué qu'il fallait le monter à 3,8 ; alors je mets à 3,8; je place 6 cm, je trace 22° et j'indique 10 cm.

Elle place donc le point M sur I II à 3,8 cm de II, puis le point A' tel que MA' = 6 cm. Elle construit la demi-droite issue de M et faisant avec I II un angle de 22°. Elle retrouve ainsi, en utilisant une certaine approximation, le point K avec MK = 10 cm.

Les protocoles de ROU, KAY et VER dénotent une certaine maîtrise dans l'utilisation de la translation ou du mouvement de translation. Dans le quatrième protocole que nous présentons maintenant, la maîtrise des mouvements de rotation et de translation est encore plus nette. Il s'agit du protocole 1-17;07 de LAV.

A la 11ème minute, LAV a déjà trouvé par transparence cinq triangles solutions que nous numérotons 1, 2, 3, 4, 5, et que nous traçons en pointillés sur la figure 182 ci-dessous. Elle a aussi repéré, toujours par transparence, en positionnant le triangle T sur la feuille où est représenté le pentagone, la solution 6. Elle se demande si le triangle 6 n'est pas en fait le triangle 1 de la série précédente.

LAV - J'essaie de savoir si ces deux triangles sont les mêmes. Pour moi, ce sont pas les mêmes.

Elle observe en déplaçant la feuille semi-transparente du triangle T sur son pentagone. Elle ne dessine aucun triangle.

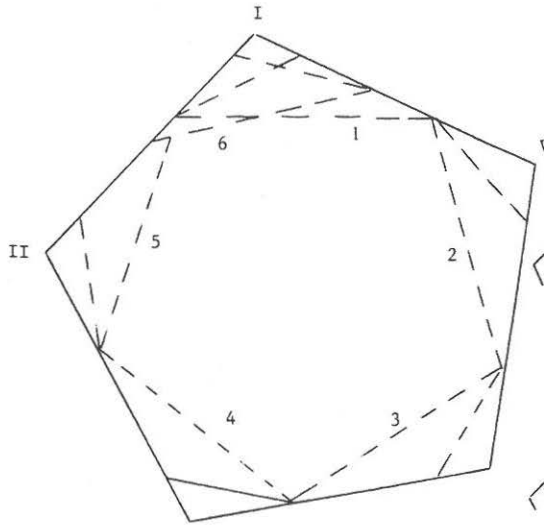


Figure 182

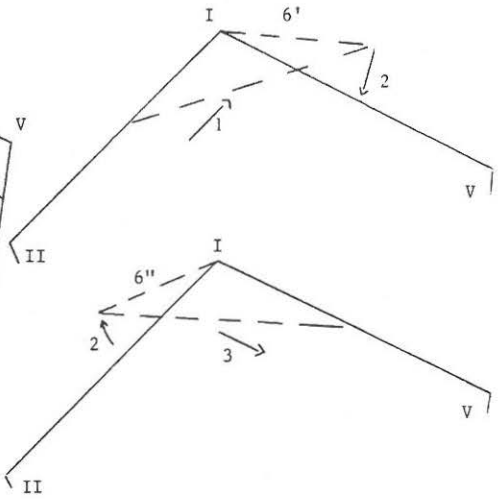


Figure 183

LAV - Je me demande s'il y a pas une histoire de translation et de rotation ...

Si je pars de ce triangle, je l'avance donc il y a une première translation.

A partir de cet instant, LAV montre comment elle passe du triangle 6 au triangle 1 par une succession de trois mouvements plan sur plan. Le premier est un mouvement de translation qui l'amène du triangle 6 au triangle 6', que nous représentons sur la figure 183 ci-avant.

LAV - Puis une rotation et enfin une autre translation.

Le deuxième est un mouvement de rotation autour du sommet I. Le troisième est un mouvement de translation dont la trajectoire est parallèle à I V et qui amène le triangle 6" dans la position 1.

LAV - Je tombe ainsi sur un autre triangle.

Parmi les dix huit protocoles comptabilisés dans le tableau 179, seuls ceux de ROU, KAY, VER et LAV que nous venons de citer abordent le concept de translation. Trois d'entre eux, ROU, VER et LAV abordent nettement aussi le concept de mouvement de translation. Les quatorze autres élèves n'ont qu'une pratique du mouvement de translation. La plupart du temps, cette pratique correspond à une idée de glissement rectiligne qui les conduit à voir un triangle solution.

Cette pratique du glissement rectiligne ne permet pas d'affirmer que le concept de mouvement de translation est nettement abordé. Nous trouvons par exemple un élève qui voyant le glissement et la solution au bout de ce glissement n'arrive pas à trouver les moyens de réaliser cette solution. Il s'agit de l'élève OLI dont la recherche est relatée dans le protocole 5-14;01. A la 25ème minute, OLI place deux points A_1 et A_2 distants de 5 cm, un peu au hasard sur le côté III IV du pentagone, comme l'indique notre figure 184 ci-après. Il construit alors au compas le point A_3 tel que A_3A_1 = 6 cm et A_3A_2 = 10 cm. Il constate que A_3 n'est pas sur le bord et indique par signe qu'il va faire glisser le triangle $A_1A_2A_3$ vers le sommet III du pentagone.

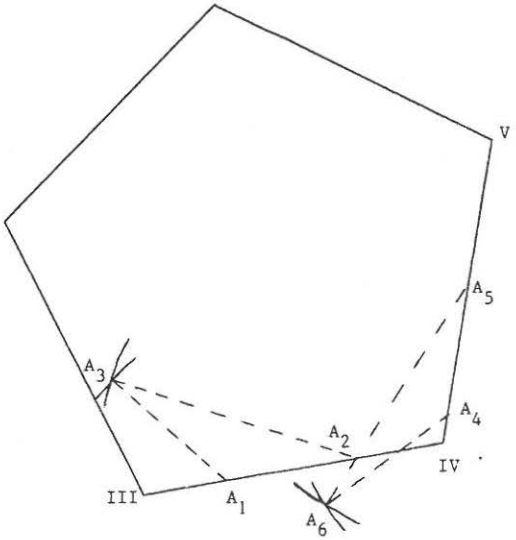


Figure 184

Mais, il réalise sa construction sur un autre côté, le côté IV V du pentagone. Il place A_4 à 1 cm de IV, A_5 à 5 cm de A_4. Il construit au compas le point A_6 tel que A_6A_4 = 6 cm et A_6A_5 = 10 cm. Ce point A_6, troisième sommet du triangle $A_4A_5A_6$ est à l'extérieur du pentagone. C'est l'échec. Il faut attendre la 43ème minute pour qu'il trouve une solution.

Deux autres faits confirment l'hypothèse que dans l'ensemble si la pratique du mouvement de translation existe[1] sa conceptualisation est loin d'être maîtrisée.

Tout d'abord, plusieurs[2] de nos dix huit élèves du tableau 179 sont surpris par la solution qui apparaît au bout du glissement rectiligne: "Tiens ça va !" dit, par exemple, l'un d'eux.
En second lieu, si on examine attentivement les 56 autres protocoles on constate que dans 17 d'entre eux[3], un triangle solution a été vu par l'élève au moyen du déplacement d'un triangle T, ayant les dimensions

données, sur le pentagone. En général, ce mouvement plan sur plan est observé grâce à la transparence de la feuille sur laquelle se trouve T ou encore parce que T a été préalablement découpé.

Nous retiendrons deux conclusions des analyses qui précédent.

- *Un élève sur deux pratique le mouvement plan sur plan et un élève sur quatre pratique le mouvement de translation. Deux élèves seulement utilisent la translation.*
- *Si la pratique du mouvement plan sur plan et en particulier du mouvement de translation existe chez nos élèves, sa conceptualisation est loin d'être maîtrisée.*

2. REGULARITE DU PENTAGONE OU ROTATION

a) Questions.

Une des propositions permettant d'avancer vers la solution du problème est la suivante :

S'il existe un triangle solution alors il existe quatre autres triangles solutions.

Cette proposition est-elle utilisée par l'élève ? Voit-il que la rotation joue dans cette proposition un rôle essentiel ? Remarque-t-il que la solution du problème est déterminée partiellement par le groupe cyclique d'ordre 5 ?

C'est pour répondre à ces questions que nous développons l'analyse qui suit.

b) Solution, multiple de 5.

Nous avons relevé la solution numérique proposée par chaque élève.

Le tableau 185 ci-dessous indique dans chaque classe le nombre d'élèves proposant comme solution un multiple de 5.

Classe	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Multiple de 5	8	12	11	12	9	8	60
% approximatif de chaque classe	80	85	70	85	90	80	80

Tableau 185

La régularité du pentagone est donc nettement utilisée par nos élèves dans ce problème.

c) Pas de régularité.

Examinons tout d'abord le protocole 4-14;00 de BOR. A la 24ème minute, l'expérimentateur donne à l'élève la feuille semi-transparente sur laquelle est dessiné le triangle T. BOR découpe ce triangle, puis en le plaçant sur le pentagone régulier, en différentes positions, elle dessine sept triangles, égaux à T et directement égaux entre eux. Nous représentons ces sept triangles sur la figure 186 en les numérotant selon l'ordre dans lequel ils ont été tracés par l'élève.

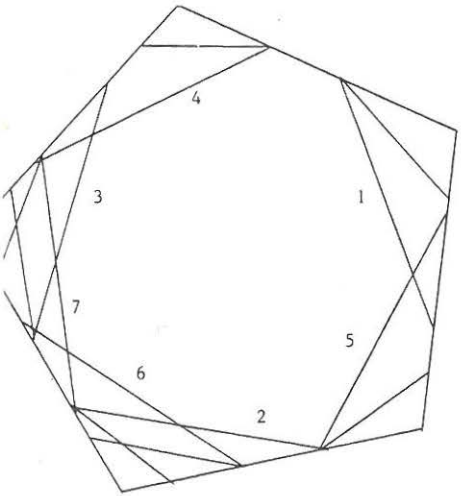


Figure 186

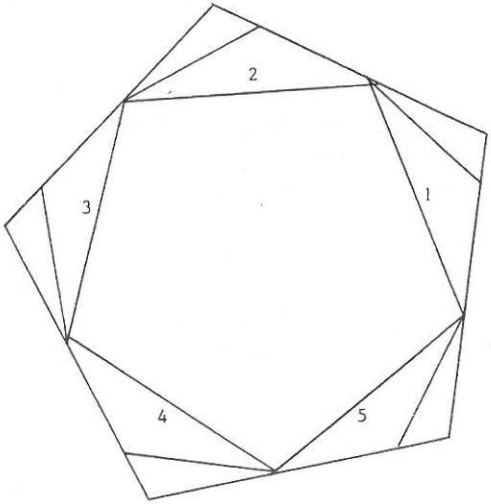


Figure 187

Cet ordre ne correspond à aucune régularité. En fin d'épreuve, l'expérimentateur interroge BOR :

EXPERIMENTATEUR - On te demande de dire combien il y en a ... Peux-tu prévoir ce nombre ?

BOR - Non ... Je crois qu'il y en a une infinité.

EXP - Alors tu ne pourrais jamais t'arrêter d'en dessiner.

BOR - Oh, si !

EXP - Ah oui ! Et à quel moment ?

BOR - Quand il n'y aurait plus de place.

Nous ne trouvons pas d'indice d'une référence à la régularité dans le protocole de BOR. Les protocoles dans lesquels il en est ainsi sont au nombre de huit[1].

d) 2 procédures, 5 catégories.

La régularité apparaît dans *deux procédures* distinctes.

Dans la première procédure, ou procédure P , l'élève représente cinq triangles placés avec régularité sur le pentagone. Selon notre langage d'expérimentateur, le deuxième triangle est approximativement le transformé du premier par une rotation autour du centre du pentagone, dont l'angle orienté mesure ± 72°. Chaque triangle tracé est le transformé du précédent par la même rotation.

C'est ainsi que dans le protocole 1-17;02, nous voyons BEL dessiner successivement les triangles 1, 2, 3, 4, 5 tels que nous les avons représentés sur la figure 187 ci-dessus.

Dans la deuxième procédure, ou procédure N , l'élève observe l'existence d'un triangle répondant pour lui à la question posée et annonce ensuite qu'il a cinq triangles solutions. L'existence du premier triangle peut être mise en évidence par transparence ou grâce à un triangle P découpé; ce premier triangle peut aussi être tracé.

Nous avons déjà vu à la page 303 comment KAY obtenait son premier triangle solution RSK (cf. figure 180). Aussitôt après elle ajoute :

- Je peux en placer un, deux, trois, quatre, cinq.

Elle montre qu'elle peut placer le petit côté du triangle sur les quatre autres côtés du pentagone et propose donc cinq comme réponse.

EXP - C'est ta réponse ?
KAY - Oui.
Cette élève suit la deuxième procédure que nous venons de définir. Les deux procédures précédemment définies nous permettent de classer les élèves en cinq catégories :

1. Ceux chez qui la régularité n'apparaît pas; ils correspondent aux huit protocoles déjà cités pages 309 et 310.
2. Ceux chez lesquels la régularité n'apparaît que sous la forme de la procédure P. Ils sont sept.
3. Ceux chez lesquels la régularité n'apparaît que sous la forme de la procédure N. Ils sont quatorze.
4. Ceux chez lesquels nous rencontrons les deux procédures sans qu'il soit fait référence à d'autres éléments de régularité. Ils sont treize.
5. Ceux pour lesquels la régularité ne se réduit pas à l'une des deux ou aux deux procédures précédentes. Ils sont trente deux[1].

Nous laissons désormais de côté la catégorie 1.

e) la procédure N

Si nous examinons les 59 protocoles qui constituent les catégories 3, 4 et 5, nous constatons que presque tous les élèves passent par la procédure N au moins une fois au cours de leur recherche. Un élève sur deux lorsqu'il passe par une telle procédure précise explicitement qu'il y a 5 ou 10 ou 20 triangles solutions parce qu'il y a 5 "côtés" ou "angles" ou "sommets" ou "faces" ou "coins".

C'est donc une régularité très sommaire qui intervient à ce moment là, constituée par le fait que le pentagone a 5 côtés ou 5 sommets. C'est ce type rudimentaire de régularité qui apparaît aussi très nettement chez certains élèves lorsqu'ils sont amenés à résoudre le problème portant sur un pentagone irrégulier. Ils annoncent, en effet, au premier abord, que, pour de tels pentagones, le nombre de solutions est un multiple de 5.

f) La procédure P.

Si nous comptons les protocoles présentant au moins une fois la procédure P_1 nous obtenons le tableau 188 ci-dessous :

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Nombre de protocoles avec procédure P	5	5	8	7	3	5	33
% approximatif par classe	50	35	50	50	30	50	45

Tableau 188

Cette procédure est donc présente de façon importante dans la recherche du problème et de plus elle est utilisée de la sixième à la première sans qu'apparaisse une évolution manifeste.

En définitive, qu'il s'agisse de la procédure P ou de la procédure N dans les catégories 2, 3 et 4, les élèves envisagent d'utiliser *la régularité sous une forme très peu conceptualisée; elle est fondée soit sur le nombre de côtés du pentagone soit sur une pratique répétée du positionnement d'un triangle. Le concept de rotation n'est pas abordé par ces trois catégories d'élèves.*

g) La catégorie 5.

Les élèves de cette catégorie 5 utilisent eux-aussi les procédures P et N, mais avec eux la régularité ne se réduit pas à ces seules procédures.

Examinons plus particulièrement les deux protocoles 5-13;00 et 2-16;00 respectivement de PER et PAT.

PER, au cours de sa recherche, ayant découpé le triangle T, arrive à trouver une première position répondant à la question. Il fait tourner son triangle découpé pour le placer sur chaque côté du pentagone, et annonce :

- Il y en aura 5 en tout.

Il dessine les cinq triangles dans l'ordre indiqué par notre figure 189 ci-dessous, puis il remarque que les triangles 1 et 2 ne correspondent pas.
PER a donc utilisé la procédure N, mais il se rend compte que la régularité n'est pas satisfaite; le triangle 1 n'est pas comme les autres; il fait intervenir une notion intuitive et qualitative de régularité sans pousser plus loin son analyse.

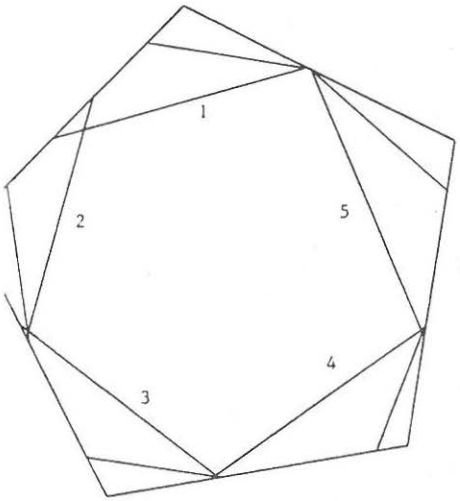


Figure 189

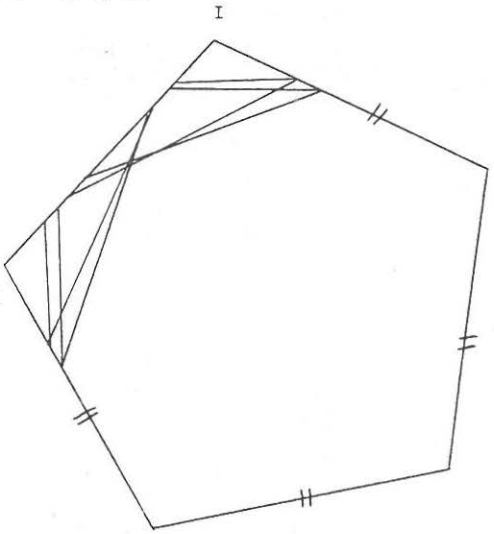


Figure 190

PAT, à la 24ème minute, a obtenu grâce au décalquage de T, les quatre triangles solutions portés par le côté I II du pentagone. Nous représentons sur la figure 190 ci-dessus ces quatre triangles.
Il indique alors qu'il y en aura "quatre par face"; il emploie le mot "face" pour désigner le côté du pentagone. Il précise qu'il peut employer le "même procédé sur toutes les faces puisqu'elles sont égales" et il coche de deux traits les quatre côtés du pentagone sur lesquels ne se trouvent pas ses triangles. Quelques minutes après, il affirme encore :

- Les angles sont les mêmes, donc c'est le même problème.
Il en conclut qu'il y a 20 triangles possibles et paraît tout à fait certain de sa réponse.
PAT a donc utilisé la procédure N mais le résultat annoncé, dû à la régularité, est justifié par l'égalité des côtés du pentagone et l'égalité de ses angles. Cette régularité est beaucoup plus élaborée que celle observée au paragraphe e), page 311 . Elle fait état de la conservation de la mesure des angles et des côtés de notre pentagone régulier.

Nous trouvons avec les protocoles de PER et de PAT les deux types de régularité envisagés par nos élèves de la catégorie 5. Cette régularité s'appuie sur les procédures P ou N complétées

- soit par une notion intuitive et qualitative de régularité,
- soit par la conservation des distances ou la conservation des angles.

Parmi les 32 protocoles de la catégorie 5, 7 font appel à une notion intuitive et qualitative de régularité et 25 font appel à la conservation des angles ou des distances.

h) La conservation des mesures des côtés ou des angles du pentagone

Nous allons examiner maintenant trois protocoles montrant à quel point la conservation des mesures des côtés et des angles du pentagone, liée à sa régularité, se met difficilement en place.

Examinons tout d'abord le protocole 5-13;02 de VAL.
VAL obtient, avec le pentagone régulier, grâce au découpage du triangle T, dix triangles solutions directement égaux entre eux; l'expérimentateur lui propose alors le pentagone irrégulier dont tous les angles sont égaux entre eux. VAL observe le deuxième pentagone, puis dit :
- Maintenant que j'ai trouvé la technique c'est facile.
Elle fait glisser son triangle découpé T sur le bord du pentagone irrégulier et trace les trois premiers triangles numérotés 1, 2 et 3 sur la figure 191 ci-après et ajoute :

- Il va y en avoir encore dix.

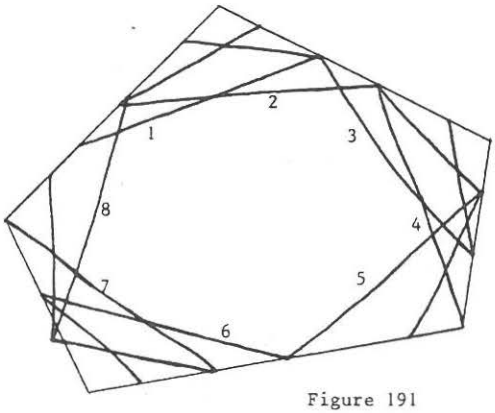


Figure 191

Elle continue à tracer ses triangles à main levée en les numérotant aussitôt. Elle obtient ainsi les triangles 4, 5, 6, 7 et 8 et s'étonne.

VAL - Il y en a moins que tout à l'heure ! Je ne comprends pas pourquoi !

Elle réfléchit.

VAL - Ah si ! Les côtés ne sont pas tous égaux. Il y en a deux de plus petits. Sinon on en aurait trouvé dix.

Elle écrit sa réponse : 8.

VAL envisage donc explicitement deux triangles par sommet, comme pour le pentagone régulier, ce qui est logiquement contradictoire avec le pentagone irrégulier proposé. Elle se heurte à une C.O., qu'elle analyse en faisant intervenir la non conservation des mesures des côtés du pentagone irrégulier. Elle ne fait pas appel à la conservation des angles du pentagone.

Examinons ensuite le protocole 4-13;06 de JEA.

JEA obtient, avec le pentagone régulier, les dix triangles solutions qui ont leur côté de 6 cm porté par un côté du pentagone. L'expérimentateur lui propose alors le pentagone irrégulier dont tous les angles sont égaux entre eux.

JEA - Je mesure ce côté le plus petit.

Si j'arrive à en faire un, il y en aura le même nombre : deux de chaque côté.

Il mesure le côté II III du pentagone irrégulier que nous représentons à la figure 192ci-dessous. JEA pense que s'il arrive à inscrire dans le pentagone irrégulier un triangle égal à T et dont un côté est porté par II III, alors sa solution est 10.

Il construit plusieurs triangles ABC avec AB = 6 cm et BC = 5 cm. Il mesure AC et constate chaque fois que AC < 10 cm; c'est la raison pour laquelle il dit :

- Je prends la mesure, mais ça fait toujours trop petit.
  Donc j'en élimine deux de ce côté.

JEA élimine les deux solutions qu'il avait envisagées sur le côté II III. Il ajoute en parlant du côté IV V :

- Ce côté c'est à peu près pareil j'en élimine deux autres; et comme je vois que ces côtés sont égaux alors je pense qu'il y en a plus que six dans le deuxième.

Par référence aux solutions trouvées avec le pentagone régulier, après avoir éliminé les deux solutions portées par II III et les deux solutions portées par IV V, compte-tenu du fait que les trois autres côtés du pentagone irrégulier I II, IV et III IV, ont même mesure que les côtés de son premier pentagone, il en conclut que le nombre de triangles solutions est six.

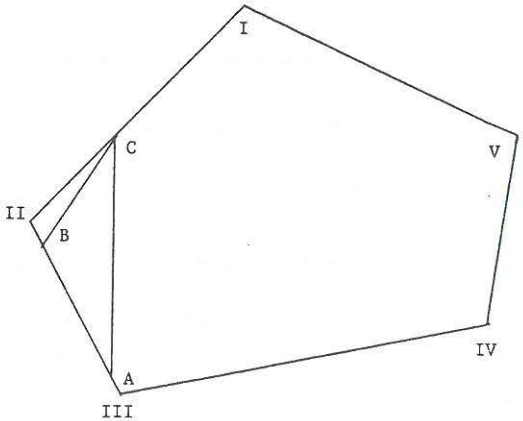


Figure 192

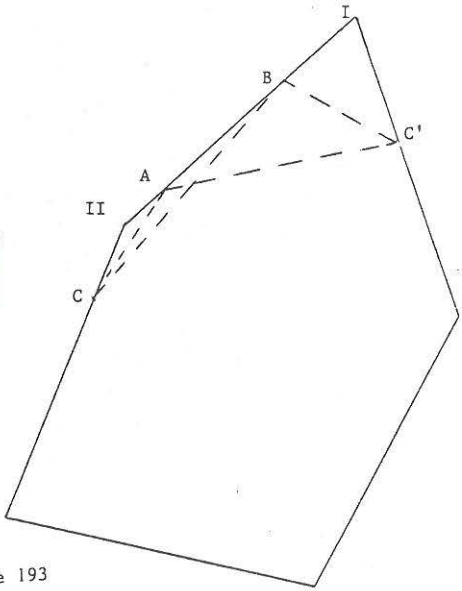


Figure 193

L'expérimentateur lui propose pour terminer le troisième pentagone. Il s'agit d'un pentagone irrégulier dont tous les côtés sont égaux et que nous représentons sur la figure 193 ci-avant.

JEA - Je fais toujours la même opération.
D'abord, je mesure les côtés ...
tous les côtés sont égaux; alors si j'arrive à en trouver deux différents sur un côté, alors ça en fera deux sur ce côté, deux sur ce côté ... et ça en fera dix.

Après avoir mesuré les côtés du pentagone irrégulier et constaté leur égalité, il essaie d'inscrire dans ce pentagone un triangle T dont le côté de 6 cm est porté par I II. Il estime que s'il arrive à placer un triangle ABC et un triangle ABC' sur le côté I II alors la réponse est dix. (cf. Fig.193) Mais la séance étant terminée, il ne peut achever son travail.

JEA dans sa recherche tient compte nettement et explicitement de la conservation des mesures des côtés. Mais le travail entrepris sur le deuxième pentagone irrégulier montre qu'il n'a pas pris conscience de la nécessaire conservation des angles du pentagone; on peut toutefois penser que des C.O. l'amèneraient à cette prise de conscience.

Examinons, pour terminer ce paragraphe, le protocole 2-05;06 de LIV. De la 31ème à la 42ème minute, LIV construit dans l'angle $\widehat{II\ I\ V}$ du pentagone les quatre triangles solutions que nous représentons sur la figure 194 ci-après.

Pour construire son premier triangle $D_1E_1F_1$ il place d'abord D_1 à 5 cm de I sur le côté I II du pentagone, puis $E_1 \in$ IV, à 6 cm de D_1 et enfin F_1 sur IV tel que $E_1F_1 = 5$ cm.

Son deuxième triangle $D_2E_2F_2$ est construit selon la même technique; $D_2I = 5$ cm, $E_2D_2 = 6$ cm et $F_2E_2 = 5$ cm. Pour construire son troisième triangle $D_3E_3F_3$ il place d'abord F_3 à 4 cm de I sur le côté IV du pentagone, puis $E_3 \in$ I II à 5 cm de F_3 et enfin D_3 à 10 cm de F_3. E_3 et E_2 sont confondus. Son dernier triangle $D_4E_4F_4$ est construit de façon analogue : 4 cm, puis 5 cm, enfin 10 cm.

Il déclare que la réponse au problème est 20.

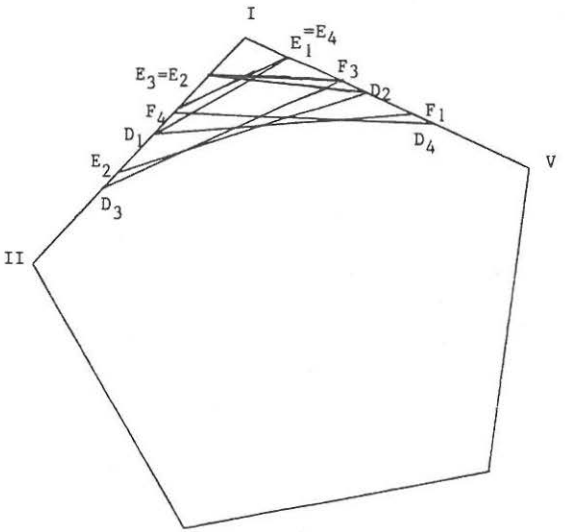


Figure 194

L'expérimentateur lui propose alors le pentagone irrégulier dont les angles sont égaux. Sans annoncer de résultat LIV réalise la figure 195 représentée ci-après. Pour cela, il utilise la même technique que précédemment. Il place le point A_1 à 5 cm de V sur le côté IV, puis $B_1 \in$ IV V, à 6 cm de A_1; il obtient ainsi le triangle A_1B_1IV comme triangle solution. Il place ensuite le point A_2 à 4 cm de V.

LIV - On peut pas faire celui de 4.

Il a bien tracé B_2 (B_2 étant d'ailleurs confondu avec B_1), à 5 cm de A_2, mais n'arrive pas à tracer le troisième sommet de son triangle car A_2 IV est inférieur à 10 cm.

Le fait que LIV essaie de construire son premier triangle avec un côté porté par un petit côté du pentagone irrégulier montre qu'il prend en compte plus ou moins consciemment la conservation des distances.

Sa technique de construction consiste aussi à conserver certaines distances.

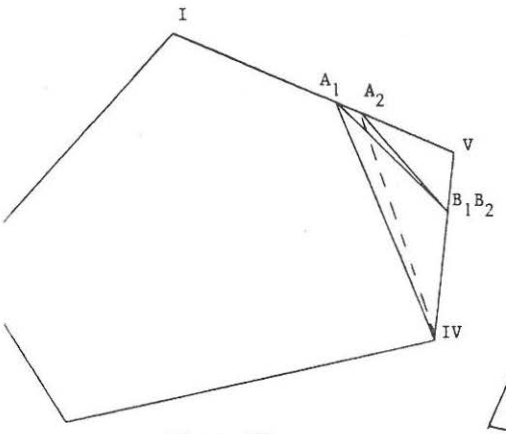


Figure 195

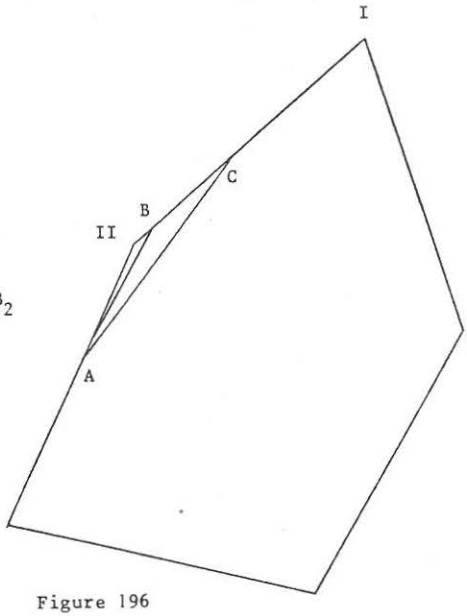


Figure 196

Lorsque l'expérimentateur lui propose le pentagone irrégulier dont les côtés sont égaux, LIV pense que c'est la construction aux alentours du point II qui lui pose un problème.

LIV - Si je le trace je verrais de suite.

Comme nous l'indiquons sur la figure 196 ci-dessus, il place A sur II III à 5 cm de II, puis il marque les points B et C tels que AB = 6 cm et AC = 10 cm.

LIV - Je crois que j'arriverai à le faire marcher, c'est une question de longueur, c'est pas une question d'angle.

Mais la séance s'achève.

De façon nette, LIV prend conscience que la conservation des mesures des côtés et des angles intervient dans la régularité. Mais il n'arrive pas à maîtriser et à coordonner les différentes notions.

D'une manière générale, chez nos élèves de la catégorie 5, ceux qui font appel à la conservation des mesures des côtés et des angles ne maîtrisent pas suffisamment ces notions pour les utiliser comme une caractérisation rigoureuse de la régularité. De plus, nous constatons que la prise de conscience nette de ces critères de conservation est facilitée par la présence de contradictions observées.

i) Conservation des angles et des distances

Examinons le protocole 4-14;11 de CLA. Après avoir obtenu le triangle solution RTS par décalquage du triangle T, CLA mesure la distance IT = 2,4. Elle trace alors le triangle R'S'T' que nous représentons ainsi que RTS sur la figure 197 ci-dessous. Pour cela, elle place d'abord T' tel que VT' = IT = 2,4 cm, puis T'R' = TR = 5 cm, enfin S'T' = 6 cm. Elle a donc reproduit R'S'T' à partir de RST en conservant certaines distances.

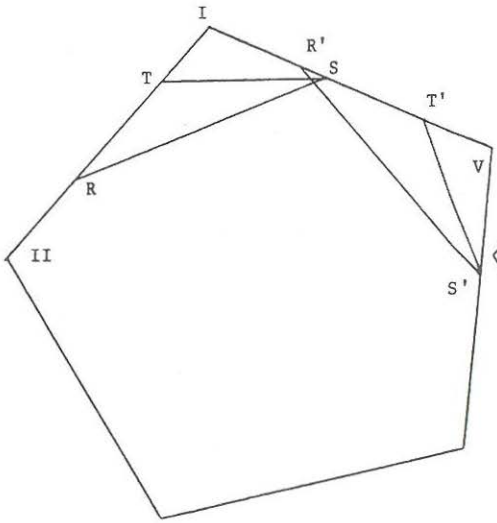


Figure 197

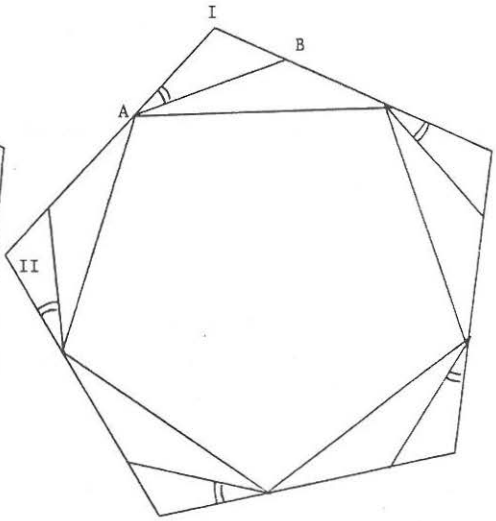


Figure 198

Examinons le protocole 2-15;11 de ROQ. ROQ trace les cinq triangles que nous représentons sur la figure 198 ci-avant. Elle procède comme CLA, en conservant les distances IA, IB, puis elle note que l'angle que fait AB avec le côté I II est conservé. Les cinq angles sont désignés par deux traits sur son dessin. La conservation des angles apparaît donc nettement.
La procédure suivie par CLA est la suivante : *elle obtient un premier triangle puis elle construit un deuxième triangle en conservant certaines distances liées à son premier tracé.* Nous trouvons plus de vingt[1] élèves qui emploient une telle technique; *ils conservent aussi aux figures leur orientation.* Ce qui nous permet de dire qu'ils ont une pratique de la rotation fondée sur la conservation des distances utilisant la mesure et sur la conservation de l'orientation utilisant le coup d'oeil.
La conservation des distances telle qu'elle est pratiquée par CLA, ne prend pas en compte l'égalité des angles du pentagone. Elle ne fait donc intervenir qu'une partie des éléments nécessaires à la constitution du concept de rotation et cela d'une façon très technique.
Nous comptons tous les élèves qui font appel à la conservation des distances, que ce soit comme conservation de la mesure des côtés du pentagone (paragraphe h) ou que ce soit selon la construction technique décrite dans ce paragraphe Nous comptons aussi les élèves qui utilisent la conservation des angles; à l'exception de ROQ il s'agit toujours, pour ces élèves, des angles du pentagone. Nous donnons dans le tableau 199 ci-dessous ces deux dénombrements.

Classes	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Conservation des distances	2	6	7	3	6	4	28
Conservation des angles	0	2	5	3	5	1	16

Tableau 199

Nous constatons que la conservation des distances apparaît plus fréquemment que la conservation des angles; cela est dû à la technique, décrite dans ce paragraphe, où il n'est fait usage que de la conservation des distances.
Nous notons aussi que la conservation des distances et des angles intervient tout au long de l'enseignement secondaire sans qu'on puisse faire état d'une évolution nette.

j) La rotation

Un seul protocole, le protocole 1-16;00 de PES, fait appel à la rotation. En effet, dès le début de sa recherche, il est catégorique :

PES - Si je peux en dessiner un je peux en mettre dix.
EXP - Dix ?
PES - Oui, 5 en tournant et 5 autres en faisant une symétrie.

Après avoir marqué les trois sommets de son premier triangle ABC que nous représentons sur la figure 200 ci-dessous, il ajoute :

- Je vais d'abord faire des rotations à partir de celui que j'ai.

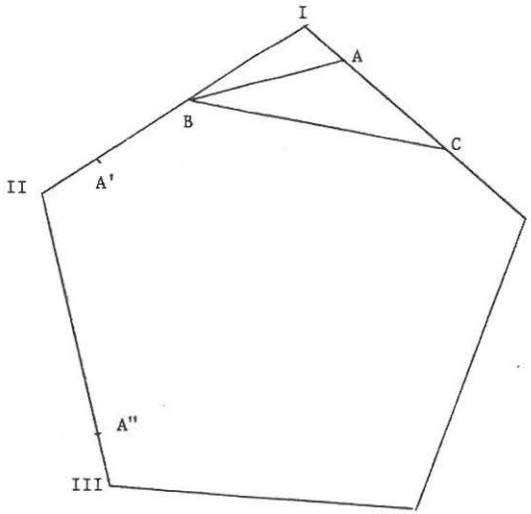


Figure 200

Il place alors les points A' et A" tels que A"III = A'II = AI.
Nous n'avons pas trouvé d'autres élèves faisant appel explicitement à la rotation.

k) Conclusion

Les analyses qui précèdent nous conduisent à quatre conclusions :

1. *La régularité apparaît chez l'élève sous forme essentiellement pratique.* En effet, la procédure P y joue un rôle important, (cf. paragraphe f) et la conservation des distances reste essentiellement une technique (cf. paragraphe i).
2. *La régularité s'appuie en premier lieu sur des notions statiques.* C'est en effet le nombre de côtés qui joue un rôle primordial (cf. paragraphe e); de plus, la conservation des mesures des côtés et des angles du pentagone ne correspond ni à un mouvement ni à une transformation (cf. paragraphes g et h); la seule transformation qui apparaît est la rotation proposée par PES (cf. paragraphe j).
3. Nous distinguons trois sortes d'élèves :
   - ceux chez lesquels *la régularité est totalement absente* (catégorie 1 du paragraphe d).
   - ceux qui utilisent une régularité rudimentaire et pratique *fondée sur le nombre de côtés ou le tracé répétitif.* Ils appartiennent aux catégories 2, 3 ou 4 définies au paragraphe d.
   - *ceux qui font appel à la conservation des distances et des angles avec une certaine prise de conscience.* La plupart d'entre eux appartiennent à la catégorie 5 définie au paragraphe d.

     Nous constatons que seuls ces derniers élèves *s'approchent d'une conceptualisation de la rotation et ce par le moyen de notions de conservation.*

4. *Nos élèves semblent encore assez loin d'accéder au concept de rotation. Il semble toutefois que le cheminement qui les mène à ce concept passe par une pratique du dessin et un usage de la conservation.*

ooo000ooo

- CHAPITRE XVII -

SYMETRIE ORTHOGONALE

1. LE CONCEPT DE SYMETRIE

Nous trouvons 26 protocoles dans lesquels la symétrie n'est absolument pas abordée.

Parmi les protocoles restants, un seul dénote une bonne maîtrise du concept de symétrie, c'est le protocole 1-16;00 que nous examinons plus spécialement. 38 protocoles introduisent nettement une notion de symétrie. 9 protocoles ne font état que d'une ébauche de la notion de symétrie.

Nous appelons PES, l'élève dont l'observation a donné lieu au protocole 1-16;00.

Après avoir dessiné un triangle dont les dimensions sont celles données par l'énoncé, PES, schématisant un pentagone et un triangle inscrit dans ce pentagone en un petit dessin fait à main levée que nous reproduisons à la figure 201 ci-après, annonce :

- Si je peux en dessiner un, je peux en mettre dix.

L'expérimentateur lui demande ce qu'il entend par dix. Il ajoute :

- Oui, cinq en tournant et 5 autres en faisant une symétrie; en retournant la figure, quoi !

. Cette première partie de la recherche du problème a duré quatre minutes. Durant les six minutes qui suivent, PES déplace par transparence le triangle donné T sur la feuille où se trouve le pentagone régulier. Il obtient ainsi une solution ABC que nous représentons à la figure 202 ci-dessous.

Figure 201

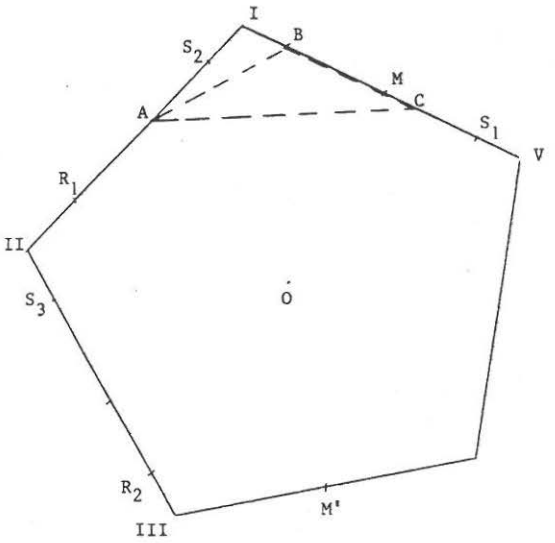


Figure 202

Il annonce la réponse : 20. Il explique rapidement ce qui se passe suivant que le petit, le moyen ou le grand côté de T se trouve sur un côté du pentagone.

A partir de la dixième minute, PES marque sur le pentagone des sommets de triangles répondant à la question. Comme il a déjà repéré, très approximativement, les sommets A, B et C du premier triangle trouvé, il déclare :

- Je vais d'abord faire une rotation à partir de celui que j'ai.

Il place ainsi deux sommets R_1 et R_2 de deux triangles, déduits de B par rotation, en prenant $R_2III = R_1II = BI$.

Puis aussitôt, il passe à la symétrie :

- Par symétrie, j'obtiens ce triangle.

- J'ai aussi une autre symétrie, celle par le sommet et le centre.

Pour tracer d'autres sommets, il effectue tout d'abord une symétrie par rapport au milieu M du coté I V, ce qui lui donne le point S_1, puis une symétrie par rapport à l'axe de symétrie M'OI du pentagone, ce qui lui donne le point S_2 ; S_1 et S_2 sont des symétriques de B, déterminés par S_1 V = S_2 I = B I. Il veut prendre ensuite II O comme axe de symétrie. Il place S_3. Puis il hésite car il se heurte aux difficultés propres au groupe diédral.

PES demande alors :

- Faut-il que je les dessine vraiment ?

L'expérimentateur le renvoyant à l'énoncé, il ajoute avec un large sourire :

- Ah, on ne le demande pas, même pas un ! ... de toute façon la réponse je la connais, c'est 20.

Nous constatons en définitive que PES fait immédiatement appel à la symétrie. Il identifie la symétrie au retournement de la feuille de papier sur laquelle est dessiné son triangle. Il détermine les points symétriques de B en conservant la distance B I. Et enfin, pour chacune de ses symétries, il explicite la position de l'axe de symétrie. Tout ceci nous fait dire que PES possède une bonne maîtrise du concept de symétrie.

La définition de la symétrie orthogonale plane se présente, le plus généralement, dans notre enseignement secondaire, comme la donnée d'une droite D et d'une transformation qui à chaque point M du plan fait correspondre un point M', tels que M et M' soient sur une même

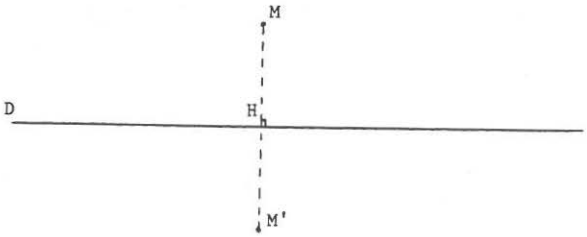


Figure 203

perpendiculaire en H à D avec HM = HM', et tels que M et M' soient de part et d'autre de D, s'ils ne sont pas tous les deux sur D. Le concept de symétrie se présente en sixième sous forme d'activité, il est explicitement au programme de quatrième et de chacune des classes du second cycle .

Il repose essentiellement sur la notion d'axe de symétrie tel que nous venons de le définir.

Pourtant, dans notre problème PEN, nous n'avons rencontré que deux protocoles faisant état d'un axe de symétrie, sans référence explicite d'ailleurs à l'orthogonalité.

Le premier est celui de PES que nous avons longuement décrit aux pages 326, 327 et 328.

Le deuxième est celui de LEV, numéroté 1-17;05. LEV trouve d'abord les quatre triangles solutions joignant les deux côtés de l'angle IV du pentagone; il marque sur les deux côtés de cet angle les sommets de ces triangles; il a ainsi quatre sortes de sommets α, β, γ, σ, comme il l'indique sur son dessin que nous reproduisons à la figure 204ci-dessous.

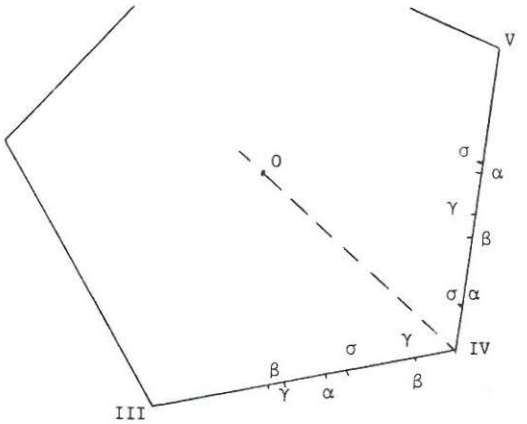


Figure 204

Il annonce alors la réponse :

- Quatre à chaque sommet, ça fera vingt en tout.

Un peu plus tard, il constate que ses points sont deux à deux symétriques par rapport à O IV.

Aucun autre élève ne fait référence explicitement ou implicitement à un axe de symétrie.

2. LE RETOURNEMENT

Les 38 protocoles qui introduisent nettement une notion de symétrie se répartissent en trois catégories dont les deux plus importantes numériquement regroupent chacune 17 protocoles. Nous allons analyser longuement ces deux catégories.

La première notion de symétrie correspond au retournement de T. Il s'agit d'un retournement de la feuille sur laquelle se trouve T et qui est utilisée par transparence pour décalquer des triangles solutions, ou bien d'un retournement du triangle T qui a été découpé au préalable. Nous appelons retournement cette notion de symétrie.

De façon plus précise, nous appelons retournement la procédure suivante : un élève obtient d'un triangle T_1 directement égal à un triangle T dessiné au recto d'une feuille. Appelons T' le triangle T vu par transparence au verso de la feuille. L'élève construit un triangle T_2 directement égal au triangle T'.

On dit aussi que T_2 est obtenu à partir de T_1 au moyen d'un retournement.

Ainsi LAV, dont le travail est présenté dans le protocole 1-17;07, trouve, tout d'abord, 10 solutions. Elle place son triangle T par transparence sur le pentagone dans les positions $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, indiquées par la figure 205 ci-dessous avec le petit côté sur I II, puis le côté moyen sur I V. Elle multiplie ces deux cas par 5. Puis examinant plus spécialement la position $A_1B_1C_1$, LAV retourne la feuille sur laquelle se trouve le dessin du triangle T et place donc, toujours par transparence son triangle en position $A'B'_1C'_1$, c'est-à-dire avec le côté moyen porté par I II, comme nous l'indiquons sur la figure 206 ci-dessous. Elle obtient ainsi une troisième solution.

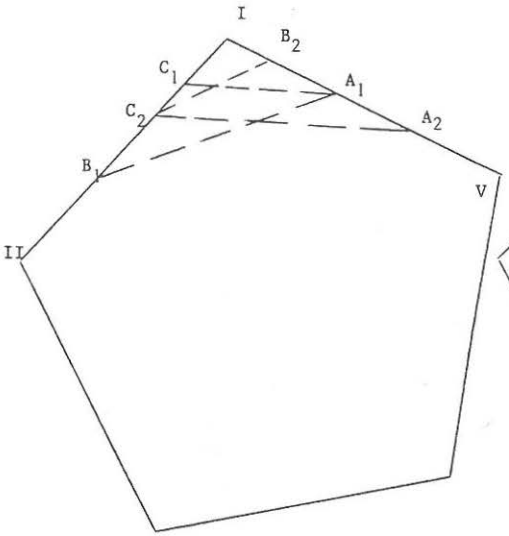


Figure 205

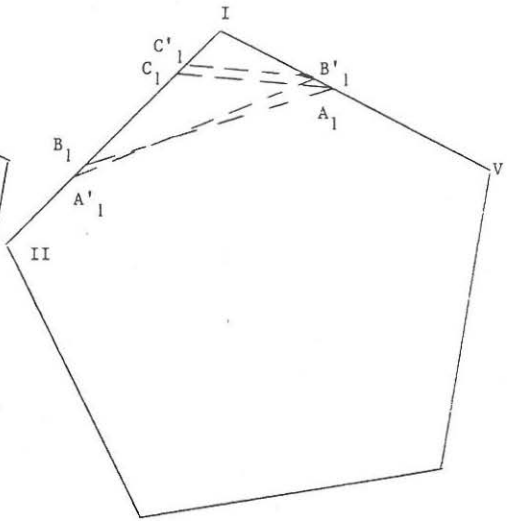


Figure 206

Nous disons que le triangle $A'_1B'_1C'_1$ a été obtenu par un retournement.

Examinons le protocole 5-12;08 de RAU qui nous donne un deuxième exemple de retournement. RAU au cours de sa recherche découpe un triangle

T, qu'elle utilise alors pour trouver des triangles dont les trois sommets se trouvent sur le bord du pentagone. Elle arrive ainsi à la 30ème minute à dessiner 7 triangles solutions que nous représentons sur la figure 207 ci-dessous.

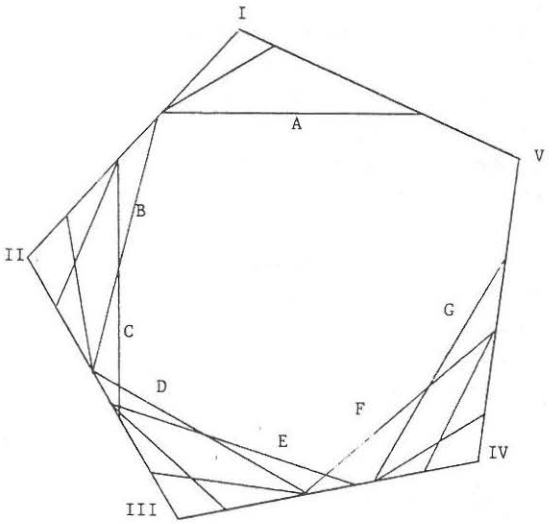


Figure 207

Les triangles A et G ont leur côté moyen porté par un côté du pentagone et ils sont inverses l'un de l'autre. Les 5 autres triangles ont leur petit côté porté par un côté du pentagone. Deux d'entre eux ont la même orientation, ce sont C et E. Les trois autres ont l'orientation inverse des deux premiers. Ce sont B, D et F. L'élève annonce alors que la réponse est dix :

- Oui des comme ça c'est 10, car j'en trouve deux dans chaque angle et comme il y a 5 angles ça fait 5 fois 2.

Et sa réponse définitive reste : 10.

Nous constatons de plus que la succession chronologique des triangles dessinés ne répond à aucun critère de symétrie, ou de classification suivant la dimension du côté porté par le bord du pentagone. Il n'y a donc pas de prise de conscience du retournement.

La différence entre LAV et RAU réside dans le fait que, contrairement à RAU, LAV a parfaitement conscience du retournement. Il a bien coordonné ce retournement avec les deux classes des triangles solutions. Il distingue bien, en effet, la classe des triangles solutions qui ont leur côté de cinq centimètres porté par un côté du pentagone et la classe de ceux qui ont leur côté de six centimètres ainsi placé. Chez LAV, il y a aussi une pratique du retournement, mais sans prise de conscience permettant une bonne coordination avec les autres contraintes du problème.

Ces deux exemples représentent les cas extrêmes où intervient le retournement. Examinons un cas intermédiaire du retournement, celui de PER.

Dans le protocole 5-13;00, rendant compte du travail de PER, nous trouvons les deux états caractérisant RAU et LAV. En effet, PER découpe le triangle T. Puis, comme RAU, il remarque qu'il y a deux possibilités pour le triangle T. Il peut placer soit le petit côté, soit le côté moyen sur le bord du pentagone. Il prévoit donc 10 solutions. Il dessine, alors, ses triangles solutions. Mais comme il trace des triangles tantôt avec le petit côté sur le bord du pentagone, tantôt avec le côté moyen, et tantôt d'une orientation, tantôt d'une autre, sans coordonner ces quatre possibilités, il obtient en définitive, 11 triangles.

Sa conclusion est qu'il a pu se tromper, car "il est facile de se tromper" dit-il. C'est à partir de ce moment là que la prise de conscience apparaît nettement. En effet, PER déclare :

- Je vais prendre une autre feuille et essayer seulement dans un angle.

Il trace alors un triangle avec le petit côté sur I II. Puis, il retourne son triangle découpé et trace un deuxième triangle avec le petit côté sur I V. Il recommence ce double tracé avec le côté moyen de T ce qui lui donne un troisième, puis un quatrième triangle. Nous reproduisons sur la figure 208 son dessin achevé.

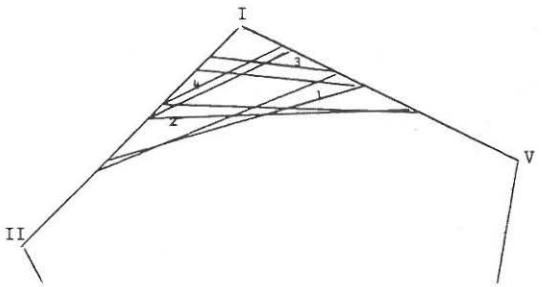


Figure 208

Les quatre protocoles où le retournement est utilisé sans prise de conscience sont les protocoles : 6-11;11 , 5-12;08 , 5-13;02 , 3-15;01 et les six protocoles où le retournement est parfaitement maîtrisé sont les protocoles : 3-14;09 , 2-15;10 , 2-16;00 , 2-16;10 , 1-17;07 et 1-18;04. Dans ces six derniers protocoles, les élèves trouvent la solution 20, dans les quatre premiers, ils ne dépassent pas le résultat 10. De plus, les âges de ces deux types d'élèves sont manifestement différents.

Tout ceci nous conduit à dire que l'acquisition du retournement commence par une période très pratique sans prise de conscience, suivie d'une période où la pratique du retournement est parfaitement maîtrisée. Cette acquisition s'étale tout au long de l'enseignement secondaire.

Parmi tous les élèves usant du retournement, quatre d'entre eux, qui en ont une bonne maîtrise, se posent la question de savoir si le triangle T est le même que le triangle retourné. Leur recherche est relatée dans les protocoles : 1-17;05 , 1-17;06 , 1-17;07 et 1-18;04. Ils arrivent, grâce à la spécificité du problème, à résoudre cette question. Le mot symétrie fait son apparition 4 fois parmi la douzaine de protocoles qui présentent une bonne maîtrise du retournement. Ce mot apparaît encore deux fois. Pour le protocole 1-16;00 déjà étudié, et pour le protocole 2-15;08 placé dans une autre catégorie de protocole où intervient une autre notion de symétrie.

Ajoutons encore que LEV, cité à la page 329 (protocole 1-17;05) a été compté parmi les élèves ayant une bonne maîtrise du retournement.

Les analyses précédentes portant sur le protocole 1-16;00, l'axe de symétrie et le retournement permettent l'affirmation suivante : le retournement est une notion de symétrie présente tout au long de l'enseignement secondaire et participant à la constitution du concept de symétrie.

3. LA SYMETRIE-TECHNIQUE

La deuxième notion de symétrie correspond à une construction de triangles T_2 obtenus en conservant des distances associées à un triangle T_1 précédemment représenté. Cette notion se référant à une construction très technique, nous l'appelons la symétrie-technique.

Afin de comprendre comment fonctionne cette symétrie-technique, analysons le protocole 2-15;06 qui rend compte du travail de LIV. Au bout de 10 minutes, LIV trace son premier triangle solution après avoir imaginé sa position. Nous représentons sur la figure 209 ci-après le triangle ABC.

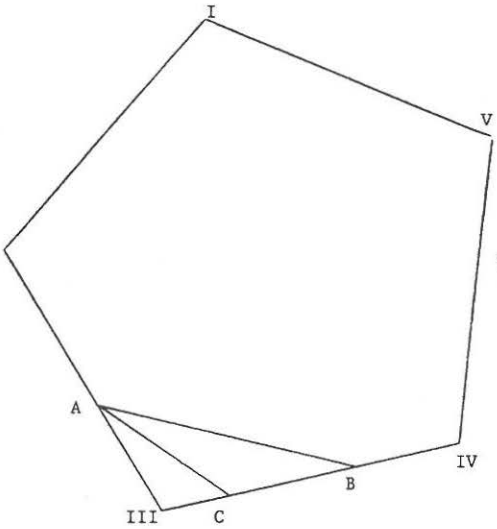


Figure 209

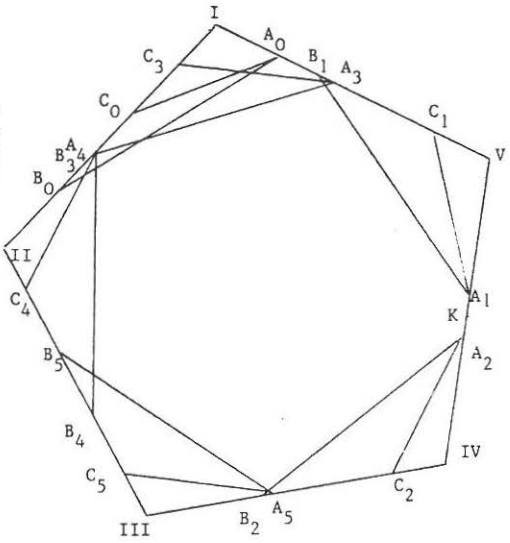


Figure 210

Puis il déclare en parlant de son triangle ABC :

- Je vais le refaire mieux.

A la 13ème minute, il réalise, sur une autre feuille, le triangle $A_0B_0C_0$ que nous représentons sur la figure 210 ci-dessus. Pour cela, il place d'abord A_0C_0 = 6 cm puis A_0B_0 = 10 cm. Il s'aperçoit alors que le triangle $A_0B_0C_0$ n'est pas égal au triangle proposé T.

Il introduit alors la technique de conservation de certaines distances associées à son premier triangle ABC de la figure 209. Après avoir mesuré la longueur A III, il place un point A_1 tel que V A_1 = A III = 5 cm. Puis il trace A_1C_1 = 6 cm, et enfin le point B_1 tel que A_1B_1 = 10 cm.

Il répète cette technique pour tracer successivement A_2 tel que IV A_2 = 5 cm, C_2 tel que A_2C_2 = 6 cm, et B_2 tel que A_2B_2 = 10 cm. Il précise d'ailleurs en traçant $A_2B_2C_2$:

- Je fais pareil.

LIV envisage alors de trouver 5 solutions : un triangle à chaque sommet. Nous avons avec $A_2B_2C_2$ le premier triangle obtenu par symétrie-technique. Mais LIV ne prend pas conscience de la différence d'orientation entre $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. Cette absence de prise de conscience est confirmée par les trois triangles $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, $A_5B_5C_5$ qu'il trace aussitôt. Parmi les cinq triangles solutions représentés sur notre figure 210, trois sont dans un sens et deux dans l'autre.
A la 18ème minute, LIV explique :

- Maintenant, je vais essayer de prendre l'inverse; en prendre six comme ça, tracer ...

Il se propose de "prendre six" centimètres et de placer un point K sur le côté V IV à 6 cm du sommet IV. Nous avons représenté son point K sur la figure 210 ci-avant. Mais il se rend compte alors qu'il ne pourra pas tracer un segment de 5 cm joignant le point K à un point de III IV :

- C'est impossible, parce que c'est plus grand. Cà peut pas faire 5 comme ça.

Examinons en détail la procédure suivie par l'élève en nous référant à la figure 209. Sur cette figure, il a AC = 6 cm, CB = 5 cm et A III = 5 cm, avec A $\in$ II III, et CB porté par III IV. Il veut permuter les côtés AC et BC en mettant maintenant AC sur le côté III IV et B sur le côté II III. Il veut donc procéder à une permutation très technique. Pour cela A, qui est sur le côté II III, à 5 cm de III, doit laisser sa place à B. B doit donc venir sur le côté II III mais à 6 cm de III (puisque dans sa logique 5 et 6 permutent). Mais, il s'aperçoit que si B, placé sur II III, est à 6 cm de III, alors il ne peut pas être à 5 cm d'un point III IV. Il dit "ça peut pas faire 5 comme ça".
L'attitude que nous venons de décrire montre que la réflexion de l'élève est centrée sur la technique.
Il aboutit à un échec. Mais tenace, et toujours centré sur sa technique de recherche, il finit par trouver. A la 25ème minute, il annonce :

- J'ai pris 5 et 6 et là il faut toujours mettre 4.

Il a réalisé le triangle $A_6B_6C_6$ que nous représentons à la figure 211 ci-dessous:

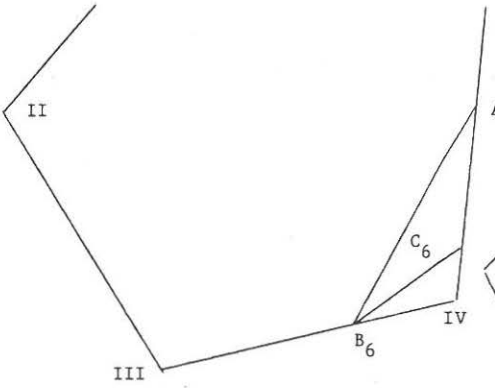


Figure 211

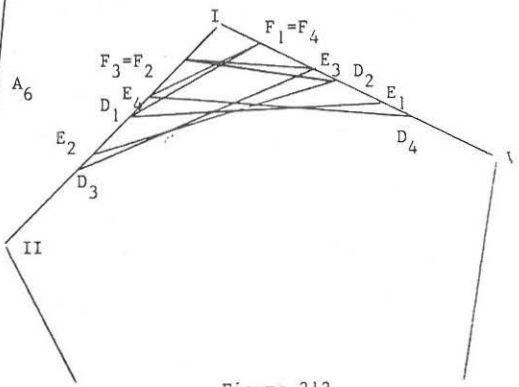


Figure 212

Pour cela, il a choisi $B_6IV = 4$ cm, $B_6C_6 = 5$ cm et $A_6C_6 = 6$ cm. Il dit d'ailleurs :

- J'ai pris cinq et six et là il faut toujours mettre quatre. Là, j'ai fait la méthode inverse. Au lieu que ce soit six, c'est cinq; dix il reste toujours pareil; là ça passe à quatre. J'ai l'impression que quand on fait comme ça celui-là doit être à un centimètre de moins.

Il a trouvé la technique. Il annonce cinq solutions qui viennent s'ajouter aux cinq précédentes.

Il cherche encore d'autres solutions.

Après cette longue période de plus de 20 minutes, très technique, durant laquelle il a utilisé une symétrie-technique de façon purement pratique, sans voir les deux orientations différentes existant pour ses triangles, il aboutit enfin à une prise de conscience de la symétrie-technique. Ainsi à la 31ème minute, il annonce :

- Je vais essayer d'arriver à 20. Je vais refaire le premier.

Il construit alors successivement les quatre triangles $D_1E_1F_1$, $D_2F_2E_2$, $D_3E_3F_3$, $D_4E_4F_4$ dans l'angle $\hat{2}$ du pentagone. Nous représentons ces triangles sur la figure 212 ci-avant.

Pour le premier triangle, il conserve toujours les mêmes distances I D_1 = 5 cm, D_1E_1 = 6 cm et D_1F_1 = 10 cm. Puis il précise :

- Pareil le même, à l'envers. Je vais essayer d'en avoir 20.

Et il construit avec la même méthode $D_2E_2F_2$ symétrique de $D_1E_1F_1$. Il réalise alors un troisième triangle $D_3E_3F_3$ avec maintenant le côté moyen porté par I II : I F_3 = 4 cm, E_3F_3 = 5 cm, F_3D_3 = 10cm. $D_4E_4F_4$ est construit par la même méthode symétriquement à $D_3E_3F_3$. LIV conclue :

- Donc ça me fait 20.
  Je sais qu'il y en a quatre, je le fais à chaque côté, ça va m'en faire 20.
  Je pense qu'il n'y en a plus.
  J'ai fait deux cas avec deux sous cas. J'ai fait un cas où je faisais 5 là, au début, et pris à l'envers; 5 là, 5 là; un cas où je faisais 4 là, 4 là.

Nous avons, durant cette deuxième période, un cas typique de symétrie-technique avec prise de conscience.

Ajoutons encore, pour en terminer avec l'analyse du protocole 2-15;06, que lorsque l'expérimentateur lui présente le pentagone irrégulier à côtés égaux, la recherche technique, qu'il n'achève pas d'ailleurs, reprend le dessus. LIV construit, comme le montre notre figure 213 un triangle ABC avec II A = 5 cm, AB = 6 cm et AC = 10 cm et ajoute :

- Je crois que j'arriverai à le faire marcher ...

Tout ceci montre que, chez LIV, la symétrie-technique n'est pas identifiable au concept de symétrie.

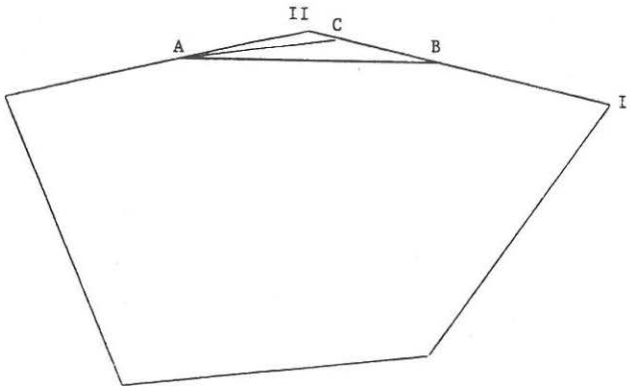


Figure 213

Comme pour le retournement, nous distinguons deux périodes dans l'acquisition de la symétrie-technique.

La première période consiste en une construction pratique sans prise de conscience de la différence entre les deux orientations possibles des triangles isométriques à T. C'est ainsi que ANN (protocole 2-15;09) réalise 8 triangles, dont les petits côtés sont portés par le bord du pentagone, avec 3 changements d'orientation au cours de ses huit tracés; elle commente ce travail par les phrases suivantes :

- Je voudrais faire par ordre, mais ... c'est pas facile.
- Il doit y en avoir une infinité.
- Là j'en ai cinq ... Comment j'ai fait ? Il en manque un.
- Il doit y en avoir un par là, mais je sais pas où le mettre.
- J'en ai huit. Il y en aura neuf ou dix mais pour les compter ...
- Je pourrai en faire un là, ça fera neuf.

Et, neuf est sa réponse.

La deuxième période aboutit à la maîtrise de la symétrie-technique. Cette symétrie technique est très nette dans les onze protocoles suivants :

5-13;07 , 4-13;05 , 4-13;06 , 4-13;10 , 4-15;01 , 3-14;10 , 3-15;04 , 3-15;07 , 2-15;08 , 2-17;07 , 1-17;02.

Nous avons vu avec le protocole 2-15;06 de LIV qu'un même élève pouvait parcourir successivement les deux périodes.

Nous aboutissons, pour la symétrie-technique, à une conclusion analogue à celle obtenue pour le retournement.

L'acquisition de la symétrie-technique commence par une période très pratique sans prise de conscience, suivie d'une période où la pratique de la symétrie-technique est parfaitement maîtrisée. Cette acquisition s'étale tout au long de l'enseignement secondaire.

Examinons le protocole 2-17;07 rendant compte du travail de VER. Nous représentons, grandeur nature, les dessins de l'élève sur la figure 214 ci-après.

Après avoir obtenu un premier triangle solution ABC, elle mesure IC et trouve 2 cm. Elle marque les points C' à 2 cm de I sur le côté I V; elle place ensuite les points A' et B' tels que C'A' = 6 cm et IB' = 4 cm.

Exp - Pourquoi à 4 cm ?

VER - Parce que sur le triangle dessiné il y a aussi un écart de 4 cm.

Elle a donc choisi A' de telle sorte que IB' = IB = 4 cm. Son triangle A'B'C' est donc construit au moyen de la symétrie-technique. C'est alors que la construction des triangles solutions va devenir encore plus technique. Elle admet tout d'abord que les angles du pentagone sont égaux. Puis, elle trace l'axe passant par I et les deux points d'intersection M et N des triangles ABC et A'B'C'. Cela donne un axe I X un peu hésitant car les trois points I, M et N ne sont pas tout à fait alignés. VER mesure ensuite les angles $\widehat{II\ X} = 59°$ et $\widehat{V\ I\ X} = 50°$. Elle construit ensuite la demi-droite V Y telle que $\widehat{I\ V\ Y} = 50°$ et $\widehat{IV\ V\ Y} = 59°$. Elle mesure encore IM = 1,5 cm et IN = 3 cm, puis construit le point M' sur V Y tels que V M' = 1,5 cm; elle marque encore les points R et S tels que V R = 2 cm et V S = 1,8 cm et envisage, en joignant RM' d'une part et

SM' d'autre part, de commencer la construction de deux nouveaux triangles solutions. C'est l'expérimentateur qui, compte-tenu de l'heure, arrête son zèle.

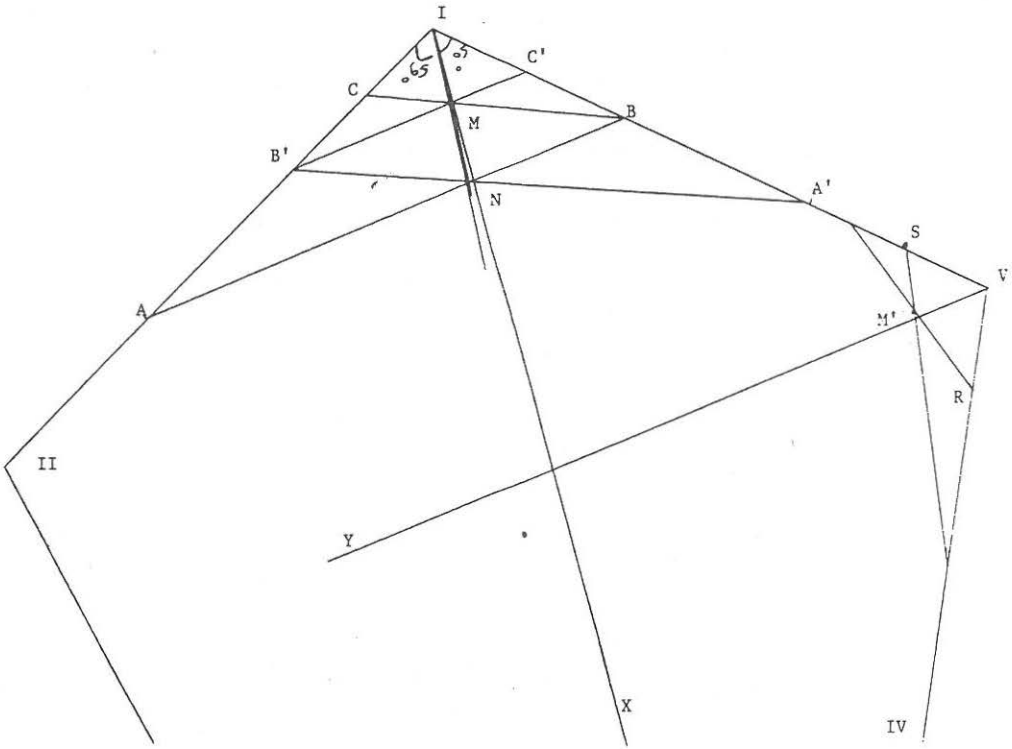


Figure 214

Nous voyons sur cet exemple combien le souci d'une construction technique, malgré toutes les difficultés et les erreurs qu'elle suscite, reste important chez l'élève. Ceci nous renforce dans l'idée que la symétrie-technique est un constituant indispensable à l'acquisition du concept de symétrie. Nous remarquons aussi sur ce même exemple que l'axe I X, comme l'axe V Y, est déjà une ébauche

d'un axe de symétrie, pourtant si peu présent dans les recherches de nos élèves (cf. page 305), mais une ébauche dont le développement semble paralysé par la technique. Ceci montre que la symétrie-technique est une notion de symétrie mais n'est pas encore le concept de symétrie parfaitement formé.

Un tiers de nos élèves pratique la symétrie-technique sur trois côtés consécutifs du pentagone sans vérifier aucunement que les angles du pentagone sont égaux. C'est ainsi que AND (protocole 4-13;05) construit les deux triangles ABC et A'B'C' au moyen de la symétrie technique respectant les égalités II C = I C', BC = B'C' et BA = B'A', sans jamais envisager l'égalité des angles : $\widehat{I} = \widehat{II}$, ou un quelconque moyen de reconnaître la symétrie de la figure constituée par les trois côtés III II, II I et I V du pentagone.

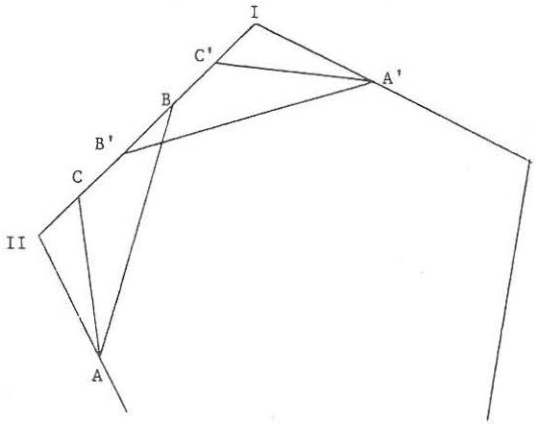


Figure 215

Ceci nous renforce dans notre hypothèse : la symétrie-technique n'est qu'une étape dans la formation du concept de symétrie.

Si nous examinons enfin le vocabulaire qui accompagne la symétrie-technique nous rencontrons une fois le mot "symétrie", une fois le

mot "envers" selon l'expression "faire le triangle à l'envers", 3 fois l'expression "autre sens" pour expliquer que le triangle doit être mis dans l'autre sens, une fois le mot "commutatif". Donc, l'existence et le faible développement du vocabulaire laissent penser que l'élève qui pratique la symétrie-technique, aborde, mais aborde seulement, l'orientation et la symétrie.

En définitive, comme pour le retournement, les analyses précédentes nous permettent d'affirmer que la symétrie-technique est une notion de symétrie présente tout au long de l'enseignement secondaire et participant à la construction du concept de symétrie.

4. COMPLEMENTS ET CONCLUSION

a) Indépendance entre retournement et symétrie-technique

Nous venons d'analyser deux notions de symétrie en nous référant tout d'abord aux 17 protocoles qui n'utilisent que le retournement et ensuite à 17 autres protocoles qui n'utilisent que la symétrie-technique.

Examinons le protocole 4-14;11 rendant compte du travail de CLA. C'est le seul protocole, avec 1-16;00, où il est fait usage à la fois du retournement et de la symétrie-technique.

Nous décomposons le travail de CLA en cinq phases.

Pendant la première phase qui dure 22 minutes, CLA utilise la symétrie-technique très consciemment.

En effet, il trouve au premier triangle ABC et il construit les quatre autres, ayant même orientation en plaçant toujours un petit côté sur le bord du pentagone. Nous représentons ces cinq triangles par des pointillés sur la figure 216 ci-après. Chacun des quatre

derniers triangles a été construit en conservant les distances C I, CB et CA. Puis, il construit le triangle A'B'C', en trait plein sur notre figure 216, en déterminant ses sommets au moyen des mesures C'III = CI = 2,4 cm; C'B' = CB = 5 cm et C'A' = CA = 6 cm. C'est donc la symétrie-technique qui est intervenue. Pour ce sixième triangle A'B'C' il utilise un stylo rouge alors qu'il avait tracé les cinq premiers triangles au stylo noir. Il dessine ainsi les quatre autres triangles ayant même orientation que A'B'C' en plaçant toujours le petit côté sur le bord du pentagone. Nous représentons aussi ces quatre triangles en trait plein sur la figure ci-après. L'ordre rigoureux dans lequel sont effectués tous les tracés et le changement de couleur lors du passage à la symétrie-technique nous permettent d'affirmer que CLA prend parfaitement conscience de cette symétrie-technique.

La première phase le conduit à répondre 10 au problème posé pour le pentagone régulier.

Durant une deuxième phase, CLA étudie le même problème mais avec le pentagone non régulier dont tous les angles sont égaux. Non seulement il construit les solutions deux par deux en appliquant la symétrie-technique avec la conservation des distances analogues à celle de la première phase, mais encore il place ses couples de triangles dans des positions symétriques par rapport à l'axe de symétrie du pentagone, comme le montre la figure 217 ci-après, où nous avons numéroté l'ordre dans lequel ont été tracés les triangles. Ce qui dénote la maîtrise de la symétrie-technique avec une parfaite prise de conscience; si le concept de symétrie n'est pas acquis nous n'en sommes certainement pas très loin.

Remarquons, toutefois, que les deux premiers triangles ont leurs côtés moyens et non leurs petits côtés portés sur le bord du pentagone irrégulier.

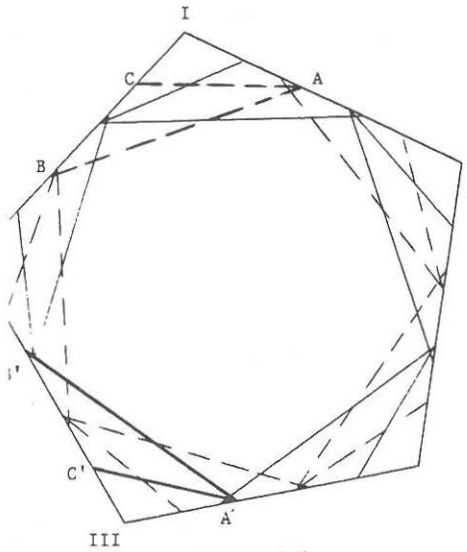


Figure 216

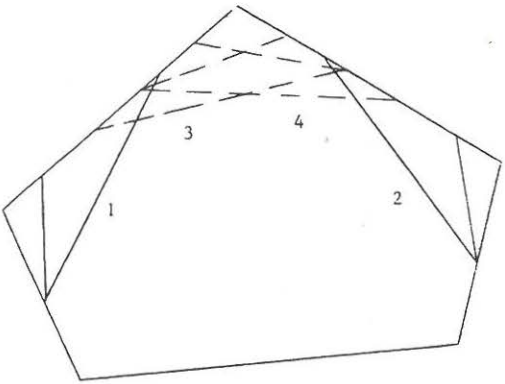


Figure 217

Durant la troisième phase, il place le côté moyen du triangle découpé T sur le côté II III du pentagone, comme l'indique la figure 218 ci-après. Il constate que la pointe sort et, que, par conséquence, cette position ne donne pas de solution. Il retourne alors son triangle T, place le petit côté sur II III, et constate à nouveau que cette position ne donne pas de solution. Il a donc utilisé durant cette troisième phase, le retournement.

Durant une quatrième phase, il construit encore deux couples de triangles, dont les petits côtés sont placés sur le bord du pentagone, au moyen de la symétrie technique. Nous représentons ces quatre triangles sur la figure 219 ci-après. Il donne alors huit comme réponse au problème portant sur le pentagone irrégulier dont tous les angles sont égaux.

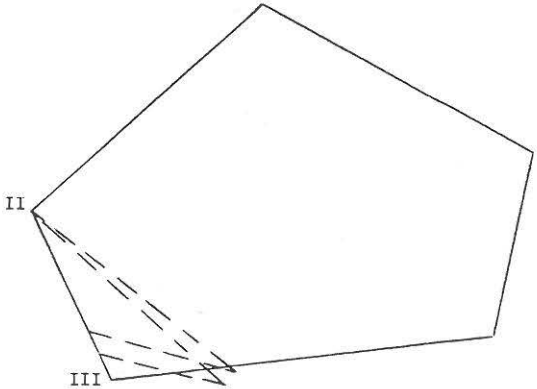


Figure 218

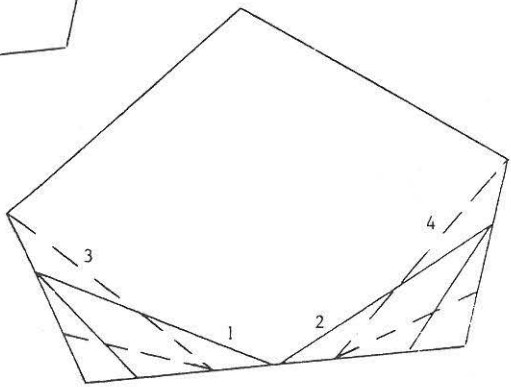


Figure 219

La cinquième et dernière phase est consacrée au problème portant sur le pentagone irrégulier ayant tous ses côtés égaux. En déplaçant le triangle découpé T sur le bord du pentagone, il trouve sept solutions.

Il retourne alors son triangle découpé et dit :

- ça fait encore sept !

Il numérote de 1 à 14 les emplacements trouvés, sans tracer les triangles, et ajoute :

- Sept dans un sens, sept dans l'autre : ça fait 14. Tout à l'heure j'aurais dû faire pareil (retourner le triangle) c'est dommage ! Il doit y avoir le double normalement.

Il prend alors ses deux feuilles de dessin comportant respectivement le pentagone irrégulier ayant tous ses angles égaux et le pentagone régulier. Il modifie les résultats déjà écrits en disant :

- Là, je double le chiffre, ça fait 16 et sur l'autre j'avais 10 je mets 20.

Dans cette dernière phase, CLA utilise le retournement. Puis, de façon rétroactive, il tient compte de l'existence de ce retournement pour multiplier par deux les résultats obtenus aux phases 3 et 4 . Or, la moitié de ces derniers résultats étaient déjà obtenus par symétrie-technique. Il n'identifie donc nullement le retournement et la symétrie-technique.

Rappelons le décompte obtenu jusque là portant sur le retournement et la symétrie-technique. 36 élèves utilisent le retournement ou la symétrie-technique. 17 d'entre eux n'utilisent que le retournement. 17 autres n'utilisent que la symétrie-technique. Un seul élève, CLA, utilise retournement et symétrie-technique mais comme deux notions différentes. Il ne les identifie pas. Un dernier élève PES utilise aussi ces deux notions, mais il les identifie et il possède une très bonne maîtrise du concept de symétrie.
Nous ajoutons donc un résultat à ceux précédemment obtenus.

Le retournement et la symétrie-technique sont deux notions de symétrie employées par nos élèves de l'enseignement secondaire de façon totalement indépendante.

b) Autres notions de symétrie

Nous n'avons trouvé que trois protocoles qui utilisent nettement une notion de symétrie qui n'est ni le retournement ni la symétrie-technique. Ce sont les protocoles 3-14;08, 3-15;02 et 3-14;07.

Dans le premier de ces protocoles, l'élève, après avoir vu par transparence un premier triangle solution, noté ABC sur la figure 220 ci-après déclare :

- Il peut y en avoir un de chaque côté.
Elle envisage une position symétrique par rapport à l'axe IO du pentagone, elle montre du doigt le contour imaginé du triangle symétrique A'B'C' mais comme elle essaie d'obtenir ce triangle A'B'C' par décalquage du triangle donné T directement égal à ABC, elle aboutit à une impasse sur laquelle s'achève son travail.

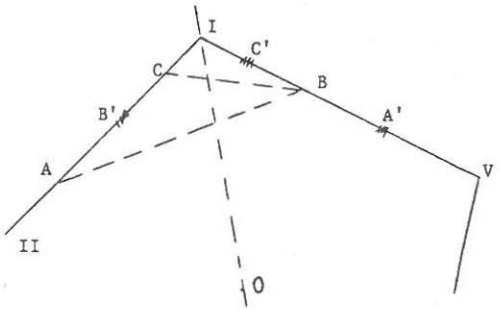


Figure 220

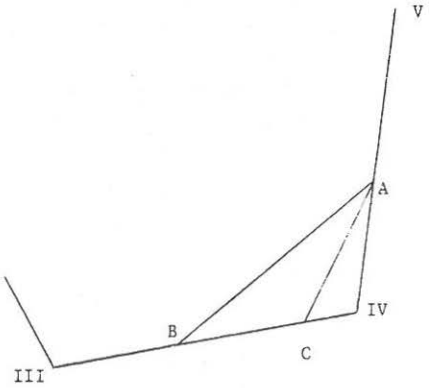


Figure 221

Dans le protocole 3-15;02, nous constatons que l'élève KAY ayant trouvé cinq solutions à partir du triangle ABC représenté à la figure 221 ci-dessus, pense alors à la symétrie :

KAY - Attendez !
Je peux en placer plus que cinq, je peux en placer dix.

EXP - Comment ?

KAY - Je peux mettre ça de l'autre côté et la pointe ici.

Elle indique sur sa figure, sans rien dessiner qu'elle peut placer le petit côté de 5 cm sur le côté IV V du pentagone et mettre le sommet opposé sur le côté III IV. Et ainsi, elle aura deux triangles sur chaque côté.

KAY - ... deux sur chaque côté.

Nous avons là deux élèves qui imaginent très bien la notion de symétrie, mais la première de ces élèves est complètement bloquée par l'orientation, tandis que KAY a peut-être besoin avant de maîtriser le concept de symétrie de passer par la symétrie-technique qui est certainement sous-jacente dans sa réflexion.

Notre troisième élève, MAG, dont le travail est relaté dans le protocole 3-14;07 dessine sur une même page le triangle T et le triangle T' d'orientation différente. Puis MAG, en utilisant de façon bien différenciée ses deux triangles T et T', par décalquage, trouve la réponse. La méthode que MAG suit est très proche de la méthode suivie par nos élèves pratiquant le retournement.

c) Ebauche de symétrie

Les neuf protocoles, qui nous restent à examiner, ne font qu'ébaucher la symétrie.

Nous trouvons tout d'abord trois protocoles comportant comme seul usage de la notion de symétrie des triangles tels que IAB et IA'B' que nous représentons sur la figure 222 ci-dessous. L'élève a simplement permuté deux côtés.

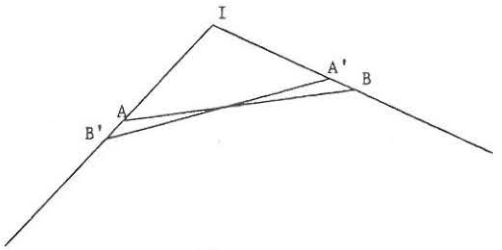


Figure 222

Nous trouvons ensuite trois autres protocoles dans lesquels apparaissent un symétrique, un point ou un triangle symétrique, sans que ce fait soit exploité dans la résolution du problème.

Les trois derniers protocoles court-circuitent la symétrie en utilisant les différentes manières de positionner les côtés du triangle donné T sur le bord du pentagone.

d) Conclusion

Nous avons classé nos élèves en quatre catégories principales :
- ceux chez lesquels *la symétrie est totalement absente*,
- ceux qui font usage d'une *ébauche de la symétrie* (cf. paragraphe 4c),
- ceux qui utilisent une notion de symétrie,
- celui qui maîtrise le concept de symétrie (cf. paragraphe 1).

Les deux principales notions de symétrie utilisées par nos élèves sont *le retournement* (cf. paragraphe 2) et *la symétrie-technique* (cf. paragraphe 3).

Nous résumons cette classification dans le tableau 223 ci-après. Pour comprendre la signification des titres :

autre notion de symétrie

symétrie-technique et retournement

on peut se référer respectivement aux paragraphes 4a et 4b. Nous avons indiqué dans ce tableau le nombre d'élèves constituant chaque catégorie ou sous-catégorie[1].

Les principaux résultats que nous dégageons de l'analyse qui précède sont les suivants :

1. Nos élèves utilisent essentiellement deux notions de symétrie, qu'ils n'identifient pas l'une à l'autre : le retournement et la symétrie-technique.
2. Ces notions se présentent tout d'abord sous forme d'une pratique sans prise de conscience; ensuite, cette pratique est maîtrisée.
3. Le retournement et la symétrie-technique sont utilisés de la classe de 5ème à la classe de 1ère sans qu'on puisse faire état d'une évolution manifeste.
4. Le retournement et la symétrie-technique participent à la constitution du concept de symétrie qui n'est pas acquis par nos élèves.

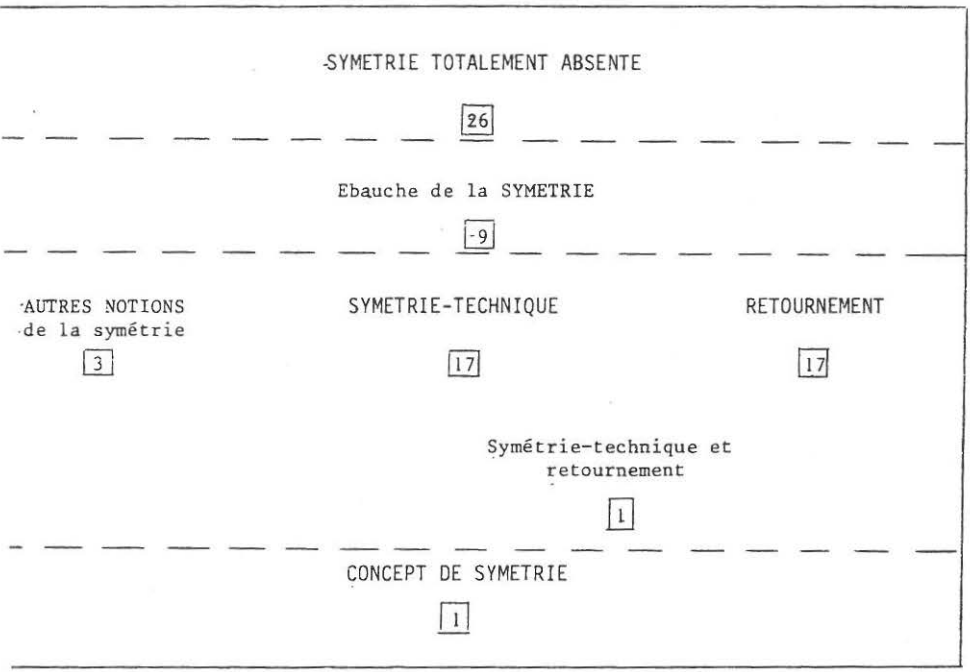


Tableau 223

oooOOooo

- CHAPITRE XVIII -

LA CONSTRUCTION DU TRIANGLE

1. LES DEUX PRINCIPALES PROCEDURES

La solution que nous avons donnée du problème, pages 289 et 290, repose sur la connaissance du triangle T et sur sa représentation par le dessin. Elle nécessite donc la résolution du sous-problème suivant :

Construire un triangle dont les côtés mesurent respectivement 10 cm, 6 cm, 5 cm.

Le déroulement de l'expérience (cf. page 291) précise que, dans certaines conditions, l'expérimentateur intervient en disant : "dessine le triangle dont les côtés sont 10 cm, 6 cm et 5 cm". Dans ce cas là, le sous-problème est donc posé par l'expérimentateur.

Nous distinguons donc parmi nos élèves :

- ceux qui posent, sans intervention de l'expérimentateur, le sous-problème énoncé et essaient de le résoudre. Ils sont au nombre de 33.
- ceux qui essaient de le résoudre à la demande de l'expérimentateur. Ils sont au nombre de 30.

- ceux qui n'abordent pas le sous-problème. Ils sont au nombre[1] de 11 .

Les élèves qui veulent le résoudre, pratiquent essentiellement deux procédures. *La première procédure est fondée sur l'usage du compas et la deuxième procédure utilise le tâtonnement.*

Examinons le protocole 5-16;04 de MYR. En cours de recherche, l'expérimentateur demande à l'élève de dessiner sur une feuille de brouillon un triangle ayant les dimensions données. MYR trace un segment de 10 cm, puis deux arcs de cercles. Le premier, centré en une extrémité du segment, a un rayon de 6 cm; le deuxième, centré en l'autre extrémité, a un rayon de 5 cm. Nous représentons son dessin sur la figure 224 ci-dessous. Les côtés du triangle sont obtenus avec une approximation inférieure au demi-millimètre (notre dessin est à l'échelle 1/2). MYR utilise la première procédure,dont nous avons parlée, fondée sur l'usage du compas.

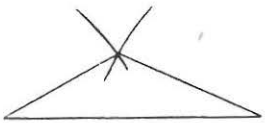


Figure 224

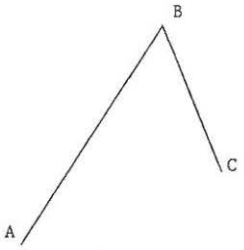


Figure 225

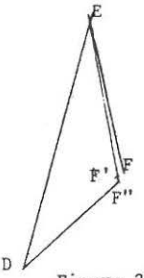


Figure 226

Examinons le protocole 3-14;08 de ATH. A la 10ème minute, l'expérimentateur demande à ATH de dessiner, sur une feuille blanche, un triangle dont les côtés mesurent 10 cm, 6 cm, 5 cm. Elle utilise le double décimètre,seulement pour tracer un segment AB mesurant 10 cm, puis un segment BC = 6 cm. ATH mesure alors AC et constate que AC n'est pas égal à 5. Elle reste pensive. Nous représentons sa construction sur la figure 225 ci-dessus. Toujours avec le seul double-décimètre elle entreprend une nouvelle construction que nous représentons à la figure 226 ci-dessus. Elle trace le segment DE = 10 cm, puis EF = 5 cm

de telle sorte que l'angle $\widehat{DEF}$ soit plus petit que l'angle $\widehat{ABC}$ de son précédent dessin. Elle mesure DF, et trouve 5,5 cm. Elle construit alors les deux points F' et F", F' étant à 6 cm de E et F" étant sur la droite DF à 5 cm de D. Elle trace le triangle DEF" et dit :

- ça va à peu près.

Nous disons que ATH a procédé par tâtonnement.

Avant de nous engager dans une analyse plus minutieuse, nécessaire à un décompte précis, nous pouvons dire que le nombre d'élèves qui utilisent la première procédure est à peu près égal au nombre d'élèves qui utilisent la deuxième procédure.

2. LE TATONNEMENT

L'analyse dialectique que nous avons définie au chapitre XIV, nous permet de distinguer ici trois types de procédures par tâtonnement.

Le premier type de procédure par tâtonnement est celui suivi par ATH (protocole 3-14;08) lors de la réalisation de la figure225 . L'élève trace un premier côté AB du triangle puis il place *au hasard* un deuxième côté BC et regarde si le troisième côté AC à la dimension voulue. Il obtient, en général, une C.O. puisque son champ de contrainte est presque sûrement contradictoire (cf. CLps page245). Considérons par exemple le protocole 6-12;09 de JAL. Lorsque l'expérimentateur lui demande de dessiner le triangle, JAL répond :
- Oui, je vais essayer, mais on n'a pas appris le triangle.

Elle fait successivement quatre essais que nous représentons à la figure 227 ci-dessous. JAL trace tout d'abord A_1B_1 = 10 cm puis B_1C_1 = 6 cm et constate que A_1C_1 ne mesure pas 5 cm.

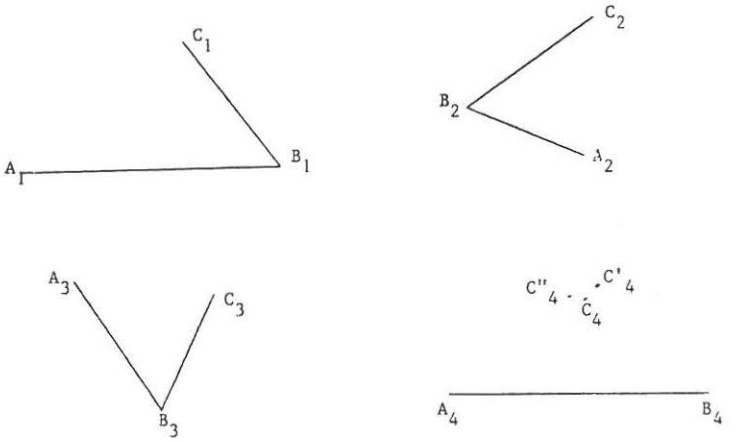


Figure 227

JAL - J'essaie avec les autres côtés.
Elle trace A_2B_2 = 5 cm, puis B_2C_2 = 6 cm; elle mesure A_2C_2 et dit :
- ça ne fait pas 10, ça dépend où on met le point C_2.
Elle fait d'ailleurs un signe de la main indiquant qu'il faut éloigner C_2. Elle réalise alors un troisième dessin $A_3B_3C_3$ en traçant les deux côtés de 5 et 6 cm en premier lieu. C'est un nouvel échec.
Dans son dernier dessin, elle trace tout d'abord le côté A_4B_4 = 10 cm, et place successivement trois points C_4, C'_4 et C''_4, tous trois à 6 cm de l'une ou l'autre des extrémités du segment A_4B_4, mais aucun des trois triangles ne convient. JAL est un peu découragée. L'expérimentateur est obligé de lui donner la feuille semi-transparente sur laquelle est dessiné T pour qu'elle puisse continuer sa recherche.
JAL procède essentiellement en utilisant le hasard. Le champ de contraintes de chaque processus élémentaire suivi par l'élève souffre d'une CLps.

JAL essaie de se dégager de cette CLps lorsqu'elle envisage d'éloigner C_2 et lorsqu'avec C_4, C'_4, C''_4 elle construit un nuage de points, mais elle n'y arrive pas. Ces efforts laissent toutefois entrevoir le deuxième type de tâtonnement que nous allons analyser.

Ce deuxième type de tâtonnement est celui suivi par PIO (protocole 4-14;05). De sa propre initiative, PIO décide de construire le triangle de dimensions 10 cm, 6 cm et 5 cm. Nous représentons sa construction sur la figure 228 ci-après . Il trace tout d'abord un segment AB de 10 cm; puis il fait pivoter sa règle graduée autour de B, en laissant la graduation zéro en contact avec le point B et place ainsi sept points, tous à 6 cm du point B. Il choisit ensuite parmi ces points celui qui est à 5 cm du point A; ce point C étant trouvé, il trace le triangle ABC. Les dimensions du triangle sont respectées à 2 mm près.
Pour réaliser sa construction, PIO fait intervenir un champ de contraintes muni d'une variable (cf. page 268). En effet, l'élève veut un triangle dont le premier côté AB soit égal à 10 cm, dont le deuxième côté BC soit égal à 6 cm et tel que l'angle $\widehat{ABC}$ prenne une valeur qu'il veut faire varier. Il construit ainsi une famille de sommets C ou encore une famille de triangles ABC. Il veut alors choisir parmi cette famille le triangle solution. Il est indéniable, comme nous l'avons déjà signalé(page 270)que cette procédure, par tâtonnement, correspond à une plus grande maîtrise que la simple procédure faisant appel au hasard qui est à la merci d'une CLps. Mais, pour un élève, utiliser un champ de contraintes muni d'une variable aussi clairement que le fait PIO n'est pas chose facile. C'est pour cette raison que nous sommes obligés d'introduire un autre type de tâtonnement.

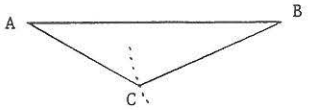


Figure 228

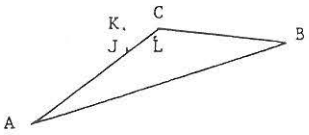


Figure 229

Le troisième type de tâtonnement est celui suivi par ANN (protocole 2-15;09). A la 14ème minute, l'expérimentateur propose à ANN de construire le triangle sur une feuille blanche; ce qu'elle va faire en utilisant uniquement la règle graduée. Nous représentons sa construction sur la figure 229 ci-dessus. ANN trace tout d'abord le segment AB = 10 cm puis elle place le point J tel que BJ = 6 cm; mais comme AJ = 4,4 cm, elle choisit un autre point K, tel que BK = 6 cm; là encore elle n'est pas satisfaite car AK = 4,8 cm. Elle place alors le point L tel que BL = 5 cm et mesure AL = 5,8 cm. Elle déplace légèrement la règle vers le haut pour tracer le point C tel que BC = 5 cm. Elle pousse un soupir de soulagement en vérifiant que AC = 6 cm.

La procèdure suivie par ANN montre qu'elle veut construire un triangle dont le grand côté est le segment AB = 10 cm et dont le deuxième côté issu de B peut être le côté de 6 cm ou le côté 5 cm et dont la direction est à déterminer. On peut dire que le deuxième côté est trouvé en faisant jouer deux variables : sa longueur et sa direction. Mais ce qui caractérise surtout la procédure suivie par l'élève c'est qu'elle se déroule sans maîtrise de la coordination de ces variables. Ces variables ne sont pas coordonnées de façon très consciente , la pratique semble l'emporter sur la prise de conscience d'où le soupir final. Nous disons dans ce cas là qu'il s'agit d'un tâtonnement faisant intervenir un champ de contraintes à plusieurs variables dont la coordination est insuffisante.

Nous venons de mettre en évidence *trois types de tâtonnement :*

1. *L'élève fait intervenir le hasard et son champ de contraintes est logiquement contradictoire de façon presque sûre.*
2. *Il utilise un champ de contraintes muni d'une variable.*
3. *Il utilise un champ de contraintes muni de plusieurs variables dont la coordination est insuffisante.*

Assez souvent, un élève au cours de sa recherche utilise plusieurs types de tâtonnement. La construction de ATH associée à la figure 225 est du premier type, tandis que sa construction associée à la figure 226 est du troisième type. JAL réalise ses trois premières constructions $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ que nous avons représentées sur la figure 227 selon le premier type de tâtonnement, mais sa dernière construction avec les points $C_4C'_4$ C''_4 correspond au troisième type.

Nous avons déjà remarqué, à la page 239 , que suivant le découpage des processus élémentaires choisi par l'expérimentateur, les champs de contraintes, donc l'analyse dialectique, se présentent différemment. Examinons, par exemple, ce que devient le processus suivi par ANN, représenté à la figure 229 , et que nous avons analysé comme faisant parti d'un même processus élémentaire. Si nous le décomposons en deux processus élémentaires, le premier étant consacré à la construction des points K et J, le deuxième étant consacré à la construction des points L et C, alors nous pouvons dire que chacune des deux procédures suivies utilise un champ de contraintes muni d'une variable. Si, par contre, nous décomposons la construction de ANN en quatre processus élémentaires consacrés successivement aux tracés J, K, L et C, alors nous pouvons dire que chacune des quatre procédures appartient au premier type de tâtonnement. Pourtant, nous avons choisi de présenter la construction de ANN comme appartenant au même processus élémentaire et donc comme un tâtonnement du troisième type. En effet, l'enchaînement des constructions des points J, K, L et C, associé , de plus sur un même dessin à un même segment AB, semble bien montrer que l'élève fait varier consciemment ce troisième sommet du triangle. Cette variation fait partie,

dès le début de la construction, du champ de contraintes. Nous pouvons donc difficilement adopter quatre processus élémentaires différents. De plus, les constructions des points J et K peuvent difficilement appartenir à un même processus élémentaire utilisant un champ de contraintes muni d'une variable, tel que nous le rencontrons dans la recherche de PIO. En effet, le passage de la construction de L après celle de K montre que la prise de conscience de cette variable est loin d'être acquise. On peut, par contre, pour la construction des points L et C parler plus facilement d'un même processus élémentaire utilisant un champ de contraintes muni d'une variable quelles que soient nos analyses. On peut toutefois affirmer que ANN n'utilise pas d'autres procédures que celles proposées par nos trois types de tâtonnement.

Nous disons de façon plus générale que pour construire le triangle, *un élève procède par tâtonnement s'il trace un premier côté du triangle et si ensuite il cherche à obtenir le sommet opposé à ce côté en utilisant un et un seul double décimètre.*

Nous trouvons 33 élèves qui essaient de construire un triangle par tâtonnement. 26 d'entre eux utilisent au moins un des trois types de tâtonnement définis plus haut de façon nette, les 7 autres les utilisent aussi, semble-t-il, mais leur procédure de recherche n'est pas assez explicite pour qu'on puisse nettement se prononcer.

17 élèves construisent leur triangle en se servant uniquement et de façon nette des types de tâtonnement définis à la page précédente; nous avons analyse attentivement les 17 protocoles correspondants. Lorsqu'un de ces élèves essaie de construire un triangle à différents moments de sa recherche, c'est-à-dire au cours de différents processus élémentaires, les types de tâtonnement utilisés se présentent toujours dans l'ordre chronologique suivant :

type 1 puis type 3 puis type 2.

Nous pouvons vérifier que cet ordre est respecté dans les recherches de JAL, PIO, ATH et ANN que nous avons précédemment analysées. Examinons encore le protocole 3-16;00 de PYV. Durant son premier processus élémentaire, PYV trace un segment AB de 10 cm, puis un segment AC de 6 cm. Il trouve alors que ça ne marche pas. En effet,

CB est égal à plus de 8 cm. Nous représentons ce premier dessin par la figure 230. Il recommence alors un autre dessin que nous représentons par la figure 231. Il trace tout d'abord un segment EF = 10 cm. Puis, il cherche à placer un point G devant se trouver à 6 cm d'une extrémité et à 5 cm de l'autre. Il trace dans ce but plus d'une dizaine de points.

PYV - J'arrive pas à trouver le point qui fasse 6 cm d'un côté et 5 cm de l'autre.

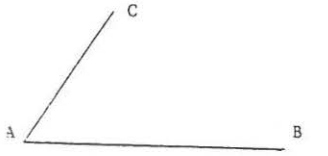


Figure 230

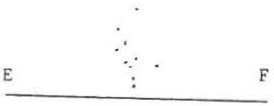


Figure 231

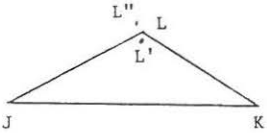


Figure 232

A la 3ème minute, il abandonne.

A la 6ème minute, l'élève réalise la figure 232. Pour cela, il trace un segment JK de 10 cm. Puis avant de trouver le sommet opposé L tel que JL = 6 cm et KL = 5 cm, il trace deux autres points L' et L" situés tous les deux à 6 cm de J mais non à 5 cm de K.

PYV a donc suivi successivement les trois types de tâtonnement : la figure 230, correspondant au type 1, a été réalisée en premier, puis c'est la figure 231, correspondant au type 3, qui a été tracée, et nous avons trouvé quelques minutes plus tard, avec la figure 232, le type 2.

Nos élèves utilisent assez rarement un seul type de tâtonnement au cours de leurs recherches. En particulier, nous n'avons pas trouvé d'élèves n'utilisant que le tâtonnement de type 1 pour construire le triangle car après avoir procédé ainsi, ils font assez vite intervenir une L.L.C. qui les conduit au type 3 ou même au type 2.

De plus, le tâtonnement, s'il est utilisé, aussi bien en classe de première qu'en classe de sixième, s'accompagne néanmoins pour les élèves plus âgés d'une efficacité qui lui permet de rivaliser avec la construction au compas. C'est ainsi que BRA (protocole 1-17;09)

obtient très rapidement, avec une approximation inférieure au millimètre, un triangle en utilisant seulement le double décimètre; son tâtonnement apparant porte sur une surface de moins d'un millimètre carré, comme le montre la réalisation de son triangle, représenté en vraie grandeur sur la figure 233 ci-dessous :

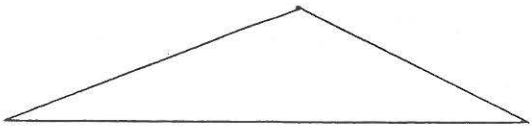


Figure 233

3. CONSTRUCTIONS AVEC INSTRUMENTS DE DESSIN

a) *Nous appelons construction au compas la construction qui consiste à trouver le troisième sommet du triangle comme intersection de deux arcs de cercles.*

MYR, dont nous avons décrit la procédure à la page 359 construit son triangle au compas. 24 élèves procèdent de cette manière pour construire leur triangle. Chaque élève n'utilise, au plus, qu'une seule des deux procédures, ou bien la construction au compas ou bien la construction par tâtonnement. Seul REE (protocole 5-13;07) tâtonne un peu avant de demander un compas qui lui permet de construire son triangle. La construction par tâtonnement ne débouche donc pas facilement sur la construction au compas.

Le tableau 234 ci-dessous indique dans chaque classe le nombre d'élèves qui utilisent la construction au compas.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Total
Construction au compas	1	10	3	6	2	2	23
% approximatif	10	65	20	45	20	20	30

Tableau 234

Nous constatons que c'est dans notre classe de cinquième que la construction au compas est manifestement la plus importante. D'après le B.O.E.N. (1977a) la construction du triangle au compas est nettement pratiquée en classe de cinquième. Les observations qui précèdent sont cohérentes avec l'hypothèse suivante : *la construction d'un triangle au compas est un apprentissage scolaire qui ne suit pas une progression pédagogique respectant les démarches de pensée de l'élève.*

b) Nos élèves utilisent d'autres constructions en dehors de deux principales que nous avons étudiées.

Trois élèves, correspondant aux protocoles 6-11;11, 6-12;08, 2-16;02 utilisent *deux double-décimètres* pour construire le triangle. C'est ainsi que DEB (protocole 2-16;02) essaie tout d'abord de construire un triangle par un tâtonnement de type 1 que nous représentons sur la figure 235 ci-dessous. DEB demande alors une règle graduée. Il trace un segment AB = 10 cm. Puis il place son double-décimètre en A et l'autre règle graduée en B comme l'indique la figure 236 ci-après. Il fait pivoter ces deux règles en laissant leurs zéros en contact avec les extrémités A et B et obtient ainsi le point C troisième sommet du triangle cherché.

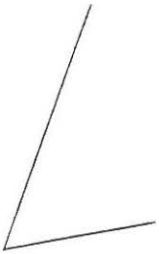


Figure 235

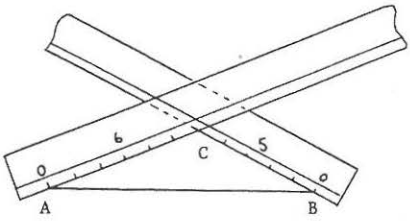


Figure 236

Les trois élèves qui utilisent la procédure faisant intervenir deux double-décimètres utilisent aussi, comme DEB, une procédure de tâtonnement.

Quatre élèves correspondant aux protocoles 6-12;00, 5-13;02, 3-15;02 et 3-15;04 utilisent *un compas et un double décimètre* pour construire le triangle. C'est ainsi que,dans le protocole 5-13;02 de VAL, nous voyons cet élève essayer de construire un triangle par un tâtonnement de type 1, puis demander un compas. VAL trace alors un segment AB de 10 cm que nous représentons sur la figure 237 ci-dessous. Puis elle trace un arc de cercle de centre B et de rayon 6 cm. Elle utilise ensuite le double décimètre pour trouver sur cet arc un point C situé à 5 cm de A.

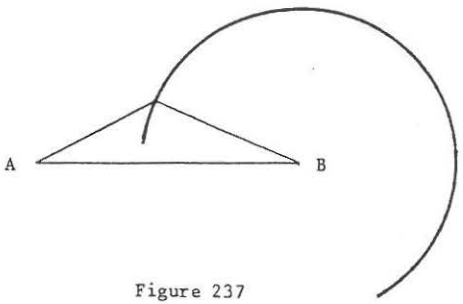


Figure 237

c) En définitive, nous avons mis en évidence trois types de procédures par tâtonnement et trois procédures utilisant des instruments de dessin. Nous avons pu constater que certains élèves passaient assez facilement au cours de leur recherche d'une procédure à une autre, c'est le cas par exemple de PYV. Nous constatons encore qu'il semble facile d'associer certains couples de procédure dans une progression pédagogique, même si nos élèves n'ont pas réalisé cette association. On peut notamment associer la procédure suivie par PIO (cf. page 363 et figure 228) qui place une famille finie de points en arc de cercle, et celle suivie par VAL (cf. page 371 et figure 237) qui trace un arc de cercle. Dans le tableau 238 ci-dessous, une flèche joignant une procédure à une autre procédure indique qu'une progression pédagogique nous semble possible entre ces deux procédures.

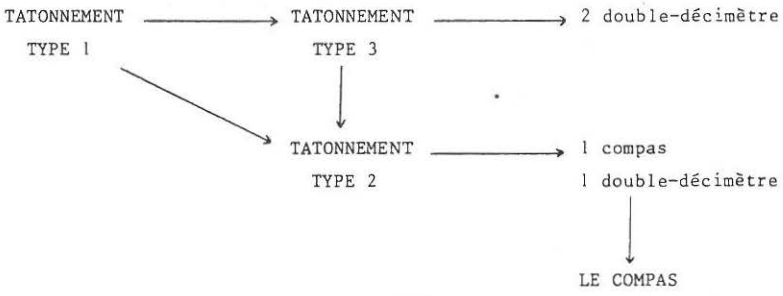


Tableau 238

d) Nous distinguons parmi nos élèves qui construisent un triangle :

- ceux qui font appel uniquement aux procédures de tâtonnement; ils sont 27.
- ceux qui font appel uniquement à la construction au compas; ils sont 23.
- ceux qui font appel à deux double-décimètres ou bien à un compas et un double décimètre pour trouver le troisième sommet du triangle; ils sont 7.

- ceux qui n'abordent pas la construction d'un triangle comme un sous-problème; ils sont 11.

Parmi les 27 premiers, 12 ont réalisé la construction à la demande de l'expérimentateur. Parmi les 23 suivants, 12 aussi ont réalisé leur construction à la demande de l'expérimentateur. On peut donc en conclure qu'il y a indépendance entre la procédure suivie par l'élève et le fait que la construction du triangle ait été réalisée ou non à la demande de l'expérimentateur.

4. LE TROISIEME CAS D'EGALITE[1]

L'existence d'un triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm est acquise pour à peu près tous nos élèves. Mais son unicité à une isométrie près, est loin d'être une certitude. Rares sont les élèves qui se posent la question de l'unicité. BAR (protocole 1-18;04) en parle explicitement et clairement lorsqu'il déclare :

- La question se pose de savoir si les trois dimensions d'un triangle fixent la forme de ce triangle.

Examinons le protocole 5-12;08 de RAU. A la 10ème minute, RAU construit au compas, comme l'indique la figure 239 ci-dessous, un triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm. Elle découpe ce triangle et en le déplaçant sur le pentagone trouve 10 triangles solutions à la 30ème minute.

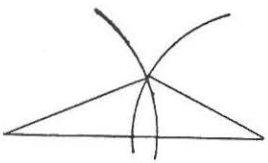


Figure 239

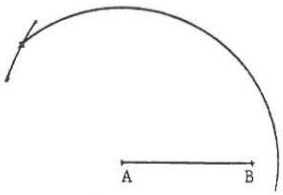


Figure 240

RAU - Des comme ça c'est dix ... mais faut que je vois s'il n'y en a pas d'autres.

EXP - Comment cela ?

RAU - Oui, j'ai cherché combien je pouvais en mettre des comme ça dans un angle et j'ai trouvé 2.

EXP - Des comme ça ?

RAU - Oui, il faut voir s'il n'est pas possible de faire un triangle d'une autre forme.

L'élève construit donc au compas un triangle ABC que nous représentons sur la figure 240 ci-avant. Pour cela, elle trace d'abord un segment AB = 5 cm, alors qu'à la 10ème minute, elle avait commencé sa construction par le côté de 10 cm. Puis, elle trace deux arcs de cercle centrés respectivement en A et B et de rayons 6 cm et 10 cm. Avant d'achever le dessin du triangle, elle dit :

- Non c'est pareil; il n'y en a pas d'autres.

Et elle confirme la réponse qu'elle a donnée à la 30ème minute.

- Alors, il n'y en a que 10.

Nous voyons RAU entreprendre une démarche expérimentale en se posant la question de l'unicité. Dès un premier observable inachevé d'ailleurs, elle en conclue que le triangle est unique.

Nous trouvons cinq[1] protocoles dont ceux de BAR et RAU où l'unicité est affirmée clairement et explicitement, mais toujours après un doute et toujours après une observation attentive.

Examinons le protocole 4-13;04 de CAN. A la 25ème minute, s'instaure un dialogue :

CAN - c'est chaque côté des triangles qui font 10 cm, 6 cm, 5 cm ?

EXP - Oui, c'est comme ça.

CAN - Il faudrait peut-être que j'essaie de trouver avec un rapporteur l'angle et après j'essaierai de le reporter sur mon triangle et je ferai avec les dimensions de 5 cm, 6 cm, 10 cm.

CAN projette de construire un triangle dont un angle est égal à l'angle formé par deux côtés consécutifs du pentagone et dont les trois côtés ont pour dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm. Elle mesure l'angle des côtés consécutifs du pentagone et trouve 110°. Elle réalise alors la construc-

tion que nous représentons sur la figure 241 ci-dessous. Pour cela, elle place d'abord son rapporteur, que nous avons dessiné en pointillés sur la figure 241, et marque ensuite des tirets en face des graduations 0 et 110. Elle pointe aussi le centre R du rapporteur. Sur la demi-droite joignant R à la graduation 0, elle porte le segment RM = 5 cm. Sur la demi-droite joignant R à la graduation 110, elle porte le segment RN = 6 cm. Elle joint MN jusqu'en P tel que MP = 10 cm.

EXP - Qu'est-ce qui se passe ?

CAN - ça va pas, les 10 cm ne rentrent pas.

Elle a bien constaté que MN ≠ 10 cm. C'est un échec, à la 30ème minute. Elle reprend sa recherche sur le pentagone.

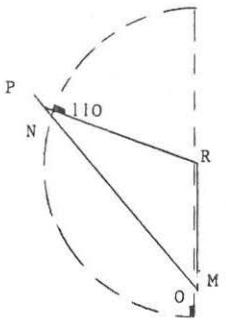


Figure 241

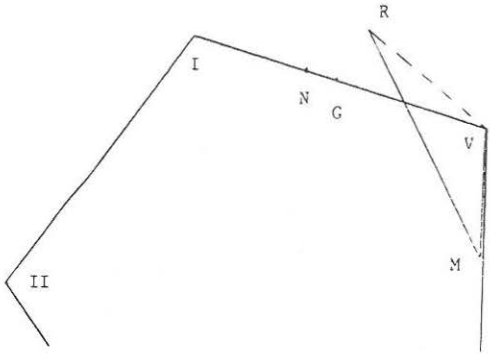


Figure 242

A la 40ème minute, l'expérimentateur décide d'intervenir. Il propose à l'élève d'utiliser la transparence et de placer le triangle T qu'elle a construit au début de sa recherche sous la feuille semi-transparente, où est dessiné le pentagone.

L'élève place le triangle T au sommet V dans la position indiquée par la figure 242ci-dessus. T est représenté par les pointillés MVR.

CAN - Déjà ce côté il va. Là y a déjà les 5 cm.

L'élève marque le point M sur le côté IV V tel que VM = 5 cm.
CAN - Maintenant peut-être en mettant les 6 cm là au lieu de les mettre ici.
Elle envisage de placer, sur le côté VI, un segment VG = 6 cm.
Elle veut prendre VG au lieu de VR. Puis, elle change d'avis.
CAN - Mais d'abord je vais mettre mes 10 cm.
Elle marque un point N, sur le côté VI, à 10 cm de M.
CAN - Ah, mais les six ça ne rentre pas.
L'élève constate, en définitive, que NV ≠ 6 cm. Elle n'a donc pas la solution cherchée. Son problème ne débouche pas sur un résultat.
Nous retrouvons chez certains de nos élèves les attitudes de CAN. Ces élèves envisagent plus ou moins explicitement des triangles différents par leurs angles, mais qui conservent les trois dimensions données : 10 cm, 6 cm et 5 cm. Il en est ainsi dans 12 protocoles[1].

Examinons le protocole 5-13;02 de VAL. Au début de sa recherche, VAL place le point M à 6 cm du sommet V, comme l'indique la figure 243 ci-dessous. Puis, elle trace le segment MP = 10 cm. Elle marque enfin sur V IV le point N tel que VN = 5 cm et dit :
- En gardant les 10 cm, il faut que j'essaie de venir là.
Elle veut donc conserver le côté VN de 5 cm, conserver les 10 cm pour le grand côté et laisser implicitement le côté de 6 cm sur VI et cela grâce à une déformation de VMP peu rigoureuse et pour cause !

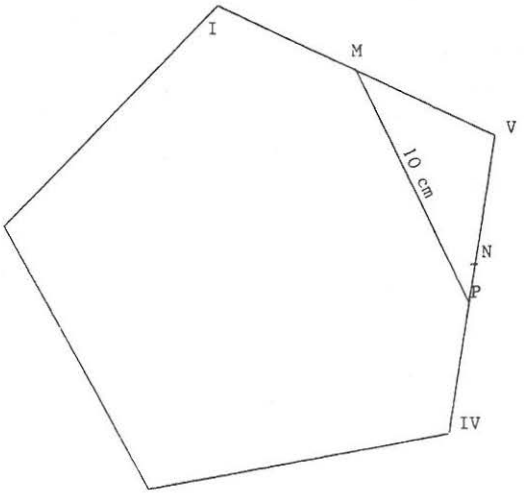


Figure 243

Cette volonté tenace de placer un triangle de dimension 10cm, 6 cm, 5 cm dans un coin du pentagone c'est-à-dire avec un grand angle égal à celui du pentagone ne la quittera pas jusqu'à la 22ème minute. Elle essaie 9 fois de suite une procédure analogue à celle que nous venons de décrire en disant tantôt "je vais essayer de rentrer 1 cm" tantôt "il me reste toujours 1 cm à placer". L'intervention de l'expérimentateur qui lui demande de dessiner le triangle sur une feuille blanche est nécessaire pour la débloquer. Cette tenacité de VAL à vouloir confondre l'angle obtus de T et l'angle du pentagone implique à notre avis que le troisième cas d'égalité des triangles n'est pas acquis. Et ce troisième cas n'est même pas envisagé sous forme interrogative, comme le fait BAR. Si on compte le nombre d'élèves qui tentent de placer le triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm de telle sorte qu'une de ses angles soit confondu avec un angle du pentagone, nous trouvons 68 élèves, et si on compte le nombre total de telles tentatives, nous en trouvons environ 350. Ceci nous renforce dans l'idée que la question de l'unicité, à une isométrie près, d'un triangle dont on connaît les mesures des trois côtés reste, pour le moins floue, dans l'esprit de nos élèves.

Ajoutons encore une dernière remarque. Sur les 5 élèves qui, comme RAU, affirment l'unicité de T, deux utilisent des procédures de tâtonnement et trois construisent le triangle au compas. Sur les 12 élèves qui, comme CAN, croient à l'existence de plusieurs triangles différents de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm, quatre construisent leur triangle par tâtonnement et quatre autres le construisent au compas. Il n'est donc pas du tout aberrant de faire l'hypothèse que l'apprentissage de la construction d'un triangle au compas est une technique qui n'est pas chez l'élève corrélée au troisième cas d'égalité. Mais, compte-tenu du petit nombre d'élèves que nous confrontons à cette hypothèse, nous devons la mettre encore à l'épreuve.

5. CONCLUSIONS

Dans le tableau[1] 244 ci-dessous nous indiquons dans chaque classe le pourcentage approximatif

- des élèves qui utilisent les procédures de *tâtonnement*, définies au paragraphe 2.
- des élèves qui utilisent des *instruments* comme les deux double décimètres ou bien un compas et un double-décimètre pour construire le troisième sommet du triangle (cf. paragraphe 3b).
- des élèves qui utilisent la construction au *compas*, définie au paragraphe 3a.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2ème	1ère	Total
Tâtonnement	60	15	45	35	60	50	45
Instruments	30	5	0	15	10	0	10
Compas	10	65	20	45	20	20	30

Tableau 244

Enonçons les principales conclusions que nous tirons des analyses qui précèdent.

Les élèves utilisent abondamment des procédures de tâtonnement, fondées sur le hasard qui ne sont pas usuellement exploitées dans leur scolarité.

L'analyse dialectique, en particulier les notions de C.L.p.s. et de champ de contraintes avec variable, permet d'étudier minutieusement les procédures par tâtonnement.

La construction au compas, bien utilisée par nos élèves, paraît pourtant provenir d'un apprentissage technique déconnecté d'une réflexion plus théorique.

L'unicité, à une isométrie près, d'un triangle défini par la longueur de ses trois côtés est une question qui reste floue dans l'esprit des élèves.

Une progression pédagogique débouchant sur l'acquisition du troisième cas d'égalité et sur la construction d'un triangle connaissant ses trois côtés, nous semble possible si on respecte les cheminements présentés schématiquement par le tableau 238 (cf. page 372).

oooOOooo

- CHAPITRE XIX -

EQUILIBRES DANS LE PROBLEME PEN

1. TRIANGLE DANS L'ANGLE DU PENTAGONE

Examinons en premier lieu le protocole 4-14;02 de INE. INE mesure les côtés du pentagone. Puis, elle marque les points A et B que nous représentons sur la figure 245 ci-après, tels que IA = 10 cm et IB = 6 cm. Elle trace AB. Elle recommence une construction analogue en IV et III. En effet, elle marque les points A' et B' tels que IV A' = 10 cm et IV B' = 6 cm, puis trace le côté A'B'. Elle marque encore les points A"B" tels que III A" = 10 cm et III B" = 5 cm et trace le côté A"B". Elle précise que ses triangles ne doivent pas se croiser. A la 8ème minute, elle annonce :

- Je crois que ça y est.

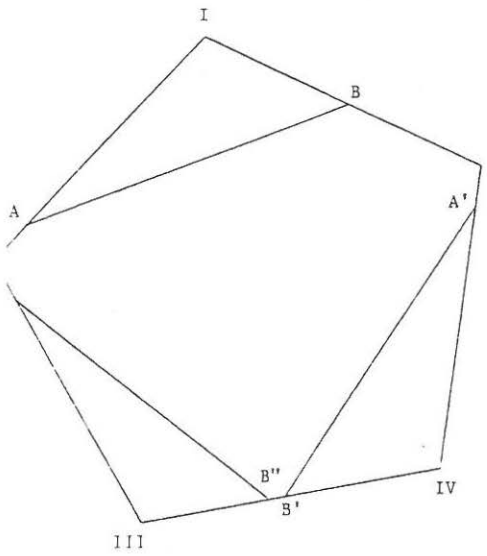


Figure 245

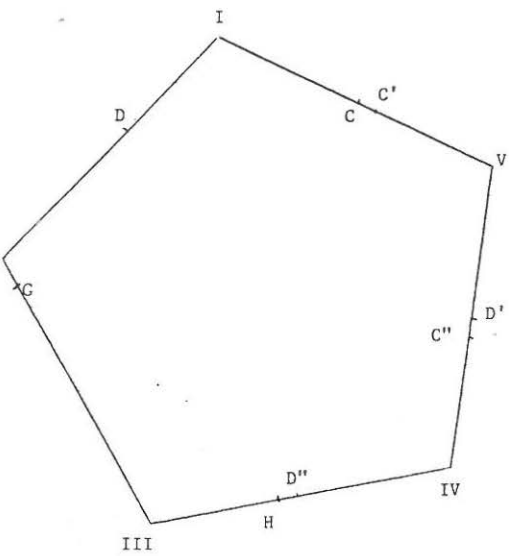


Figure 246

A ce moment là elle estime qu'elle a répondu au problème en traçant trois triangles solutions.

Elle relit alors l'énoncé, puis vérifie les mesures des côtés des triangles et se reprend.

INE - Non ça ne va pas. Les trois côtés ne font pas 10 cm, 6 cm et 5 cm.

Elle se rend compte que ses triangles ne vérifient pas les conditions exigées par l'énoncé.

A la 10ème minute, sur une deuxième feuille que nous représentons sur la figure246 ci-dessus, elle marque les points C et D tels que IC = 6 cm et ID = 5 cm. INE mesure alors CD sans le tracer et fait la grimace. Elle marque deux nouveaux points C'D' tels que V C' = 5 cm et V D' = 6 cm et mesure C'D'. Elle n'obtient pas les 10 cm cherchés. Elle fait une nouvelle tentative dans le coin IV,

en prenant C" et D" tels que IV C" = 5 cm et IV D" = 6 cm. C'est à nouveau un échec car C"D" ≠ 10 cm. A la 14ème minute elle reprend alors toutes ses mesures.

A la 17ème minute, elle marque les points G et H tels que III G = 10cm et III H = 5 cm.

A la 18ème minute, elle déclare :

- Je ne trouve pas, j'ai mesuré de tous les côtés et j'ai trouvé 9 cm.

Les sept constructions que nous venons de décrire et que nous avons représentées sur les figures 245 et 246 montrent la volonté de l'élève de construire un triangle dont l'un des angles est confondu avec un angle du pentagone : nous disons que INE veut *construire un triangle dans l'angle du pentagone*. A la 23ème minute, elle trace sur une troisième feuille un rayon O IV, le mesure et trouve 10 cm. Elle marque alors le point M, que nous représentons sur la figure 247 ci-dessous, tel que IV M = 6 cm; mais sans aller plus loin, elle annonce :

- ça va pas.

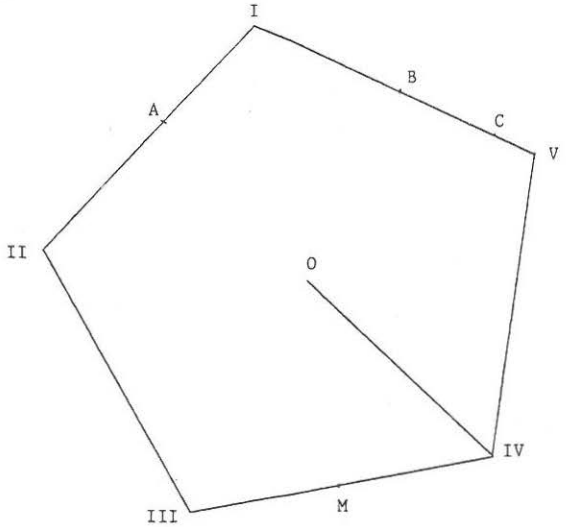


Figure 247

A la 28ème minute, elle inscrit zéro dans la case réponse.

INE - Je crois qu'il n'y en a pas du tout, j'ai essayé de tous les côtés.

EXP - Pourrais-tu me convaincre ?

INE - Avec 6 et 5, j'ai 9 cm; avec 10 et 5, ça fait 12; et 10 et 6 c'est encore plus grand ...
Et puis, j'ai essayé de tous les côtés.

Elle marque encore sur sa figure différents points à 5 cm, 6 cm ou 10 cm d'un sommet notamment les points A, B et C; mesure à nouveau le troisième côté des triangles envisagés pour bien montrer qu'ils ne conviennent pas.

Vers la 40ème minute, c'est le dernier dialogue.

EXP - Tu m'as dit qu'il n'y en avait aucun et pourtant tu cherches encore pourquoi ?

INE - Je ne sais pas, on sait jamais, je cherche autre chose ...

Durant toute sa recherche, INE envisage constamment une situation mathématique spécifique : un triangle dans un angle du pentagone. A cette question, correspond une réponse au problème qu'elle inscrit d'ailleurs dans la case prévue à cet effet: zéro. Sa recherche est complètement bloquée par cette situation.

Or, nous avons donné la définition suivante d'une position d'équilibre (cf. page 115 ou encore page 199) : dans un processus de recherche de problème, l'élève atteint une position d'équilibre, si un résultat obtenu en cours de recherche a tendance à bloquer, momentanément ou définitivement, le processus de découverte de la solution et si ce résultat correspond à une situation mathématique spécifique.

Nous reconnaissons donc chez INE une position d'équilibre fondée sur la construction d'un triangle dans l'angle du pentagone.

La question que nous nous posons alors est la suivante : est-ce que cette position d'équilibre apparaît chez de nombreux élèves ? Nous pouvons répondre que cette position d'équilibre apparaît chez quasiment tous nos élèves. En effet, six élèves seulement ne passent pas par cette position d'équilibre : un élève dans chacune des classes de 6ème, 4ème, 3ème et 1ère et deux élèves en Seconde. L'existence de cette position d'équilibre est donc à peu près la même de la classe de 6ème à la classe de 1ère.

Nous reconnaissons, chez INE, neuf tracés de triangles ou ébauches de triangles placés dans un angle du pentagone : les trois triangles de la figure 245, les quatre de la figure 246 et les deux triangles AIB et AIC de la figure 247. Si nous comptons chez tous nos élèves tous les triangles tracés ou ébauchés dont l'un des angles est confondu avec un angle du pentagone, nous en obtenons environ 350, soit une moyenne de 4,7 par élève. Représentons sur le tableau 248 ci-dessous la moyenne dans chaque classe :

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Nombre moyen de triangles dans un angle	7,2	4,9	4,4	3,7	2,8	1,8	4,7

Tableau 248

Si l'existence de cette position d'équilibre reste constante quelle que soit la classe, elle est plus vite dominée, semble-t-il, chez les élèves plus âgés. Mais pour vérifier cette dernière affirmation encore faut-il examiner les blocages créés par cette position d'équilibre.

Nous disons qu'un élève est bloqué par la situation qui consiste à placer un triangle dans un angle du pentagone si, après n'avoir envisagé que cette situation, il annonce qu'il ne trouve pas de triangle solution ou que la solution est zéro ou encore si l'expérimentateur estime que l'élève veut s'arrêter ou enfin si jusqu'au bout de la séance, il se consacre à la construction de triangles dans un angle du pentagone. Le tableau 249 ci-dessous indique le nombre d'élèves bloqués dans chaque classe et leur pourcentage approximatif.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Nombre d'élèves bloqués	7	7	4	5	1	0	24
% approximatif	70	50	25	35	10	0	30

Tableau 249

Ce tableau montre que si les blocages sont importants dans l'ensemble ils sont plus facilement dépassés chez nos élèves plus âgés.

Lors des pré-expérimentations, nous avions déjà remarqué que les élèves voulaient à tout prix placer le triangle dans un angle du pentagone. Une fois convaincus qu'il ne s'agissait pas d'une mauvaise compréhension de l'énoncé, nous avons dû prévoir de la part de l'expérimentateur une intervention de déblocage. Les deux interventions, programmées après la 10ème et la 20ème minutes, qui consistent à demander le dessin du triangle T ou à donner T, ont pour objectif de débloquer les élèves. Tous nos élèves bloqués par la position d'équilibre du triangle dans un angle du pentagone, à l'exception d'un seul, ont été débloqués grâce à l'une ou l'autre de ces interventions de l'expérimentateur. Or, ces interventions jouent un double rôle. D'une part, elles mettent en évidence un sous-problème différencié du problème général. Elles éliminent donc un écueil important pour la résolution du problème (cf. chapitre VII). D'autre part, elles effacent les difficultés dues à un manque de maîtrise du troisième cas d'égalité (cf. chapitre XVIII-4). Il nous apparaît donc que l'existence même de cette position d'équilibre, associée aux difficultés de différenciation et à la méconnaissance du troisième cas d'égalité, conduit à ce blocage important.

Six élèves seulement n'arrivent pas à dépasser cette position d'équilibre avant la fin de leur recherche. Examinons comment les autres la dépassent.

La principale procédure permettant le dépassement de l'équilibre du triangle dans l'angle du pentagone consiste à utiliser un triangle T, sur papier semi-transparent ou découpé, donnant par décalquage un triangle solution.

C'est ainsi que IOM (protocole 3-15;01), après avoir tracé un triangle dont deux dimensions sont 6 et 5 et dont le grand angle est confondu avec l'angle $\widehat{IV}$ du pentagone, fait un certain nombre de remarques.

IOM - ça ne donne pas 10.

C'est possible d'en trouver un ?

ça n'a pas l'air très possible ?

On peut en faire un ?

Il regarde ses camarades qui travaillent autour de lui, mais n'obtient pas de renseignements.

A la 13ème minute, l'expérimentateur lui conseille de construire un triangle de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm. Ce triangle est obtenu par IOM à la 19ème minute. Il regarde le triangle et le pentagone l'un à côté de l'autre.

IOM - Je peux le découper.

EXP - Oui.

Il fait glisser le triangle découpé sur le pentagone et obtient ainsi sans les tracer diverses positions que nous notons 1, 2, 3, 4, 5 sur la figure 250 ci-dessous. Il arrive enfin à la position 6, qu'il trace, en ajoutant :

- Il fallait y penser.

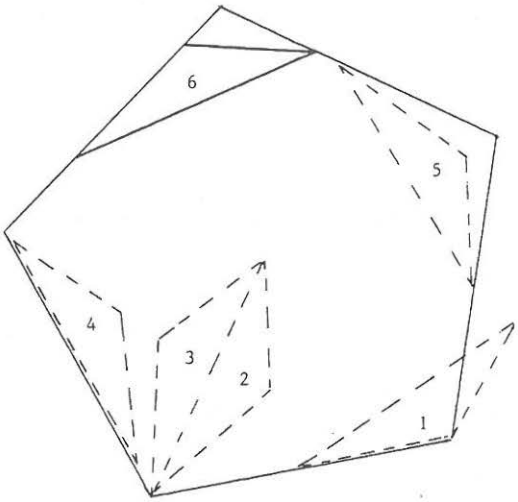


Figure 250

C'est donc la pratique du mouvement plan sur plan qui, grâce au découpage de T, lui a donné un triangle solution. D'après sa propre réflexion, il ne semble pas qu'il ait anticipé ce triangle solution avant de le découvrir de façon pratique.

Chez IOM, la position d'équilibre, qui est assez forte pour apparaître lors de l'usage du découpage à travers les positions 1, 2, 3 et 5 présentées sur la figure 250, est toutefois dépassée grâce à ce découpage.
Cette procédure de dépassement fondée sur le découpage ou le décalquage est nette pour le tiers de nos élèves; en fait, elle est, semble-t-il, utilisée de façon déterminante par la moitié de nos élèves.

La deuxième procédure importante permettant le dépassement de l'équilibre du triangle dans l'angle du pentagone utilise les L.L.C. (cf. chap.VI et XIV-6a), *ou encore le hasard avec, bien entendu, des C.L.p.s.* (cf. page 244), *ou enfin un champ de contraintes muni d'une variable* (cf. chapitre XIV-6e). *Nous disons plus brièvement, par référence au chapitre XIV, que cette procédure utilise des contradictions.*
Afin de mieux comprendre cette procédure, nous allons analyser quelques protocoles.

Examinons tout d'abord le protocole 4-13;11 de TOF. Comme l'indique la figure 251 ci-dessous, à la 23ème minute, TOF a obtenu le triangle A II B tel que II A = 5 cm et II B = 6 cm. Il mesure alors AB qu'il appelle "la base".

TOF - C'est pas bon, la base ne fait pas 10 cm; c'est la base qui n'est pas bonne.

AB n'ayant pas la dimension voulue, il va compenser.

TOF - Il faudrait garder le point (B) et que l'autre soit plus écarté, jusque là (A').

Il trace donc BA' = 10 cm et triomphe.

TOF - J'en ai un.

Il mesure alors II A' et constate son échec.

A la 31ème minute, il s'écrit :

- ça y est, j'ai trouvé !
  Comme j'ai poussé de 1 cm à droite, il faut aussi que je décale à gauche et ça marchera.

Il constate qu'ayant amené A en A', ce qui lui a fait perdre la dimension II A = 5 cm car II A' > 5 cm, il lui suffit pour compenser d'amener II en C avec II C = AA' = 1 cm pour trouver un triangle solution CA'B.

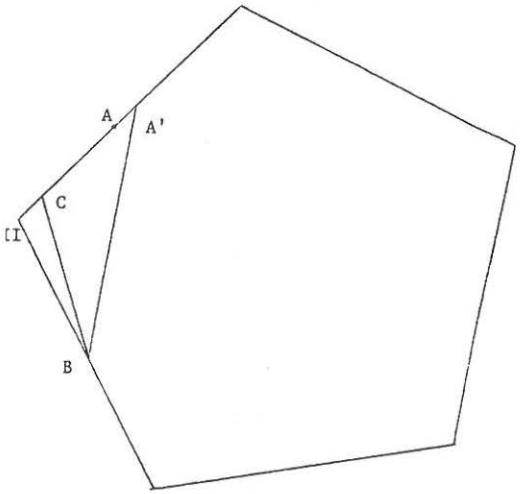


Figure 251

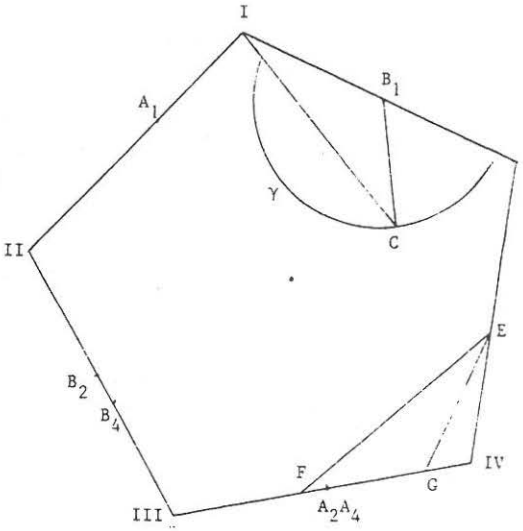


Figure 252

EXP - En es-tu sûr ?
L'élève mesure.
TOF - C'est faux aussi.
Il n'a donc pas obtenu le résultat, mais son triangle A'BC n'est plus un triangle dans l'angle du pentagone, la position d'équilibre a été dépassée par L.L.C. successives[1].

Examinons maintenant le protocole 3-15;04 de BRO. Les cinq premiers processus élémentaires suivis par BRO sont représentés sur la figure 252 ci-dessus. Son premier processus élémentaire consiste à placer les deux points A_1 et B_1 tels que IA_1 = 5 cm et IB_1 = 6 cm; et il ajoute :
- Mais non, ça ne va pas pour le troisième côté.
Elle constate que le troisième côté ne mesure pas 10 cm.
Son deuxième processus élémentaire consiste à choisir un point A_2 à 6 cm de III; puis elle cherche un point B_2 à 10 cm de A_2 mais constate :
- Non, cela n'ira pas.
En effet, ce point B_2 est beaucoup trop loin de III.

Dans son troisième processus, elle prend, de nouveau, en considération le point B_1.

BRO - J'avais déjà un côté de 6 cm. Je vais tracer un demi-cercle de 5 cm de rayon puis le côté de 10 cm. J'aurais la dimension demandée.

Elle trace donc l'arc de cercle γ sur lequel elle place le point C situé à 10 cm de I. Mais elle constate aussitôt que le troisième sommet n'est pas sur le bord. Ce troisième processus a dégagé le triangle de l'angle du pentagone. On peut parler de déséquilibre. Pourtant rien n'est joué comme le montre le processus suivant.

En effet, de part et d'autre du sommet III elle prend les points A_4 et B_4 tels que $IIIA_4$ = 6 cm et $IIIB_4$ = 5 cm ($A_4 = A_2$).

BRO - Mais je n'obtiens pas 10 pour le troisième sommet.

C'est avec le cinquième processus qu'elle dépasse définitivement la position d'équilibre.

BRO - Je vais tracer en oblique le côté de 10, à peu près, là j'ai deux sommets.

Elle trace donc le côté EF = 10 cm. EF est choisi "à peu près" ce qui signifie à la fois *au hasard, au coup d'oeil* et avec la volonté de faire jouer une certaine *approximation*.

BRO - Puis, il me faut 5 cm, cela ferait le troisième sommet et si je joins il me faudrait 6 cm.

Elle place alors le troisième sommet G tel que FG = 5 cm et vérifie que GE = 6 cm.

BRO - Celui-là est bon. Enfin ! à peu près ...

Le triangle EFG obtenu est tel que EF = 9,8 cm, FG = 5,0 cm et GE = 6,0 cm.

Analysons de façon plus minutieuse la démarche de BRO.

Tout d'abord, lorsque EF est pris au hasard cela signifie que l'ensemble des positions EF (avec EF = 10 cm) ou, ce qui est pour nous équivalent le segment III IV, est structuré en un espace probabilisé muni de probabilités continues. Dans ces conditions, il est presque sûr que l'élève n'obtiendra pas un triangle solution, ce qui nous fait dire que son champ de contraintes est logiquement contradictoire de façon presque sûre (C.L.p.s.). Mais, cet espace probabilisé n'est pas uniforme, car au coup d'oeil, l'élève repère une région de III IV où devra se trouver le point F car en dehors de cette région, il voit

que le triangle ne peut pas convenir. De plus, il accepte une certaine approximation ce qui augmente ses chances de réussite.

Nous structurons la démarche de l'élève qui fait appel au hasard et au coup d'oeil au moyen d'un espace probabilisé continu avec une densité nulle en dehors d'un intervalle $(t_1\ t_2)$ contenant t; t est le point de III IV correspondant au triangle solution et $(t_1\ t_2)$ est la région où, pour l'élève, doit se trouver le point F. Nous représentons ces différents éléments sur le schéma 253 ci-dessous.

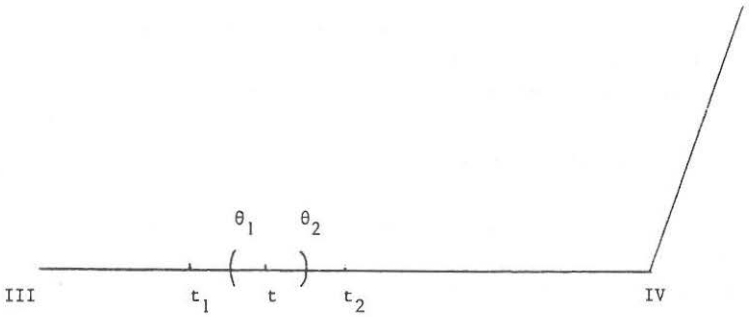


Schéma 253

Lorsque l'élève fait ensuite intervenir l'approximation, cela correspond à l'acceptation, comme solution, non seulement du point t, mais encore de tout un intervalle (θ_1, θ_2); et alors, les chances de réussite se ramènent à la probabilité $p(\theta_1, \theta_2)$) dans l'espace probabilisé précédemment défini. C'est ainsi que, si $(\theta_1, \theta_2) \supset (t_1, t_2)$ alors la probabilité est égale à 1; autrement dit le choix d'un côté EF au hasard avec un bon coup d'oeil et une approximation suffisamment large conduit, avec certitude, l'élève à une solution qu'il accepte.

En définitive, la procédure suivie par BRO donne une place importante au hasard mais cela ne veut pas dire que l'élève fait n'importe quoi. Bien au contraire, il travaille en utilisant un espace probabilisé continu, qu'il ne formalise pas et qui le conduit soit à une C.L.p.s. soit à une contradiction logique avec une certaine probabilité. Nous analysons au chapitre XX le rôle de l'approximation qui efface C.O. et C.L.

Examinons, enfin, le protocole 4-13;06 de JEA. Durant les 18 premières minutes de sa recherche, JEA est paralysé par sa volonté de construire un triangle dans l'angle du pentagone . Il se place treize fois dans cette position d'équilibre. Le déséquilibre apparaît à la fin de cette période. A la 19ème minute, il envisage de placer le côté moyen du triangle cherché sur un côté du pentagone, comme le montre notre figure 254, grandeur nature.

JEA - ça pourrait être un côté ça (M_1N_1) ?

Il prend au compas un écartement de 6 cm: il choisit un point M_1 au hasard sur I II et place N_1 tel que M_1N_1 = 6 cm.

JEA - Je prends 5.

Puis, il place P_1 tel que N_1P_1 = 5.

JEA - Je regarde si ça fait 10.

Avec le compas, il prend l'écartement M_1P_1 qu'il reporte sur la règle graduée en constatant que M_1P_1 > 10 cm.

JEA - C'est trop grand.

Je prends 6, je mets plus haut presque 1,5 cm de plus environ.

C'est ainsi qu'il place les points $M_2N_2P_2$ tels que MM_2 = 1,2 cm, M_2N_2 = 6 cm et N_2P_2 = 5 cm; mais P_2 est enII et le triangle ne lui paraît pas acceptable.

JEA - Alors je vais descendre un peu.

Il place alors M_3N_3 et P_3 toujours selon le même procédé; mais M_3P_3 = 10,8cm.

JEA - Tout à l'heure, ça faisait 10,5 ... il était plus bas; je vais aller encore plus bas cette fois.

Il constate que M_1P_1 = 10,5 cm et que M_3P_3 = 10,8 cm; d'autre part, M_1 est plus près de II que M_3. Il en conclut que le point M cherché est encore plus près de II. Il choisit alors M_4 "un peu plus bas" que M_1, place N_4 et P_4 et vérifie que M_4P_4 = 10 cm.

JEA - ça y est ... j'y suis arrivé.

La procédure suivie par JEA, que nous venons de décrire fait intervenir un même champ de contraintes muni d'une variable. C'est la position du côté moyen du triangle qui varie le long de I II. Le fait que le grand côté MP croisse[1] avec l'éloignement de M par rapport au point II est obtenu par induction.

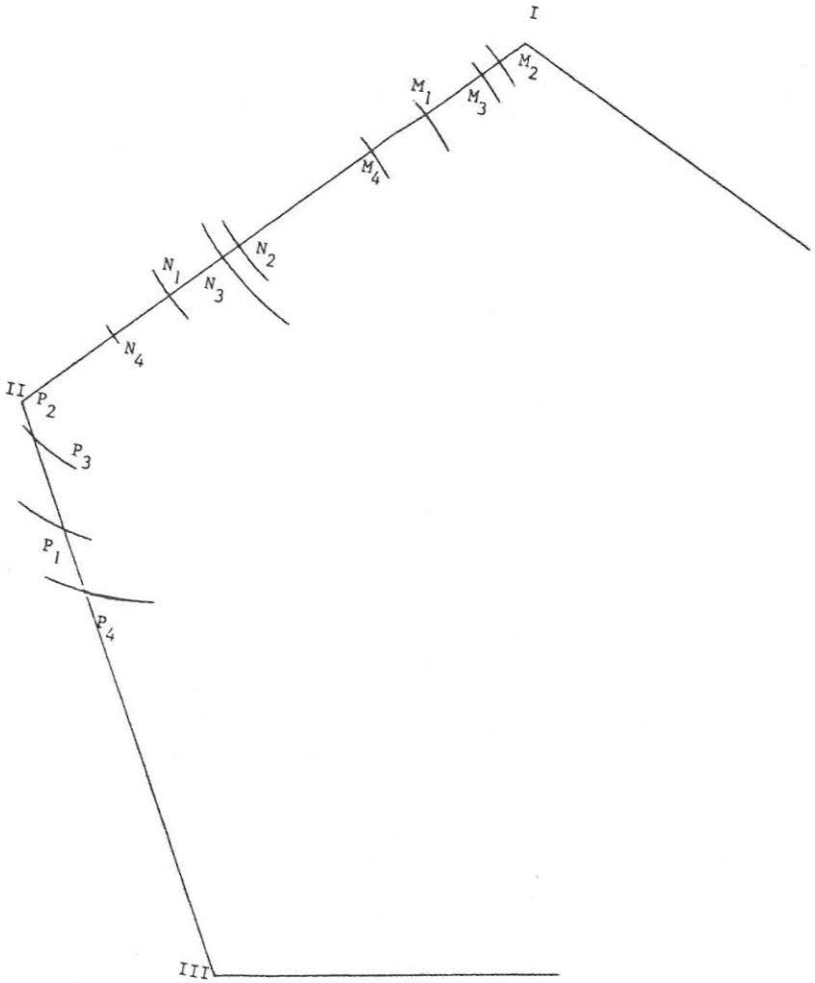


Figure 254

Les trois procédures de TOF, BRO et JEA que nous venons de décrire sont respectivement centrées sur l'usage des L.L.C., du hasard avec C.L.p.s., et d'un champ de contraintes muni d'une variable. Pourtant, on trouve des éléments de plusieurs de ces trois procédures dans chacun de nos exemples. C'est ainsi que le cinquième processus élémentaire de BRO qui fait intervenir hasard et coup d'oeil ressemble, en plus intuitif et plus sommaire, à une procédure fondée sur un champ de contraintes muni d'une variable comme celle de JEA. JEA passe manifestement par des L.L.C. Comme l'interférence de ces trois procédures est assez fréquente parmi les protocoles qui dépassent la position d'équilibre sans utiliser le décalquage, nous parlons d'une procédure fondée sur les contradictions.

La procédure de décalquage semble plus fréquente que la procédure utilisant les contradictions mais compte-tenu du fait que la première est souvent déclenchée par l'intervention de l'expérimentateur, nous pouvons estimer que ces deux procédures sont d'importance égale.

Pour résumer, les analyses qui précédent, nous disons que dans ce problème apparaît :

- *une sorte position d'équilibre qui correspond à la construction d'un triangle dont l'un des angles est confondu avec un angle du pentagone.*
- *un dépassement de cette position d'équilibre reposant soit sur une procédure de décalquage, soit sur une procédure utilisant les contradictions.*

2. CROISEMENT. ELEMENTS REMARQUABLES

Examinons le protocole 6-12;02 de RIA. A la 19ème minute, l'élève décalque son premier triangle $A_1B_1C_1$ représenté sur la figure 255 ci-dessous, en traçant le point B_1 et le côté A_1C_1.

RIA - Je pense qu'on peut en tracer quatre : un de chaque côté.

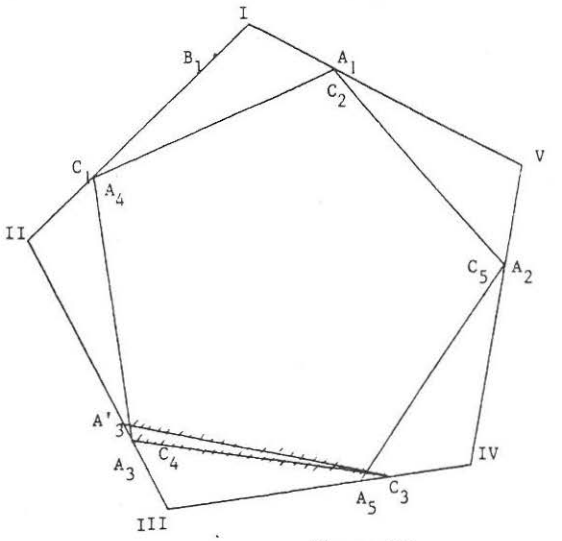


Figure 255

Grâce à la transparence, elle marque un point A_2 et joint A_1A_2.
A_1A_2 représente le grand côté d'un deuxième triangle égal à T dont le côté de 6 cm est porté par IV.
Puis, elle dessine le grand côté A_3C_3 d'un troisième triangle, ainsi que A_4C_4 le grand côté d'un quatrième, avec $A_3 = C_4$ et $A_4 = C_1$.
RIA - On peut croiser là !
EXP - C'est toi qui voit. C'est toi qui décide. Regarde ce qu'on demande.
L'élève se demande si deux triangles peuvent chevaucher; c'est-à-dire si elle peut avoir certains points d'un triangle à l'intérieur d'un autre triangle. Puis, elle s'aperçoit que C_3A_3 est mal tracé; elle remplace ce côté par $C_3A'_3$. Mais alors le troisième et le quatrième triangles se chevauchent, elle doit en exclure un.
RIA - Je pense qu'on peut en dessiner trois.
Pourtant, elle envisage encore autre chose.
RIA - Attendez, je vais voir. Là, je vais recommencer.
Elle trace alors le segment A_5C_5, grand côté d'un cinquième triangle, avec $C_5 = A_2$ mais alors ce dernier triangle "coupe" le troisième; il ne lui reste donc que quatre triangles solutions.
RIA - Quatre, parce que celui-là après il coupe celui-là.
Ne voulant pas que les triangles se coupent, elle adopte les quatre triangles solutions représentés par leurs grands côtés : A_1C_1 , A_2C_2 (avec $C_2=A_1$) A_5C_5 (avec $C_5 = A_2$), et C_4A_4 (avec $A_4 = C_1$).
EXP - Tu ne veux pas qu'ils se coupent ? Est-ce que tu crois qu'ils ne peuvent pas couper ?
RIA - Parce que s'il coupe là, ça fait quatre sommets.
Pour l'élève, si un segment DE vient couper un triangle ABC, alors on trouve quatre sommets BCEF et non plus trois sommets; on n'a donc plus un triangle (cf. figure 256).
L'expérimentateur insiste longuement, lui demande plusieurs fois :
- ça t'embêterait qu'il coupe ?
Il demande à l'élève de bien relire l'énoncé.
En définitive, RIA compte : 5. C'est sa réponse, donnée à la 28ème minute.

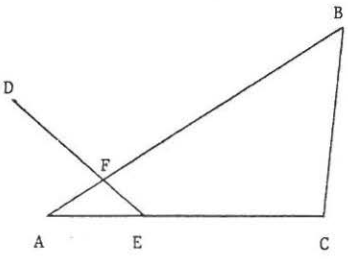


Figure 256

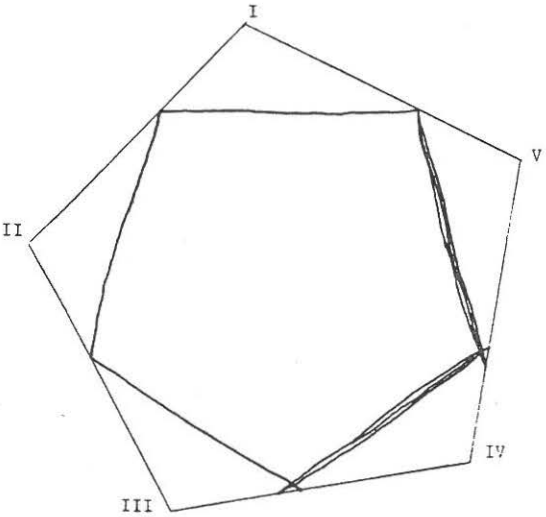


Figure 257

Pourtant à la 35ème minute, RIA qui a trouvé cinq autres triangles solutions réalise la figure 257 représentée ci-dessus. Nous constatons que les grands côtés de ses triangles sont tracés à main levée de telle sorte que le "croisement" éventuel soit dissimulé par la grossièreté des traits.

Nous avons là un élève qui refuse de voir des triangles solutions se couper ou se croiser. Il est remarquable qu'une telle attitude, ou du moins l'attitude qui consiste à se demander si les triangles peuvent se croiser, apparaît chez 40% de nos élèves. Le tableau 258 donne, par classe, le pourcentage approximatif d'élèves ayant une telle attitude.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Attitude de non croisement	60 %	20 %	40 %	30 %	35%	50 %	40%

Tableau 258

C'est donc une attitude à peu près constante au cours de la scolarité. L'élève fait intervenir une contrainte extérieur au problème, en ce sens qu'elle ne se déduit pas de l'énoncé. Cette contrainte empêche la découverte de la solution; elle a tendance, comme les positions d'équilibre à bloquer, momentanément ou définitivement, le processus de découverte de la solution. C'est pour cette raison que nous parlons d'une contrainte d'équilibre extérieure au problème. *Le "non croisement" des triangles est une contrainte d'équilibre extérieure au problème.*

Nous avons déjà signalé, lors de l'analyse du problème CRI, au chapitre VIII-5, que l'élève fait intervenir dans la figure tracée, des points remarquables. Nous constatons dans le problème PEN que, là aussi, les élèves font intervenir des éléments remarquables. Ces éléments sont essentiellement des segments et des points. En dehors des côtés et des sommets du pentagone, les élèves utilisent encore comme éléments remarquables : les diagonales du pentagone, les cinq rayons joignant le centre aux sommets du pentagone, le centre lui-même, des milieux de segments et des points qui ont été obtenus dans une recherche antérieure de l'élève. Nous voyons par exemple OSE (protocole 5-15;00) réaliser la figure 259 ci-après. Il construit un arc de cercle de rayon 10 cm et de centre V, qui passe par O et qui coupe I V et IV V respectivement en M et N. Puis, il considère le point A intersection de OV et de MN. Il cherche alors sur IV V un point B à 5 cm de A. Il introduit donc le rayon OV, le segment MN et le point A, qui ne semblent intervenir que parce qu'ils sont en évidence sur sa figure. Il veut tracer un triangle en utilisant des éléments (segments, points ...) déjà mis en évidence sur la figure que, pour cette raison, nous appelons éléments remarquables.

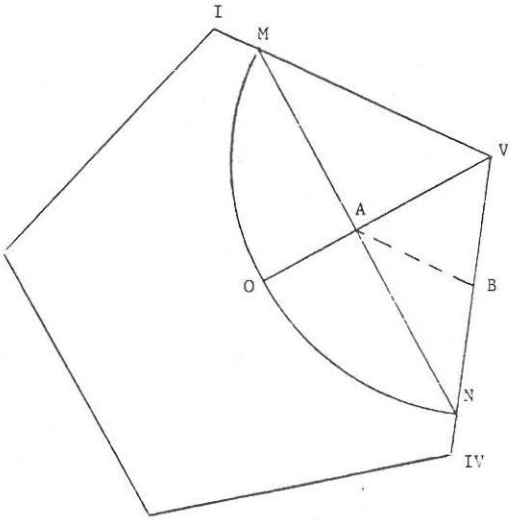


Figure 259

Avec cette procédure fondée sur l'utilisation d'éléments remarquables qui a tendance à bloquer momentanément le processus de découverte, nous avons une contrainte qui peut être appelée contrainte d'équilibre. Cette procédure consiste aussi à construire de nouvelles réalisations avec l'espoir, le hasard faisant bien les choses, d'obtenir une solution, elle ressemble donc à une procédure utilisant les contradictions (voir la fin du chapitre XIX 1) et aussi à une variation locale (voir le chapitre IX 2).
Cette procédure des élèves assez complexe puisque nous y devinons à la fois une contrainte d'équilibre, une procédure utilisant les contradictions et une variation locale, présente pourtant une situation simple et fréquente dont l'enseignement des mathématiques doit tenir compte :
l'élève face à un problème de géométrie utilise des éléments remarquables de la figure pour procéder à des essais de solutions éventuelles, même si ces éléments remarquables les éloignent de la découverte de la solution.

Nous donnons, pour terminer, dans le tableau 260 , le pourcentage approximatif d'élèves ayant, dans chaque classe, suivi une procédure faisant appel aux éléments remarquables.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère	Total
Procédure utilisant les éléments remarquables	70 %	50 %	55 %	55 %	50%	60 %	55%

Tableau 260

oooOOooo

- CHAPITRE XX -

IMPORTANCE DE LA PRATIQUE CHEZ L'ELEVE

Ce dernier chapitre avant la synthèse a un statut un peu particulier. Tout d'abord, il ne se réfère pas qu'au problème PEN, il prend en compte aussi quelquefois les problèmes CRI et SIM. Mais ce qui le caractérise surtout c'est que beaucoup plus que les autres chapitres, il présente des hypothèses inachevées et il ébauche des questions auxquelles nous ne savons pas répondre.

1. LES RAISONNEMENTS DE BRA.

Nous allons analyser le protocole 1-17;09 de BRA. Cette analyse est orientée par la question suivante : est-ce que l'élève fournit des preuves ?

BRA construit tout d'abord par tâtonnement un triangle T_1 que nous représentons sur la figure 261 ci-après.

BRA - C'est pour avoir une image (il parle de T_1) que je vais, après, essayer de placer sur ce schéma (il parle du pentagone).

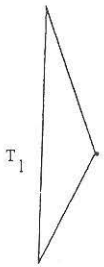


Figure 261

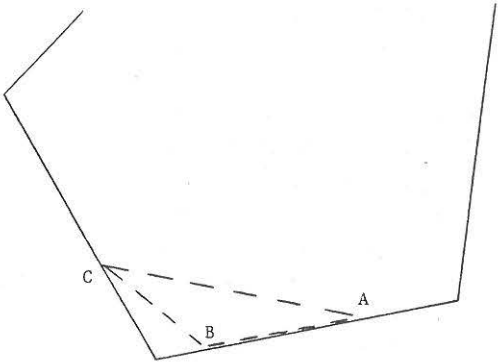


Figure 262

Il place alors T_1 sur le pentagone et examine différentes positions par transparence. Il n'obtient pas de résultat.

BRA - J'essaie par tâtonnement. J'ai quelques difficultés à trouver un point de départ.

A la 4ème minute, l'élève trouve un triangle solution, par transparence.

BRA - Je commence un peu à avoir un point de départ. Parce qu'au début, j'essayais de coller ces deux angles et j'y suis pas arrivé. Maintenant je viens de comprendre que en collant de cette manière on pouvait placer un triangle.

Dès le départ, BRA a une stratégie: construire le triangle T_1, puis trouver un premier triangle solution par décalcage.

Lorsqu'il cherche un triangle solution, il fait intervenir, très vite, la contrainte d'équilibre qui consiste à vouloir mettre un angle de T_1 dans un angle du pentagone : "au début, j'essayais de coller ces deux angles" dit-il.

Et c'est un échec; mais un échec reconnu grâce à la pratique du mouvement plan sur plan; il ajoute en effet : "j'y suis pas arrivé".

Puis, il trouve un triangle solution, mais là encore de façon pratique, sans qu'on puisse déceler un indice de raisonnement l'ayant conduit à cette solution, que nous représentons par des pointillés ABC sur la figure 262 ci-dessus. C'est après la découverte de ABC par une pratique

'du mouvement plan sur plan qu'il "comprend" et sa compréhension est une description de sa pratique : "en collant de cette manière" dit-il.

Nous sommes en présence de trois idées : la stratégie de départ, la contrainte d'équilibre consistant à mettre le triangle dans l'angle, l'existence d'un triangle solution A'B'C'. Nous assistons à deux pratiques : la construction de T_1, l'observation par transparence et par un mouvement plan sur plan. La stratégie est appliquée avec succès. La contrainte d'équilibre est contredite par la pratique, elle est donc rejetée. L'existence n'est prise en compte qu'après sa découverte pratique. On voit déjà à quel point l'idée a besoin chez BRA, de s'affronter à la pratique. Il semble même que l'existence d'un triangle solution provienne de la seule pratique.

Pourtant, les idées reprennent vite le pas sur la pratique. Dès qu'il repère son premier triangle ABC il se contente d'une approximation grossière.

BRA - C'est un peu faux mais c'est pas au centimètre près.

La certitude de l'existence d'un triangle solution lui suffit.

Par déduction, il annonce cinq triangles solutions.

BRA - Comme ça il y en aura cinq puisqu'il y a cinq côtés.

Mais il ne semble pas se satisfaire de cette seule affirmation car nous assistons au dialogue suivant :

BRA - On peut retransmettre sur cette figure ?

Il demande s'il peut tracer les triangles sur le pentagone.

EXP - Vous faites ce que vous voulez.

BRA - C'est ce que je vais faire.

Il trace alors très rapidement quatre triangles que nous avons appelés $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, $M_3N_3P_3$, $M_4N_4P_4$, sur la figure 263 ci-après. Tous les tracés sont très approximatifs.

BRA - C'est un peu faux. C'est pas au centimètre près.

Dans son travail, l'élève fait intervenir une contrainte d'équilibre, celle qui impose de ne pas faire chevaucher les triangles, car il demande :

BRA - On peut superposer les triangles ?

EXP - Je peux pas répondre.

Il conserve cette contrainte. En terminant ses tracés, il ajoute :

BRA - C'est un peu ennuyeux ce que je fais, mais je pense qu'après, quand j'aurai placé tous mes triangles, que le décompte sera plus facile.

et achève en disant :

- Je peux déjà marquer : quatre.

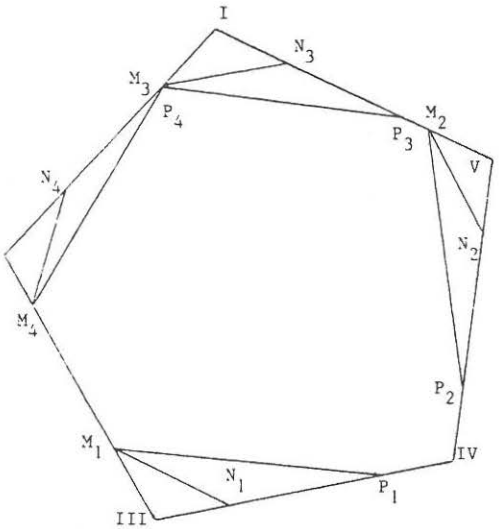


Figure 263

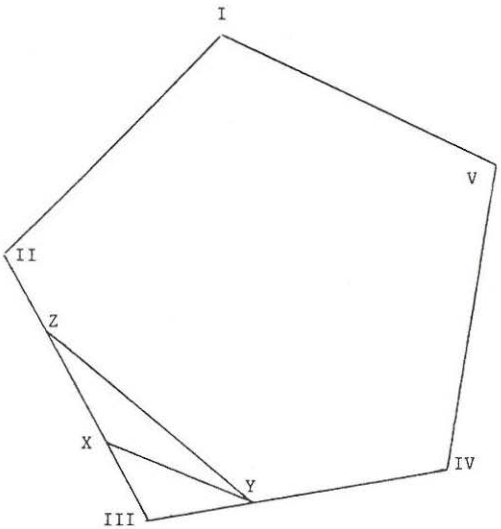


Figure 264

Nous voyons donc une idée déduite : "cinq", contrée par la pratique, qui donne "quatre" triangles dessinés. Cette pratique est elle-même contrainte par l'idée de "non chevauchement", c'est une fois de plus, l'affrontement ou encore la collaboration entre idée et pratique.

C'est alors qu'apparaît une autre idée.

BRA - Le genre de même emplacement, mais en inversant; je vais voir si ça peut marcher.

Il envisage, comme l'indique la figure 264 ci-dessus, de placer maintenant non plus le côté de 5 cm, mais le côté de 6 cm dans l'angle $\widehat{III}$.

Il construit XY = 6 cm, puis place le point Z à 5 cm de X. Il obtient ainsi un triangle XYZ qui le satisfait. Là encore, l'évidence de l'existence lui fait accepter une approximation supérieure au $\frac{1}{2}$ cm. Idée et pratique collaborent de plus belle.

Il déduit de l'existence de XYZ et des quatre triangles solutions un nouveau résultat .

BRA - Déjà ça fait 8.

Une autre déduction fait son apparition. Puisqu'il a placé le côté de 6 cm du triangle puis le côté de 5 cm, sur un côté du pentagone, il ne lui reste plus qu'à chercher des triangles solutions ayant leur côté de 10 cm porté par un côté du pentagone. C'est ce qu'il explicite dans la phrase suivante :

BRA - J'ai employé cette forme; il y a une troisième forme d'utiliser c'est-à-dire celle-là.
Mais ça marche pas.

En imaginant simplement la troisième position du triangle, il voit que ça ne marche pas.

L'élève se lance alors dans la recherche d'autres solutions.

BRA - Je vais essayer de m'imaginer dans ma tête si je peux placer d'une autre manière ce triangle.

Il réfléchit. Il regarde par transparence.

BRA - J'ai de la difficulté à imaginer une autre façon. Je tâtonne en mettant cette figure dans l'espace.

Il fait quelques essais encore et s'aperçoit qu'il peut placer cinq triangles et non pas quatre comme il l'a annoncé précédemment.

BRA - J'avais oublié certains côtés. Je trouver une autre forme. Il y a cinq côtés et j'avais compté que quatre. C'est un truc que j'avais oublié.

Il a donc obtenu maintenant 10 triangles. Et encore une fois, c'est la pratique de la figure, et les observables qu'elle procure,qui lui a permis de corriger la situation.

L'élève se lance,alors,dans une explication que nous reproduisons intégralement, car nous y trouvons des éléments de démonstration et sa volonté de prouver.

BRA - Vu la longueur de ce pentagone qui est de douze, je déduis que pour qu'il y ait les trois sommets qui touchent le bord du pentagone, étant donné que la longueur maximum d'un des côtés du triangle est de 10 cm, il faut qu'il y ait une surface de contact; c'est-à-dire que ce soit 5 cm ou 6 cm ou 10 cm entier qui soit en contact avec le pentagone.
Moi je pense que c'est comme ça, peut-être que je me trompe; mais intuitivement, je pense que ça peut marcher comme ça, en observant les figures que j'essaie; parce que là, la longueur maximum, on peut pas, à partir de ce côté, toucher l'autre côté. A part comme ça, mais dans cette position, à part dans la position déjà faite, dans ce cas là y a surface de contact.
On peut pas avoir trois points d'intersection avec le pentagone et les triangles. Donc, il faut qu'il y ait surface de contact.

Lorsqu'il dit "on peut pas à partir de ce côté toucher l'autre côté" il veut dire que le triangle ne peut pas être en contact à la fois avec un premier côté du pentagone, et un deuxième côté qui ne serait pas adjacent au premier; il indique du doigt les deux côtés en question.
Sa dernière phrase signifie que les trois sommets du triangle ne peuvent pas être sur trois côtés différents du pentagone.
BRA démontre qu'un triangle solution doit nécessairement avoir un côté porté par un côté du pentagone. Mais nous constatons deux faits. D'une part, au cours de sa démonstration proprement dite, il associe déduction (il dit : "je déduis", "il faut") et observations (il dit "intuitivement","en observant les figures" "à partir de ce côté toucher l'autre"). D'autre part, cette démonstration n'apparaît qu'après une longue procédure où la pratique de l'observation, du décalcage, des mesures, joue un rôle essentiel. Durant cette procédure, d'ailleurs, ce sont les triangles avec un côté porté par un côté du pentagone qui se sont imposés et qui ont, semble-t-il, induit l'impossibilité d'une autre situation. L'induction précède alors chronologiquement la déduction ...

L'élève poursuit son raisonnement.

BRA - Pour la longueur 10 cm, je pense pas qu'il puisse y avoir de surface de contact. Je vais encore essayer mais je vois mal comment ça pourrait rentrer. Non j'élimine la possibilité d'intersection entre la longueur 10 cm et le pentagone.

Il rejette à nouveau la possibilité d'un triangle dont les trois sommets sont sur le bord du pentagone et dont le grand côté de 10 cm est porté par un côté du pentagone. Ceci après encore quelques observations de ses dessins.

BRA - Maintenant, je vais essayer de voir si avec les autres surfaces de contact 5 cm et 6 cm, j'arrive à trouver d'autres solutions que celles déjà utilisées.

L'élève est arrivé, à la 19ème minute, à établir une première partie de la démonstration; mais cette démonstration ne prend en charge que l'état actuel du long processus très pratique qui l'a précédée. Ce qu'il se propose alors de faire c'est de se lancer à nouveau dans des observations "j. vais essayer de voir" dit-il.

BRA - Là, intuitivement, j'ai peut-être fait une autre découverte.
Je vais voir si cette longueur là peut transformer ... oui ...
J'en rajoute 5; je pense ne pas m'être trompé.
Je vais voir ce que donne le triangle.
Et là maintenant j'en rajoute cinq autres de plus puisque j'ai changé la surface de contact.
Là, j'ai mis la surface de contact qui mesurait 6 cm, je l'ai mise là ...
Attendez que je me trompe pas ...
Haï ! je crois m'être trompé ...
Je fais coulisser la surface de contact qui est de 5 cm je la fais coulisser là. Intuitivement, je pense qu'il doit y avoir quelque chose.

BRA a réalisé le triangle XYZ en ramplaçant le côté M_1N_1 = 5 cm du triangle $M_1N_1P_1$ par le côté XY = 6 cm du nouveau triangle XYZ, et en plaçant le côté de 5 cm, au lieu du côté N_1P_1 = 6 cm, sur un côté du pentagone. Il a permuté 5 et 6.

L'élève remarque, comme nous l'indiquons sur la figure 265 ci-dessous, qu'un triangle PQR, avec les points P et Q sur le côté II III, à 5 cm l'un de l'autre, et R sur III IV, peut prendre une autre position en glissant : P peut venir en P', Q en Q' et R en R'; il parle de "coulisser".

Comme la procédure qui consiste à faire coulisser le triangle est différente de la procédure qui consiste à permuter la position des côtés de 5 cm et 6 cm, il pense trouver un autre triangle solution mais il a des doutes ...

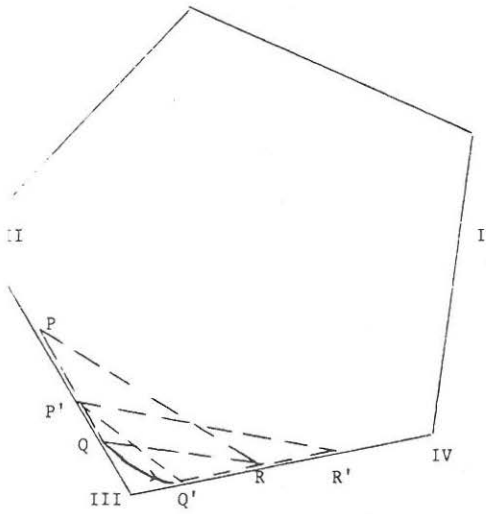


Figure 265

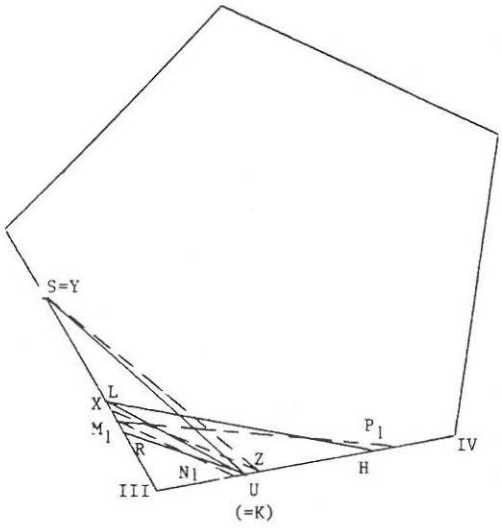


Figure 266

Il arrive enfin à organiser son travail en prenant en considération les deux triangles $M_1P_1N_1$ et XYZ précédemment obtenus. Nous représentons la procédure suivie sur la figure 266 ci-dessus. $M_1P_1N_1$ est tracé en bleu et XYZ est tracé en rouge par l'élève. Nous les représentons en pointillés sur notre figure. Il trace alors, en utilisant

· un stylo vert, le triangle RSU (en trait plein sur la figure 266) avec RS = 6 cm et SU = 10 cm; S est confondu avec Y.

BRA - Disons y a toujours quelques petites erreurs de 2 ou 3 millimètres, mais c'est finalement l'image d'ensemble qui compte. Je pense que ce segment a une bonne valeur, puisque celui-là était de 5, je viens d'en prendre un de 6. On a de nouveau une autre figure qui me paraît juste.

Il constate, après avoir achevé sa construction, en comparant les triangles XYZ et RSU, que le deuxième triangle RSU donne bien une autre solution. En effet, alors que le segment XY est de 5 cm, le nouveau côté RS est de 6 cm.

Il envisage ensuite de placer sur le côté III IV du pentagone le côté de 5 cm à la place du côté de 6 cm correspondant au triangle $M_1N_1P_1$.

BRA - Heureusement que j'ai des crayons de couleurs, sinon je m'en sortirai pas.

Il trace alors, au stylo noir, le triangle HKL, K étant confondu avec U.

BRA - Maintenant, je vérifie un peu si les autres je ne me suis pas trop trompé. Voilà; on en rajoute cinq de plus.

L'élève regarde si tous ces triangles $M_1N_1P_1$, XYZ, RSU et KHL lui paraissent convenables. Il annonce que grâce à KHL, il a cinq triangles de plus; ce qui lui fait un total de 20 triangles.

La procédure suivie consiste à remplacer le triangle XYZ avec son côté de 5 cm porté par II III, par un triangle RSU dont le côté de 6 cm est porté par II III. Puis, il remplace sur le côté III IV du pentagone $M_1N_1P_1$ par HKL en plaçant sur III IV le côté KH = 5 cm au lieu de N_1P_1 = 6 cm.

On saisit bien tout le pragmatisme de sa démarche à travers son exclamation au sujet des crayons de couleurs, la découverte d'autres situations à partir d'observables (XYZ et $M_1N_1P_1$) déjà existants, ses diverses observations de vérification. L'idée de cette classification suivant qu'on prend 5 cm ou 6 cm soit sur II III soit sur III IV est intimement liée dès la 19ème minute à cette construction très pratique.

Arrivé à cette étape a-t-il acquis une certitude ? Certainement pas car il cherche encore.

BRA - Maintenant, je vais essayer de voir si il y a une troisième possibilité; mais ça m'"étonnerait fort. Je repense à la surface de contact de 10 cm.

Il réfléchit encore longuement.

BRA - J'ai l'impression d'avoir fini. Mais puisqu'on nous a donné une heure, ça doit être plus compliqué.

Pour terminer, l'expérimentateur lui demande de prouver son résultat. L'élève va donc, dans un long monologue, donner sa preuve.

BRA - Bon, c'est-à-dire, je pars du principe que le pentagone est régulier.
Donc finalement, on peut s'intéresser que à une certaine région; et que cette région, elle est morcelée en cinq fois, finalement.
Donc ce qui sera bon pour cette région, le sera pour les quatre autres.

C'est d'abord, résumé le début de sa recherche avec une ambigüité due au mot "région" qui nous rappelle sa longue hésitation entre "quatre" et "cinq".

BRA - Après, je pars du principe qu'étant donné que la longueur maximale est de 10 cm pour le triangle, il peut pas avoir les deux bords extrêmes ... ils peuvent pas toucher à deux endroits distincts du pentagone ...
J'arrive mal à expliquer ...
C'est-à-dire ce point il peut pas avoir d'intersection avec deux côtés ...
Ah ! que je dise pas de bêtises ...
Entre deux bords qui semblent un peu opposés, à moitié opposés, du pentagone, il peut pas avoir surface de contact.
Il peut avoir surface de contact qu'avec les deux côtés du pentagone qui se touchent.

Puis il reprend la déduction qui l'a conduit à affirmer qu'un triangle solution a nécessairement un côté porté par un côté du pentagone, les trois sommets du triangle se trouvant sur deux côtés consécutifs du pentagone.

BRA - Second point, au début, en se représentant l'image du triangle, qu'il y a surface de contact pour les deux autres; c'est-à-dire surface de contact de 6 cm ou de 5 cm.

Il affirme ensuite que seuls les côtés de 5 cm et 6 cm peuvent être en contact avec un côté du pentagone. Un triangle solution ne peut pas avoir son côté de 10 cm porté par un côté du pentagone.

BRA - Après en jouant sur ces surfaces de contact, c'est-à-dire en mettant soit 6 cm soit 5 cm, d'abord de ce côté, puis après de l'autre, je trouve un nombre de triangles qui sera de quatre; quatre qui sera multiplié par cinq puisqu'il y a cinq possibilités.

Ca va, vous avez compris ?

EXP - Oui, oui.

Pour terminer, il décrit la procédure qui l'a conduit aux quatre triangles $M_1N_1P_1$, XYZ, RSU et HKL et multiplie par le nombre de "régions".

Sa multiplication par cinq n'est pas logiquement satisfaisante. En effet, sa figure 266 portant sur les deux côtés d'un angle du pentagone, il ne peut s'appuyer sur le fait qu'il y a cinq côtés. Il ne peut pas, non plus, compter cinq angles sans examiner s'il n'y a pas de triangles communs à deux angles. Le mot "région" est significatif de cette ambigüité.

La recherche de BRA offre les caractéristiques suivantes :

- des propositions a priori sont présentes tout au long de sa recherche.
- il utilise le raisonnement déductif.
- la déduction et l'induction sont souvent difficiles à distinguer.
- la pratique (dessins, observables) est intimement liée aux propositions. Elle est nécessaire au progrès dans la découverte de la solution.
- la preuve semble être un résumé du processus de découverte de la solution, qui respecte assez fidèlement la chronologie.

2. LA PREUVE

a) Examinons la notion de preuve chez les élèves ayant cherché le problème PEN.

Sur les 18 élèves qui donnent la réponse "20" à ce problème, la moitié d'entre eux ne fournissent aucune explication pouvant ressembler de près ou de loin à une preuve.

Quelle attitude rencontrons-nous, vis-à-vis de cette notion chez les autres élèves ?

Certains, arrivés à la réponse "20", continuent à chercher ou à émettre des doutes comme IER (3-14;09) qui déclare :

IER - Là, je crois que c'est tout, mais maintenant je ne suis plus certaine.

D'autres se contentent d'une affirmation laconique ou, au mieux, résument la procédure de recherche qu'ils ont suivie jusque là. C'est ainsi que IER (protocole 2-15;10) termine sa recherche en déclarant :

IER - Là, c'est pas possible parce que l'angle est plus grand que celui-là.

Je peux donc mettre quatre par angle, ça fait vingt.

Il affirme donc que un triangle solution ne peut pas avoir son grand côté porté par un côté du pentagone car l'angle du pentagone est plus grand qu'un petit angle de T (cf. figure 173). Il avait déjà obtenu ce résultat au cours de sa recherche en utilisant simultanément induction et déduction. Puis IER affirme qu'il peut placer quatre triangles solutions par angle, ce qui a été sa procédure de recherche.

D'autres, enfin, se limitent à affirmer que leur action est terminée, qu'ils ne voient plus d'autres possibilités pratiques. Que l'élève ait ou n'ait pas trouvé la solution, la preuve sollicitéeou non par l'observateur se présente souvent sous la forme de phrases telles que :

- Je ne peux pas en trouver plus. (2-15;08)
- Je n'en vois pas d'autres. (2-16;10)
- On peut pas en mettre plus. (5-15;11)
- Il n'y a que comme ça que j'ai trouvé. (5-13;03)
- Je vois qu'il n'y en a plus. (5-13;02)

Deux élèves seulement fournissent une preuve; ce sont deux élèves de première, BRA et BAR. Nous avons analysé longuement la recherche de BRA dans le paragraphe précédent (chapitre XX-1); celle de BAR (protocole 1-18;04) est analogue.

L'ensemble des protocoles du problème PEN présentent, vis-à-vis de la notion de preuve, des situations qui ne sont pas en contradiction avec les affirmations suivantes :

- Propositions a priori et raisonnements déductifs sont présents au cours de la recherche. Mais déduction et induction sont souvent difficiles à séparer. Et la pratique constituée essentiellement par la réalisation et l'observation des dessins est intimement liée aux propositions. Cette pratique est d'ailleurs indispensable au progrès dans la découverte de la solution.
- La preuve lorsqu'elle apparaît, n'apparaît qu'en fin de recherche. Elle n'est qu'un résumé du processus de découverte de la solution. Elle ne répond pas au souci d'une présentation logique de la solution, dénuée de contradictions.

Le plus souvent, l'existence d'un premier triangle solution peut être découverte par un procédé pratique : le décalquage et un mouvement plan sur plan. Le fait que, seuls les triangles, ayant un côté de 5 cm ou un côté de 6 cm porté par un côté du pentagone, sont solutions nécessite une intervention plus importante du raisonnement. Pour trouver ce dernier résultat, il faut admettre trois propositions :

A. Parmi les triangles solutions, on trouve des triangles T ayant leur côté de 5 cm porté par un côté du pentagone, et des triangles T ayant leur côté de 6 cm porté par un côté du pentagone.

B. Les triangles T ayant leur côté de 10 cm porté par un côté du pentagone ne sont jamais des triangles solutions.

C. Un triangle T solution ne peut pas avoir ses trois sommets sur trois côtés différents du pentagone, ou encore, un triangle T solution a nécessairement un côté porté par un côté du pentagone.

Ces propositions sont emboîtées. En effet, on ne pense au côté de 10 cm de T qu'après avoir pensé aux deux premiers de 5 cm et 6 cm, car la différence de longueur entre 6 cm et 5 cm permet d'associer plus facilement ces deux côtés, avant de faire intervenir le troisième, bien différent. De plus, on examine des triangles ayant un côté porté par un côté du pentagone, avant d'envisager des triangles qui ne sont pas dans cette situation. Cette hiérarchie est bien respectée par les élèves car ceux qui admettent C admettent aussi B et A, et ceux qui admettent B, admettent aussi A. On peut donc dire que ces trois propositions sont, au niveau du raisonnement, de complexité croissante, A nécessitant en général un raisonnement dépassant les seuls observables.

Le tableau 267 ci-après[1] donne dans chaque classe le pourcentage approximatif des élèves utilisant chacune de ces trois propositions A, B et C.

	6ème	5ème	4ème	3ème	2nd	1ère
A	20%	30	20	40	80	70
B	0	0	5	5	30	50
C	0	0	0	0	0	30

Tableau 267

On voit à quel point une démonstration du résultat qui nécessite les trois propositions est loin d'apparaître chez nos élèves. Pourtant la démonstration de la conjonction de ces trois propositions est relativement simple, par rapport à celles qui ont cours dans nos enseignements.

Nos élèves en situation de recherche de problème ne font pas usage d'une démonstration pour obtenir le résultat, alors que tout notre enseignement des mathématiques est fondé sur la démonstration. En particulier, le mot "démonstration" auquel sont bien habitués nos élèves n'apparaît pas une seule fois dans nos 205 protocoles.

b) Examinons la notion de preuve chez les élèves ayant cherché le problème SIM. Analysons pour cela le protocole 2-16;02 de FRA. Elle commence par expliquer ce qu'elle veut faire.

FRA - Il faut essayer de dessiner autour de ce triangle un rectangle qui le contienne juste et qui soit dans les proportions de celui-là. Après, je peux multiplier; si j'avais le rapport entre le grand et le petit, je peux multiplier le triangle.

Elle se propose donc d'inscrire le triangle T dans un rectangle R' qui soit proportionnel du rectangle donné R. Puis d'agrandir le triangle selon la proportion entre les deux rectangles. Elle réalise donc la figure 268 ci-dessous. Mais elle se rend alors compte que les deux rectangles R et R' ne sont pas proportionnels. Elle a une autre idée.

FRA - Je vais pouvoir mettre l'hypothénuse en biais comme ça comme si l'hypothénuse était la diagonale d'un rectangle.

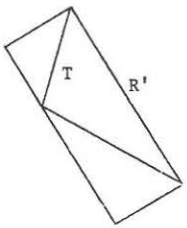


Figure 268

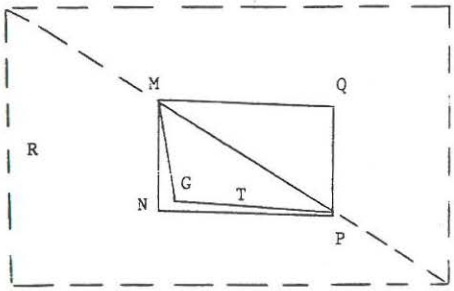


Figure 269

Elle envisage d'inscrire T dans un rectangle dont une diagonale est le grand côté de T. Pour cela, elle pose la feuille sur laquelle se trouve T, sur la feuille où se trouve R selon la figure ci-avant. Le plus grand côté de T est porté par la diagonale de R. Elle construit alors les longueurs et les largeurs du rectangle MNPQ en menant par M et P les parallèles aux côtés du rectangle R.

FRA - Si on prenait l'hypothénuse du triangle pour la diagonale du rectangle, le triangle ne sort pas du demi-rectangle.

Elle constate que le triangle MGP est contenu dans le demi-rectangle MNP.

FRA - La diagonale du rectangle c'est la plus longue longueur qu'on puisse réaliser à l'intérieur du rectangle; donc c'est la plus grande valeur qu'on puisse donner à l'hypothénuse; donc la plus grande valeur qu'on puisse donner au triangle. Si on peut le dessiner avec l'hypothénuse, ce sera le plus grand triangle.

Elle réalise alors la figure 270, représentée ci-dessous, en traçant AB, puis les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$. ABC est sa réponse.

FRA est la seule de nos 205 élèves ayant élaboré explicitement une démonstration avant de réaliser la solution. Elle a toutefois obtenu cette démonstration après une recherche s'appuyant sur des observations et des réalisations de dessins (cf. figures 268 et 269).

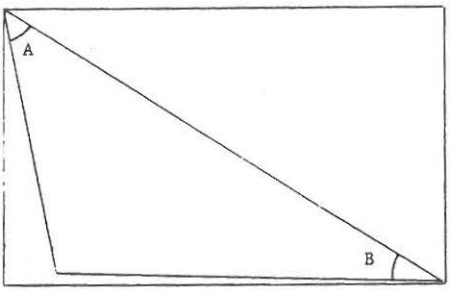


Figure 270

Parmi les 37 élèves ayant résolu le problème SIM, un tiers environ explicite une preuve qu'on peut appeler démonstration à la fin de leur recherche. C'est ainsi que dans le protocole 1-16;06-1, l'élève termine sa recherche ayant abouti à un triangle solution, par la déclaration suivante :

- On ne peut concevoir un côté plus grand que celui-là (la diagonale) et comme les autres rentrent aussi, ça va, c'est le plus grand.

Un quart de ces 37 élèves présentent toujours à la fin de leur recherche, une preuve qui est un résumé du processus de découverte de la solution. C'est ainsi que dans le protocole 2-16;00-1, l'élève obtient successivement les triangles (1), (2), (3), (4) représentés sur la figure 271 ci-dessous, le dernier de ces triangles étant la solution. Lorsque l'expérimentateur lui demande si le triangle (4) est le plus grand triangle cherché, l'élève répond :

- Oui, parce que je ne peux pas obtenir une longueur plus grande que 20 cm sinon il faudrait sortir du rectangle.

Cette preuve reflète donc bien toute sa démarche qui passe par (1), (2), (3), et aboutit en (4).

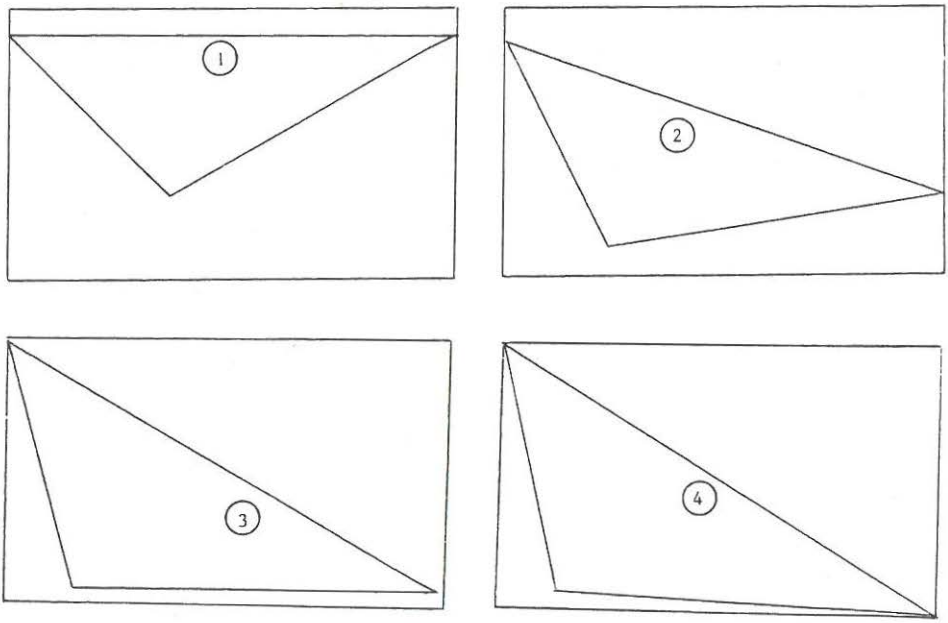


Figure 271

Le reste des 37 élèves ou bien n'expliquent rien, ou bien se contentent d'une affirmation laconique telle que "normalement c'est le plus grand" (2-16;00-2) ou encore continuent à chercher après avoir trouvé la solution.
Il semble que, dans le cas du problème SIM, la preuve soit autre chose qu'un résumé du processus de découverte, puisqu'un tiers des 37 élèves ayant trouvé la solution, aboutissent à une démonstration. Nous devons, toutefois, faire trois remarques. D'une part c'est le problème SIM qui, de nos trois problèmes, nécessite la démonstration la plus élémentaire comme le montre la comparaison des trois paragraphes V-2, X-2 et XV-2. D'autre part, les élèves qui explicitent une preuve du problème SIM, qu'on peut appeler démonstration sont essentiellement des élèves du second cycle. Enfin, des élèves qui démontrent le premier problème SIM, formulent pour le deuxième problème SIM (cf. X-4, page 156) plus difficile, une preuve qui est un résumé du processus de découverte de la solution. C'est ainsi que dans le protocole 1-16;06-1 précédemment cité, l'élève trouve le triangle représenté sur la figure 272 ci-dessous. Il essaie ensuite, durant 15 minutes, d'agrandir ce triangle soit en le faisant pivoter autour du point A soit en le translatant parallèlement à une largeur du rectangle. Sa recherche se termine sur l'affirmation suivante :
- J'en conclus que c'est fini ... On ne pourra pas l'agrandir.

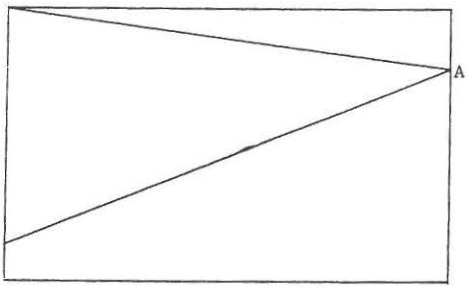


Figure 272

Cette conclusion résume la démarche qu'il a suivie: il n'a pas pu l'agrandir.

Nous estimons donc que, dans la mesure où la démonstration n'est pas trop simple pour l'élève, si ce dernier fournit une preuve, cette preuve n'apparaît qu'en fin de recherche et n'est qu'un résumé du processus de découverte de la solution.

c) Quelles principales conclusions impliquent nos trois problèmes quant à la notion de preuve ?

Enonçons les deux principaux résultats tout à fait conformes à l'ensemble de nos protocoles :

- *Propositions a priori et raisonnements déductifs sont présents au cours de la recherche de l'élève. Mais déduction et induction sont souvent difficiles à séparer. Et, la pratique, constituée essentiellement par la réalisation et l'observation des dessins, est intimement liée aux propositions. Cette pratique est d'ailleurs indispensable au progrès dans la découverte de la solution.*
- *La preuve, lorsqu'elle apparaît, n'apparaît qu'en fin de recherche. Elle n'est, le plus souvent, qu'un résumé du processus de découverte de la solution. Elle ne répond pas au souci d'un exposé logique de la solution, dénué de contradiction; c'est très rarement une démonstration.*

Ajoutons que le mot "démonstration" auquel, pourtant, nos élèves sont bien habitués n'apparaît pas une seule fois dans nos 205 protocoles.

Toutefois, nous devons prendre garde que deux de nos problèmes sont des problèmes de recherche de maximum : un nombre maximum dans le problème CRI, un plus grand triangle dans le problème SIM. Cela a une première conséquence qui a motivé nos choix. En effet, l'élève trouve, tout de suite, des réponses partielles, lorsqu'il se lance dans la recherche. Puis, il améliore ces réponses, ce qui l'incite à continuer. Cette situation suscite son intérêt. Mais une seconde conséquence doit nous rendre prudents quant au degré de généralisation de nos résultats. En effet, la nature même de ces problèmes incite l'élève à aller de l'avant le plus loin possible. Lorsqu'il ne peut plus avancer, il s'arrête. C'est fini. Il justifie alors son résultat par une description du chemin suivi. Toutefois, notre troisième problème, le problème

PEN, a été traité par les élèves comme un problème de maximum. Il se peut donc que cette démarche aboutissant à une preuve-résumé soit assez courante chez les élèves[1].

Lors de l'analyse du problème CRI, nous avons énoncé un résultat propre à ce problème : c'est le processus de différenciation-intégration qui engendre une preuve. Le résultat est compatible avec les deux énoncés présentés au début de ce paragraphe XX-2c, car nous avons montré dans le chapitre VII que le processus de différenciation-intégration est fortement corrélé au processus de découverte. L'énonciation des résultats choisie dans ce paragraphe est donc compatible avec nos trois problèmes.

3.. L'APPROXIMATION

L'approximation intervient dans, au moins, la moitié de nos protocoles. Nous n'avons pas, à l'heure actuelle, une analyse complète et précise du rôle qu'elle joue dans le travail de l'élève. Nous sommes sûr seulement que sa place y est importante. Le paragraphe XX-3 est essentiellement consacré à présenter quelques processus qui la concernent.

Sur le plan des capacités techniques, l'élève peut réaliser des mesures de longueurs et des tracés de segments de mesures données avec une approximation du millimètre, en utilisant le double décimètre. Par contre, les erreurs associées aux mesures d'angles peuvent souvent atteindre plusieurs degrés. Puisque, avec un rapporteur de rayon égal à 5 ou 6 cm, une graduation d' un degré mesure environ 1 mm, on peut estimer que l'approximation, assez défectueuse, accompagnant les mesures d'angles, est dû à une mauvaise manipulation de l'instrument. Nous observons des manipulations défectueuses en lisant, par exemple, le protocole 4-13;02-1 de LEG qui se trouve dans la partie F de ce texte. Il s'agit d'une recherche portant sur le problème SIM.

Examinons le protocole 5-13;05 de THI consacré au problème PEN. THI sait construire un triangle dont on connaît les trois côtés, au moyen du compas. A la 22ème minute, il réalise la figure 273 , représentée en vraie grandeur ci-dessous. Il place respectivement sur les côtés V I et V IV les points A et B, à 10 cm l'un de l'autre. Il trouve, en deux coups de compas, le point G tel que GA = 5 cm et GB = 6 cm.

THI - J'espérais que les deux rayons se croisent ici, que ça fasse un sommet.

Son point G n'étant pas sur le bord du pentagone, c'est un échec. Il

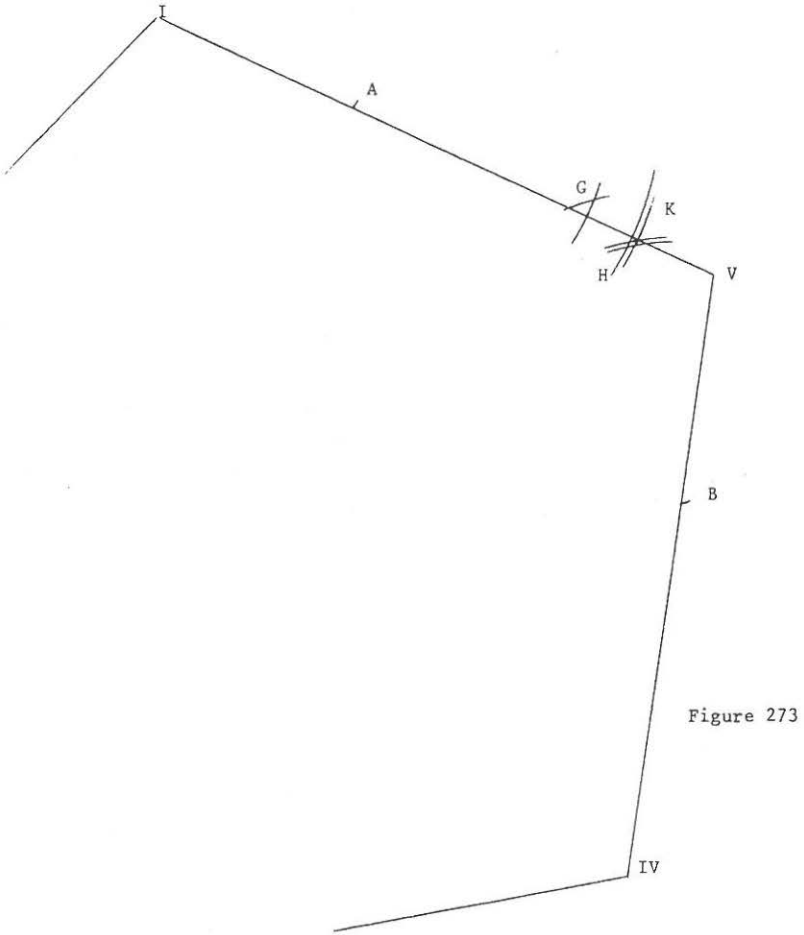


Figure 273

décide donc de chercher un point K tel que KA = 6 cm et KB = 5 cm, afin que ce point,se rapprochant de B,puisse se trouver sur le côté V I.

Il obtient ce point K qui se trouve sur le côté V I. Les mesures de AK et de BK sont légèrement érronées. L'erreur est d'environ 1 millimètre. Il décide d'améliorer l'approximation.

THI - Je vais vérifier.

Il construit donc un point H qui, avec une très bonne approximation, se trouve à 6 cm de A et à 5 cm de B. Malheureusement, H se trouve à 1 mm du côté V I.

THI - ça s'embrouille. ça touche pas.

Le travail de THI montre à quel point un élève peut être soucieux de l'approximation. Cette attitude va d'ailleurs plus ou moins paralyser son processus de découverte, car à la 45ème minute, après avoir déclaqué un triangle solution, il veut encore améliorer la précision.

THI - Je vais faire le calcul ... J'ai mal disposé mon point.

Nos élèves du secondaire ont, en général, conscience de l'approximation. Mais, c'est surtout les rapports entre l'approximation et les notions ou les propositions utilisées qui présentent un intérêt pour la compréhension des processus et des concepts en géométrie.

Nous allons analyser quatre sortes de procédures mettant en évidence la diversité de ces rapports :

a) *Les perturbations dues à une approximation difficile à maîtriser sont surmontées grâce à une solide connaissance théorique.*

b) *Une approximation trop large empêche la rectification de concepts ou de propositions érronées.*

c) *L'approximation est utilisée pour effacer des contradictions observées.*

d) *Durant le processus de recherche, les notions ou les propositions se consolident en même temps que se relâche la précision des mesures.*

a) Pour mettre en évidence la première procédure, examinons le protocole 2-16;00-2 de DAN, consacré au problème SIM. Il annonce, dès le début de sa recherche :

- Le plus grand est sur la diagonale.

Après différentes mesures portant sur le triangle donné T et différents calculs faisant intervenir les proportions, DAN passe à la réalisation de la figure 274, que nous reproduisons en vraie grandeur ci-dessous. Il trace la demi-droite Cx faisant un angle de 47° avec la diagonale. Il place sur cette demi-droite, le point A tel que CA = 10 cm. Il trace enfin la droite Ay faisant un angle de 105° avec Cx. Il obtient un point D situé à l'extérieur du rectangle à environ 1 cm de ce rectangle. Il recommence ses calculs, ses mesures. Puis, il finit par dire :

- Normalement, c'est le plus grand.

Il considère que son travail est terminé.

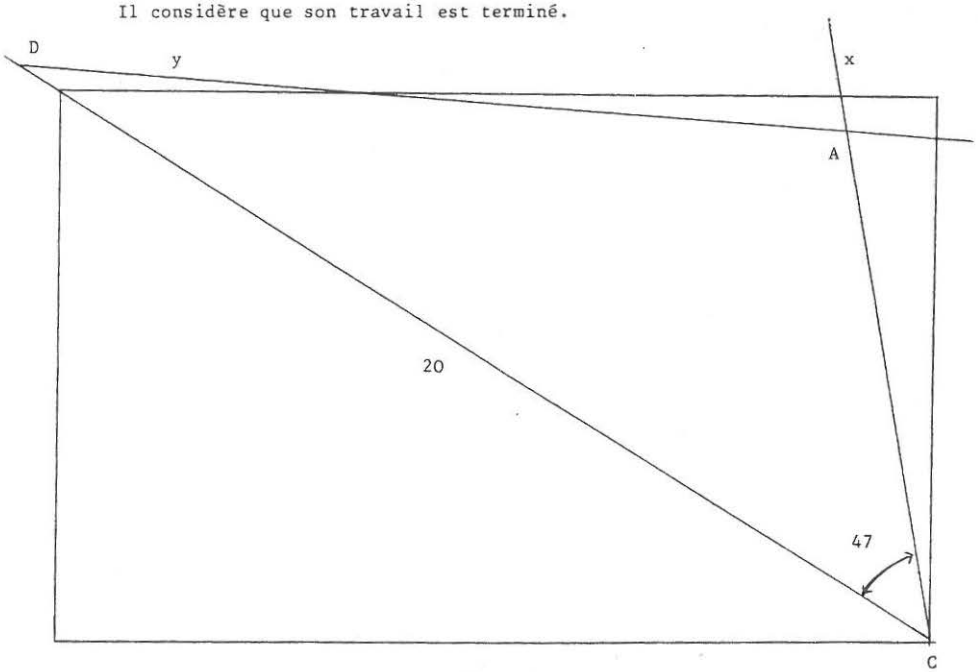


Figure 274

Nous avons là un élève qui possède parfaitement la conservation des angles et la conservation des proportions. Il est certain que la diagonale est le plus grand côté de ce triangle solution. Il trace une figure très précise. Cette figure contredit sa certitude. Ses erreurs de mesure portant sur le triangle donné T sont inférieures au $\frac{1}{2}$ degré, alors que les figures proposées ont des traits d'une épaisseur supérieure au $\frac{1}{2}$ millimètre. Il lui est donc difficile de maîtriser l'approximation. Sa certitude reste inébranlable grâce à la solidité de ses connaissances théoriques.

b) La plupart du temps, concepts et propositions ne sont pas aussi solidement acquis. Notre enseignement étant consacré à l'apprentissage, les concepts et les propositions utilisés dans les problèmes sont, chez nos élèves, le plus souvent en voie de formation. Aussi, constatons nous qu'une approximation trop grossière empêche une rectification de concepts ou de propositions erronés.
Examinons le protocole 1-17;06 de VIR, consacré au problème PEN. VIR trace tout d'abord un triangle T sur le recto d'une feuille. Puis, il retourne la feuille et dessine au verso le même triangle vu par transparence : T'. Il place ensuite T sur le pentagone dans la position (1) indiquée par la figure 275 ci-dessous et annonce :

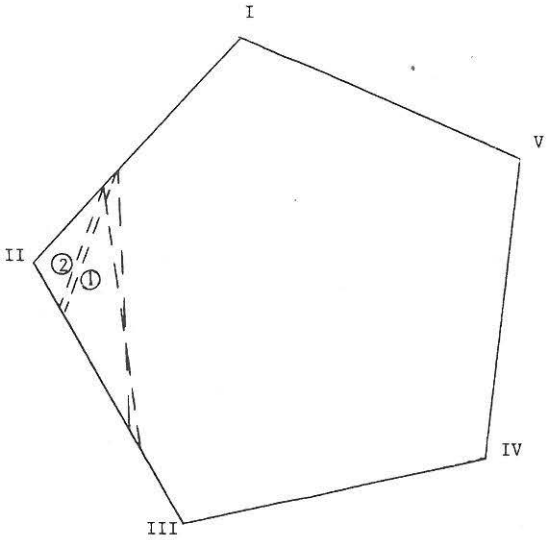


Figure 275

- ça y est, j'en ai un.

Il retourne sa feuille, place T' sur le pentagone et l'observe dans la position (2).

VIR - C'est le même ...

On peut en mettre au moins cinq. Le nombre est un multiple de cinq.

Le concept de symétrie n'est pas suffisamment assimilé, puisqu'il envisage comme possible la superposition de T et de son symétrique T'. De plus, il se contente d'une approximation très grossière puisqu'il compare au simple coup d'oeil ce qu'il voit à un moment donné, la position (1) de T et ce qu'il voit un instant plus tard, la position (2) de T'. Un peu plus tard, lorsqu'il étudie le pentagone irrégulier dont les angles sont égaux, il distingue les solutions venant de T et celles venant de T'. Pour arriver à cette distinction, il est obligé de tracer les sommets des triangles, ce qui améliore considérablement son approximation.

c) Nous avons déjà constaté lors de notre étude sur les contradictions (chapitre XIV -5 page 258) qu'un élève, grâce à l'introduction d'une approximation suffisamment large, peut effacer une contradiction. Nous rencontrons dans le problème SIM, comme dans le problème PEN, très approximativement, un élève sur huit, utilisant une telle procédure. Examinons, par exemple, le protocole 4-15;01 de CLI, consacré au problème PEN. A la 35ème minute, CLI a obtenu le triangle solution XYZ ainsi que les neuf autres triangles ayant chacun leur côté de 5 cm portés par un côté du pentagone. Nous représentons, grandeur nature, le triangle XYZ sur la figure 276. Elle déclare alors :

- Je vais essayer de déplacer d'un centimètre à mesurer.

Elle marque donc les points X' et Y' situés à 1 cm des points X et Y. Mais le triangle X'Y'Z ne lui convient pas. Remarquons qu'à un demi millimètre près, XZ = 6,05 cm, YZ = 10,15cm et XY = 5,05 cm, tandis que X'Z = 5,50 cm, Y'Z = 9,25 cm et X'Y' = 4,95 cm.

CLI - Je vais essayer avec un demi-centimètre.

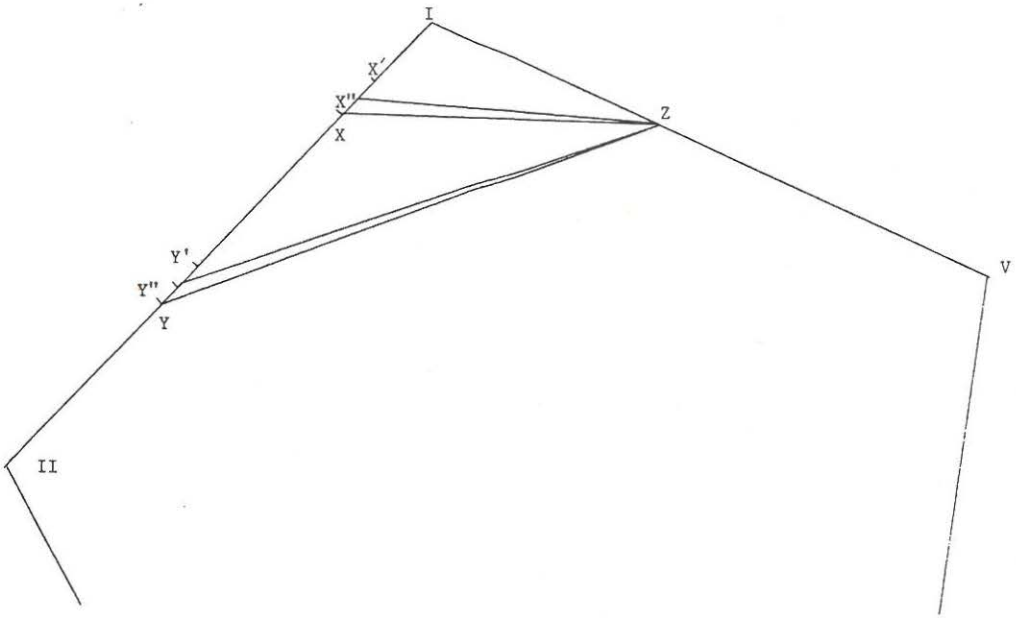


Figure 276

Elle construit le triangle X"Y"Z tel que XX" = 0,5 cm et YY" = 0,5 cm. Les dimensions de X"Y"Z sont : X"Z = 5,75 cm, Y"Z = 9,75 cm et X"Y" = 5,00cm, à un demi-millimètre près.

Le triangle X"Y"Z est accepté. Elle envisage de répéter cette construction dans d'autres angles du pentagone, mais la séance est finie. Elle estime avoir trouvé 10 solutions de plus.

C'est donc grâce à une approximation assez large (0,25 cm) qu'elle accepte le triangle X"Y"Z et efface la C.O.; ce qu'elle n'a pas pu faire pour le triangle X'Y'Z. Cette C.O., reconnue pour X'Y'Z, effacée pour X"Y"Z, aurait pu la conduire à une réflexion sur le troisième cas d'égalité, comme nous l'avons observé chez certains élèves. Nous avons une procédure où la C.O. ne joue plus son rôle, vis à vis de la formation des concepts ou des propositions, à cause d'une intervention de l'approximation.

d) La dernière procédure que nous examinons à propos du problème PEN, montre que, chez l'élève, la théorie s'affermit en même temps que la précision se relâche.

Examinons le protocole 2-16;02 de DEB. Dans la première partie de sa recherche, l'élève place des points sur le bord du pentagone en essayant de construire un triangle solution. C'est ainsi qu'il obtient successivement trois triangles ayant un côté porté par un côté du pentagone dont les dimensions sont respectivement :

6 cm ;	6 cm ;	10 cm
5 cm ;	5,8 cm ;	9,4 cm
5,1 cm ;	6,4 cm ;	10 cm

Ces triangles ne sont pas acceptés.

Il prend ensuite conscience de l'existence d'une solution en utilisant un triangle T découpé. Dans la première partie de sa recherche, il construit alors de nombreux triangles et parmi les dix triangles qu'il présente comme étant les dix triangles solutions, nous en trouvons quatre dont les dimensions sont :

4,6 cm ;	5,9 cm ;	9,35 cm
4,7 cm ;	5,95 cm ;	9,60 cm
5,4 cm ;	5,65 cm ;	9,90 cm
4,8 cm ;	5,65 cm ;	9,60 cm

DEB accepte donc des erreurs allant jusqu'à 0,65 cm, après avoir acquis la certitude de l'existence de ces triangles solutions, alors qu'il a refusé un triangle avec une erreur de 0,4 cm avant que cette certitude soit acquise.

Les différentes procédures que nous venons d'examiner montrent que l'usage de l'approximation est lié, chez l'élève, à la maîtrise des concepts et des propositions qu'il utilise. Les liens sont complexes puisque une précision moins grande peut signifier que les concepts sont bien maîtrisés (cf. a et d) ou, au contraire, mal maîtrisés (cf. c). Mais, d'une manière générale, il semble que *l'approximation choisie par l'élève se relâche lorsqu'augmente sa confiance dans les modèles théoriques qu'il utilise*. Le fait que, dans notre enseignement, les concepts et les propositions prioritaires soient en voie de formation, nous impose de ne pas négliger les questions d'approximation qui accompagnent le travail pratique des élèves (cf. b).

4. REMARQUES COMPLEMENTAIRES SUR LA PRATIQUE DE L'ELEVE

a) Nous constatons, à l'occasion du problème PEN, que nos élèves font intervenir des *variations locales* telles que nous les avons définies, page 135, pour le problème CRI.
C'est ainsi que HER (protocole 1-16;07) déclare au début de sa recherche :

- Je vais tirer tous les traits possibles et imaginables pour voir tous les triangles qui peuvent se faire.

Un peu plus tard, après quelques tracés, il ajoute :

- Mon impression, c'est qu'il y en a pas.

Puis,

- Peut-être y en a-t-il parmi ceux qu'on a pas tracés, parce qu'il n'y a pas que ceux-là.

Dans le protocole 2-17;01, nous voyons RIS, après une recherche de 20 minutes, qui a échoué, réaliser la figure 277 ci-après. Pour cela, il place les points $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$, $E_1E_2E_3$ tels que

$I\ A_1 = V\ B_1 = IV\ C_1 = III\ D_1 = II\ E_1 = 5$ cm
$I\ A_2 = V\ B_2 = IV\ C_2 = III\ D_2 = II\ E_2 = 6$ cm
$I\ A_3 = V\ B_3 = IV\ C_3 = III\ D_3 = II\ E_3 = 10$ cm

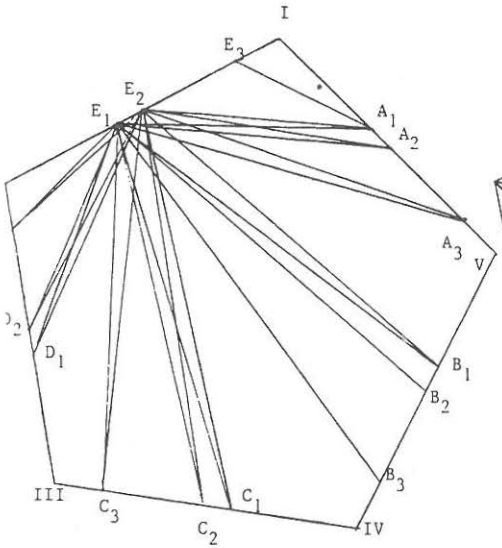


Figure 277

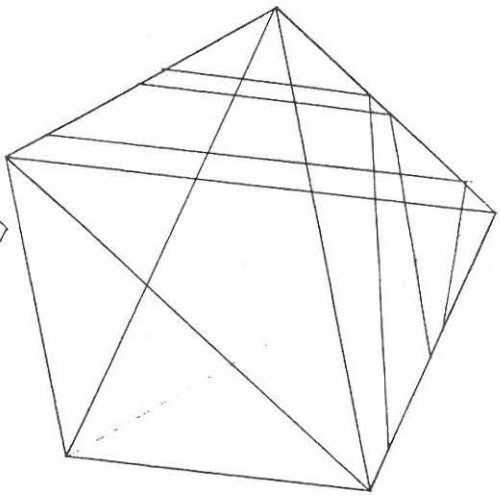


Figure 278

Puis, il trace plus de 20 segments joignant certains de ces points, et il mesure tous ces segments. Il en conclut :

- Non, ça va pas.

Mais, il recommence selon le même processus de variation locale et réalise la figure 278 ci-dessus.

RIS - Aucun triangle ne ressemble à celui-ci.

Nous retrouvons avec HER et RIS des caractéristiques de la variation locale, conduisant à l'accumulation d'observables, avec une faible coordination des idées. Aucun progrès précis vers la solution n'est prévu.

C'est la pratique la plus rudimentaire que nous rencontrons chez nos élèves.

b) Dans le problème SIM, deux processus élémentaires sur trois environ, débouchent sur une C.O. Il en est de même dans le problème PEN. Nous avons, dans les quatre précédents chapitres, donné de nombreux exemples, où apparaissent des contradictions observées.

Dans une C.O., c'est la pratique de l'élève qui est en contradiction avec les contraintes plus abstraites qu'il se donne. Nous avons rencontré d'autres *procédures fondées sur les contradictions*. Des procédures faisant intervenir des LLC, ou le hasard, ou encore un champ de contraintes muni d'une variable, comme celle que nous avons discutée dans le chapitre XIX (pages 389 et suivantes), s'appuient essentiellement sur la pratique. La réalisation et l'observation de dessins sont indispensables dans ces démarches de pensée.

Donnons encore un exemple, celui de CRO (protocole 3-14;10) utilisant une procédure fondée sur le hasard. Durant les 16 premières minutes, l'élève essaie de placer un triangle solution dans l'angle du pentagone (cf. chapitre XIX-1). Puis, il tente d'obtenir un segment de 10 cm "en travers" en déplaçant sa règle sur le pentagone. Il obtient ainsi les points A_1 et B_1 tels que A_1B_1 = 10 cm. Nous représentons sa construction sur la figure 279 ci-après. Il place ensuite C_1 à 6 cm de A_1. Il constate que B_1C_1 = 5 cm.

CRO - Dans ce cas, on peut en trouver une infinité.

Il a donc parfaitement conscience d'avoir pris le segment A_1B_1, un peu au hasard. La réussite dans le tracé du triangle lui permet de faire l'hypothèse qu'il existe une infininité de triangles solutions. Il utilise aussitôt cette hypothèse pour construire d'autres triangles solutions.

CRO - En déplaçant le trait de 10 cm et en cherchant 5 cm sur l'autre droite on doit retrouver 6 cm.

Si on déplace de 6 mm, ça marche encore.

Il marque donc un point C_2 à 6 mm de C_1 (en fait C_1C_2 = 8 mm), puis un point A_2 à 6 cm de A_1 et enfin un point B_2 à 5 cm de C_2. Mais, il devient perplexe en constatant que $B_2A_2 \neq 10$ cm (en fait B_2A_2 = 10,2 cm).

CRO - Le troisième, ça ne fait pas 10 cm.

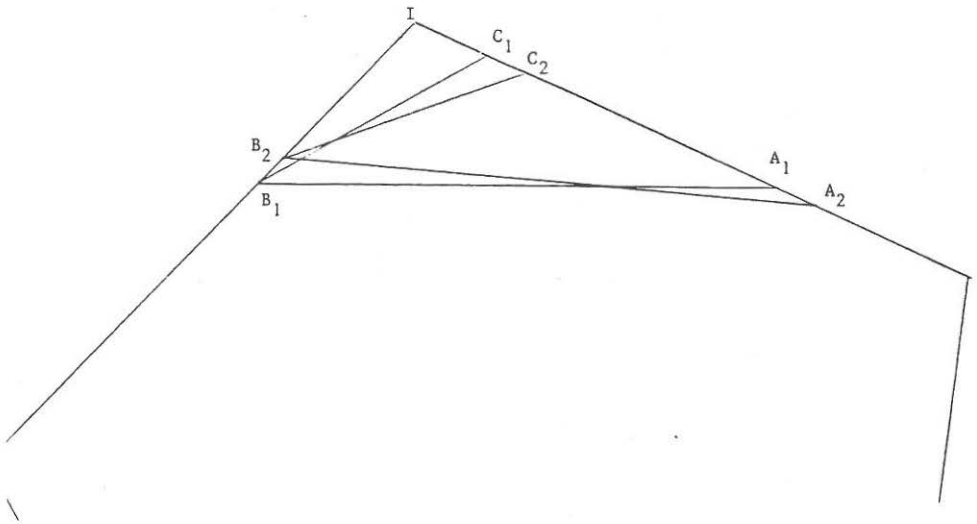


Figure 279

Le travail de CRO illustre les trois remarques suivantes :

- La pratique du dessin est indispensable à la démarche suivie.
- Cette pratique est accompagnée d'une réflexion, plus théorique : l'hypothèse de l'infinité ou encore une certaine conscience des probabilités.
- Les probabilités continues, et plus particulièrement les probabilités géométriques ne sont pas un domaine étranger à la pensée de nos élèves.

Si nous comparons la variation locale avec les procédures fondées sur les contradictions dont nous venons de parler, nous constatons que ces dernières font appel à une réflexion théorique plus poussée et à une plus grande coordination.

On peut estimer que la confrontation entre la pratique et la théorie est encore plus riche lorsque nous rencontrons des démarches expérimentales.

c) Nous avons défini *les démarches expérimentales* à l'occasion du problème CRI (cf. chapitre IX-3). La démarche expérimentale se caractérise par l'énonciation d'une hypothèse suivie d'une réalisation d'observables, se terminant sur une prise de décision portant sur la valeur de vérité de l'hypothèse.

Nous allons examiner deux protocoles traitant respectivement du problème SIM et du problème PEN.

Dans le protocole 4-13;04-1, LUR, traitant le problème SIM, trace un premier triangle ABC semblable au triangle donné T. ABC, que nous représentons sur la figure 280 ci-dessous, a été obtenu par conservation des angles.

LUR - On pourrait prendre 10 degrés de plus ...
ça n'irait pas.

EXP - Pourquoi ?

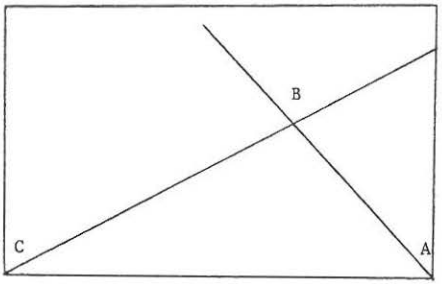


Figure 280

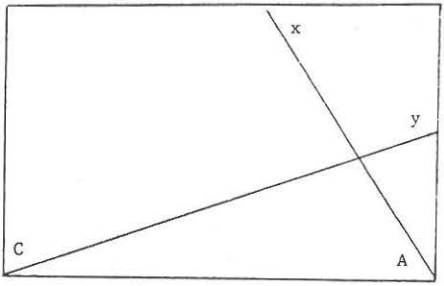


Figure 281

LUR - Ce n'est pas le même.
Mais on peut essayer.

Après quelques essais, l'élève trace un angle $\widehat{CAx} = 57°$ (= 47° + 10°) et un angle $\widehat{ACy} = 19°$ (= 29° - 10°), que nous représentons sur la figure 281 ci-dessus. Il a donc agrandi un angle de 10°. L'autre angle mesure 10° de moins.

LUR - Non ce n'est pas pareil.

Nous rencontrons là les trois étapes : hypothèse, réalisation d'observables, décision.

Dans le protocole 4-15;00, PAS, traitant le problème PEN, fait l'hypothèse suivante :

- Si je mets les deux sommets sur un côté, le troisième sera pas sur le côté. Je vais le faire comme ça.

L'élève pense que s'il place un côté du triangle sur un côté du pentagone, le troisième sommet du triangle ne peut pas être situé sur le bord du pentagone.

Il réalise alors un certain nombre de dessins que nous présentons sur la figure 282. Il trace les triangles ABC et DEF, puis essaie de construire le triangle MNP ainsi que MNQ. Au bout de dix minutes, lassé, il abandonne.

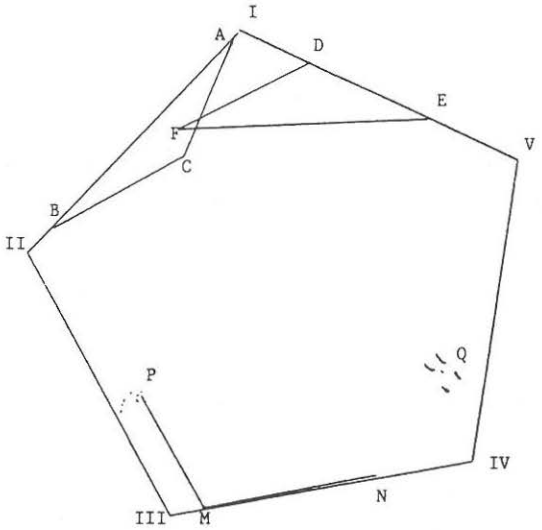


Figure 282

PAS - Bon, je n'arrive pas à trouver le triangle, je n'arrive pas à le faire.

LUR a une démarche expérimentale plus nette que celle de PAS. Après les analyses des problèmes SIM et PEN, nous pouvons nuancer les affirmations, trop brutales, données lors de l'étude du problème CRI (cf. chapitre IX-3).

Nous avons été amenés à introduire des notions qui permettent de mieux analyser ce qui peut, du moins approximativement, être considéré comme une démarche expérimentale. Ainsi, un processus élémentaire se terminant par une C.O. peut souvent être décomposé en une anticipation qui ressemble à une hypothèse, une réalisation d'observables, et une décision à la suite de la C.O. Les processus qui font intervenir les contradictions sont proches par bien des aspects de la démarche expérimentale, mais nous les traitons de façon autonome. De plus, la démarche expérimentale d'un élève n'est jamais parfaite. L'hypothèse n'est pas toujours très claire et elle fluctue en cours de réalisation. La réalisation, souvent perturbée par des contraintes extérieures à l'hypothèse, est très insuffisante. La décision est rarement définitive. Le travail de PAS illustre bien ce cheminement proche d'une démarche expérimentale, mais qui ne répond pas en toute rigueur à la définition donnée au chapitre IX-3.

Ce que nous pouvons affirmer, c'est que chez nos élèves, les procédures suivies sont beaucoup plus proches de la démarche expérimentale que de la démarche déductive.

d) Une attitude assez fréquente de nos élèves est la suivante : *si la pratique d'une réalisation est modifiée, alors le nouvel objet mathématique obtenu est différent.*

Illustrons cette attitude par l'exemple tiré du protocole 5-13;11 de LIN.

A la 25ème minute, l'expérimentateur demande à LIN de construire un triangle dont les côtés mesurent 10 cm, 6 cm et 5 cm. Elle construit alors le triangle (1) que nous représentons sur la figure 283 ci-après.

Pour cela, elle trace d'abord le côté de 10 cm, puis, au compas, trouve le sommet situé respectivement à 5 cm et 6 cm de ses extrémités. Elle juxtapose le grand angle de (1) et un angle du pentagone.

LIN - Il faut que ce soit là.

Mais, elle ne peut pas placer ce triangle dans l'angle du pentagone, car le grand angle de (1) est trop grand, l'"écartement est trop grand" dit-elle. Elle se lance dans la construction d'un deuxième triangle. Pour construire (2) elle trace un côté de 6 cm, puis, au compas, trouve le sommet situé respectivement à 10 cm et 5 cm de ses extrémités. Ce triangle (2) ne convient pas.

LIN - Il ne peut pas avoir cette forme.

Elle dessine, alors, un troisième triangle. Pour construire (3) , elle trace un côté de 5 cm, puis, au compas, trouve le sommet situé respectivement à 10 cm et 6 cm de ses extrémités. C'est un nouvel échec. Elle entreprend la réalisation de (4) . Pour cela, elle trace un grand côté de 10 cm, puis, au compas et après une hésitation, place le troisième sommet dans le demi-plan inférieur.

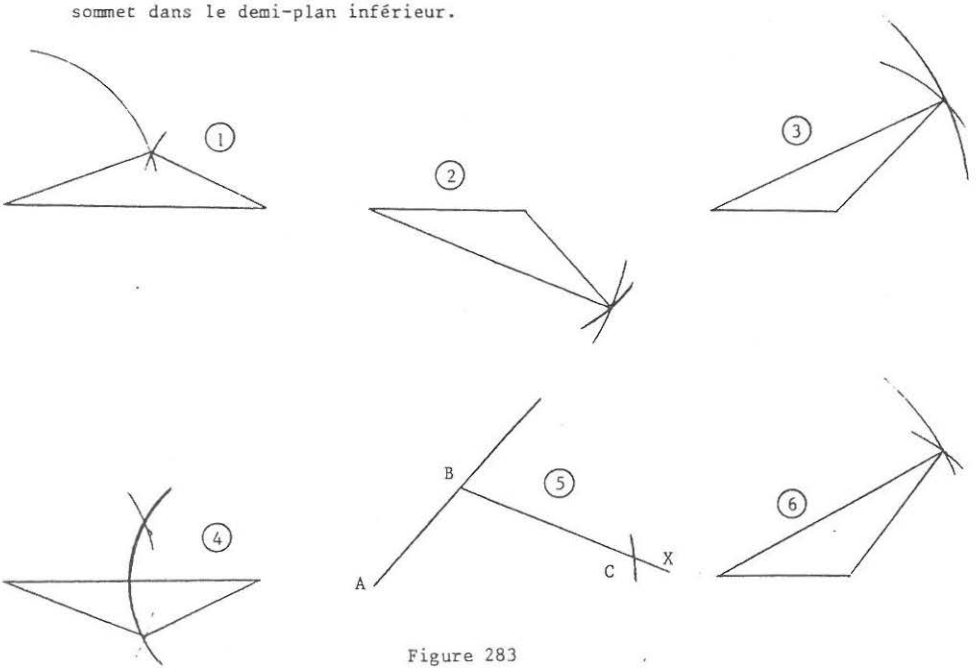


Figure 283

EXP - Pourquoi dessines-tu un autre triangle ?

LIN - Pour voir s'il tient dans un des angles (du pentagone). Le premier ne va pas (①) , celui-là non plus (②), celui-là non plus (③).

EXP - Tu veux donc essayer d'en dessiner un qui aille bien ?

LIN - Oui, mais je ne sais pas si j'y arriverai.

Elle essaie, à nouveau, de placer son triangle ④ dans l'angle du pentagone.

LIN - Non ! ça ne va pas.

Elle mesure au rapporteur les cinq angles du pentagone, constate qu'ils sont égaux.

LIN - Et en plus, ils ont le même écartement.

Elle entreprend la construction d'un cinquième triangle. Pour cela, elle trace un côté AB = 5 cm, puis construit l'angle $\widehat{ABx}$ égal à l'angle du pentagone. Elle place ensuite sur Bx le point C tel que AC = 10 cm. Mais le triangle ABC ne convient pas car BC ≠ 6 cm.

Elle dessine, donc, un sixième triangle. Pour construire ⑥ elle trace un côté de 5 cm, puis, au compas, trouve le sommet situé respectivement à 10 cm et 6 cm de ses extrémités. Le triangle ⑥ est identique au triangle ③ , à une translation près.

LIN cherche un triangle convenable depuis 20 minutes. C'est en pratiquant des constructions différentes qu'elle espère obtenir des triangles différents. Cette attitude, très pragmatique, montre de façon exemplaire les racines à partir desquelles peut croître notre enseignement, car l'histoire ne s'arrête pas là.

En effet, au bout de ces 20 minutes, c'est la découverte, par induction.

LIN - Il n'y en a aucun qui rentre et d'ailleurs ils sont pareils.

Elle mesure les angles de chacun des triangles : ① ② ③ ④ ⑥ .

LIN - Ils ont tous le même écartement. Ils sont pareils.

Cette pratique laborieuse, répétitive, s'accompagne d'une réflexion. Le modèle théorique se forme pas à pas derrière cette pratique. Et nous voyons LIN atteindre le troisième cas d'égalité ce qui n'est pas chose facile (cf. chapitre XVIII-4).

e) Une question se pose alors : un résultat peut-il être atteint à l'aide seulement de modèles théoriques ?
Si nous examinons *les protocoles ayant un grand souci théorique*, et soignant très peu les réalisations pratiques, nous constatons tout d'abord que leur nombre est très faible. Nous pouvons les classer en deux catégories. Tout d'abord, ceux dans lesquels les concepts et les propositions, suffisants pour résoudre le problème, sont parfaitement maîtrisés. C'est le cas des protocoles 0-16;06-1 pour le problème SIM, et 1-16;00 pour le problème PEN. Mais la réalisation et l'observation de dessins n'est pas absente de ces protocoles.
Dans une deuxième catégorie, nous pouvons placer les protocoles centrés sur une réflexion théorique totalement hors de propos et dans lesquels la pratique est à peu près complètement négligée. C'est le cas des protocoles 3-14;07 de MIC et 6-13;06 de JAC, qui ont traité respectivement les problèmes CRI et PEN.
En fait, dans presque tous nos protocoles, modèles théorique et pratique, du dessin, sont confrontés. La prépondérance que prend la pratique face aux insuffisances théoriques n'est pas sans succiter quelques inquiétudes chez l'élève. C'est ainsi qu'on trouve dans le problème SIM, les réflexions suivantes :
- On peut tricher en décalquant ? (protocole 3-14;03-1).
- On doit pouvoir calculer sans avoir de la chance (protocole 3-14;10).
- De toute façon, ce n'est pas satisfaisant (protocole 2-15;03).
- J'aimerais trouver une méthode sûre qui donnerait la solution au lieu de faire par tâtonnement (protocole 0-18;00-1).

ce qui montre pour le moins que l'élève peut parfaitement prendre conscience du dialogue entre théorie et pratique.

f) Nous avons mis en évidence, lors de l'analyse du problème CRI, que le dessin à main levée est une représentation de concepts ou de propositions tandis que le dessin pratiqué avec des instruments (compas, règle graduée, ...) correspond à une attitude beaucoup plus expérimentale. Cette analyse est confirmée par l'étude des quelques protocoles des problèmes SIM et PEN qui font apparaître à la fois des dessins à main levée et des dessins réalisés au moyen d'instruments. Pour nos deux

problèmes SIM et PEN, une *dizaine seulement d'élèves, sur un total de 155, pratiquent nettement le dessin à main levée.* Il est donc clair que nos élèves privilégient une pratique empirique.

g) Cet empirisme de l'élève, l'amène à faire souvent usage de *vérifications surabondantes.* Beaucoup plus rares sont les élèves réalisant des constructions avec un nombre minimum de données.
Dans le problème SIM, les deux protocoles 2-15;09 et 1-16;11 illustrent ces deux attitudes. On trouve ces protocoles dans la partie F de notre texte.

h) *En définitive,* les remarques de ce paragraphe XX-4 confirment une hypothèse générale sur laquelle nous reviendrons dans la partie D, consacrée à la synthèse. *Nos élèves, dans la recherche de problèmes de géométrie, utilisent de façon prépondérante, une pratique empirique.* La surabondance des vérifications (g), la faible importance du dessin à main levée (f), le très faible nombre de protocoles à tendance théorique (c), la grande attention portée aux fluctuations pratiques (d) correspondent à cette prépondérance. Nous avons pu caractériser certaines pratiques empiriques, notamment celles fondées sur les variations locales (a), les C.O., les LLC, le hasard, les champs de contraintes munis d'une variable (b), ou encore les démarches expérimentales (c). Nous espérons, ainsi, approcher un peu plus la complexité des rapports entre la théorie et la pratique tels qu'on les entrevoit dans la démarche de nos élèves.

oooOOooo

PARTIE D

SYNTHÈSE ET CONCLUSION

- CHAPITRE XXI -

LES CONCEPTS

1. SIMILITUDE

Nous ne rappelons pas ici le détail des conclusions portant sur la conservation des angles (chapitre XI-7) et sur la conservation des proportions (paragraphe XII-7), schématisées, respectivement, par les tableaux 59 et 66.

Il ne fait aucun doute que la notion de similitude des triangles a un sens pour nos élèves, dès le début de l'enseignement secondaire, et que, très vite, ils l'associent à la conservation des angles et à la conservation des proportions, alors que la similitude a été quasiment bannie de notre enseignement depuis la réforme des années 1970 (cf. page 46). La conservation des angles qui apparaît nettement dès le début de la classe de 5ème, montre que la notion d'angle et leur mesure est un outil, dès ce moment là.
La formation de la notion d'angle semble passer par trois paliers : tout d'abord, une notion qualitative de pente, ensuite une notion d'angle mesuré que forme une droite avec l'horizontale ou la verticale, enfin une notion d'angle mesuré de deux demi-droites quelconques (cf. paragraphe XIII-10).

L'analyse la plus intéressante, dans le cadre de la similitude des triangles, est celle du développement comparé de la conservation des angles et de la conservation des proportions.

Les chapitres XI et XII nous ont montré l'avance très nette de la conservation des angles utilisée par plus de la moitié de nos élèves du premier cycle et par tous nos élèves du second cycle (cf. paragraphe XI-5 page 167), tandis que la moitié de nos élèves de 3ème, 2ème, 1ère et terminale utilisent la proportionnalité en toute généralité qui n'est quasiment pas utilisée en 6ème, 5ème, 4ème (cf. tableau 69). Cette domination de la conservation des angles s'accompagne d'un développement laborieux de la conservation des proportions : le double et les proportions simples en sont le fondement (cf. tableau 67), la pseudo-proportion semble être un passage obligé (cf. paragraphe XII-6 b) f) g) h)) puis apparaît la proportion en toute généralité (cf. tableaux 69 et 70).

L'analyse dialectique du paragraphe XIV-7 nous a permis de mieux voir la prépondérance de la conservation des angles. Cette dernière n'est jamais dominée, ni par la proportionnalité en toute généralité, ni même par le double. Elle contrecarre ou élimine les pseudo-proportions et permet ainsi l'accès à la proportionnalité en toute généralité.

La similitude, épaulée par la conservation des angles, ne peut que contribuer à l'acquisition des structures numériques attachées à la proportionnalité. Nous avons là un exemple où la géométrie contribue à l'acquisition de structures numériques.

Sans vouloir faire de propositions de programme qui sont du domaine politique et non du domaine didactique, nous voulons mettre l'accent sur trois points de l'enseignement des mathématiques en fonction des possibilités de nos élèves :

- *La notion d'angle* semble bénéficier d'une bonne image chez nos jeunes élèves au point qu'elle constitue pour eux le fondement de la notion de similitude.
- *La similitude, si elle est définie par la conservation des angles,* est une notion très abordable par nos élèves du premier cycle dès la classe de 5ème.

- - *La conservation des proportions,* dans le cadre de l'acquisition de la similitude, doit être utilisée avec une grande prudence jusqu'en classe de troisième; elle doit être confrontée à la conservation des angles durant tout l'enseignement secondaire.

Discutons, sommairement, pour terminer, la notion de similitude telle que nous l'avons analysée, à la lumière des travaux de PIAGET J. et INHELDER B.(1947). Les résultats auxquels nous nous référons se trouvent dans leur chapitre XII.

Trois stades sont principalement dégagés par les auteurs :

Le stade II, où apparaît le "parallèlisme intuitif" et un "début d'analyse des inclinaisons".

Le stade III, qui marque la conquête des opérations permettant la mise en parallèles, l'égalisation des angles et la mise en rapports dimensionnels simples.

Le stade IV, qui est caractérisé par la mise en proportion de tous les rapports dimensionnels.

L'ordre dans lequel se succèdent ces trois stades n'est pas contradictoire avec l'importance donnée successivement par nos élèves à la conservation des pentes (cf. paragraphes XIII-7, 8, 10), puis, à la conservation des angles et des proportions simples (cf. chapitre XI et chapitre XII), enfin à la conservation des proportions en toute généralité (cf. chapitre XII).

Mais la différence entre l'âge de nos élèves (11 ans, 20 ans) et l'âge des enfants observés par Jean PIAGET et Bärbel INHELDER (6 ans, 12 ans) nous oblige à discuter deux points.

Tout d'abord, face à un véritable problème, l'élève semble n'utiliser que des outils conceptuels qu'il maîtrise parfaitement. Il va donc les chercher dans des acquis antérieurs de plusieurs années. Il semble donc qu'un concept au tout début de sa formation ne devienne un outil efficace dans la résolution de problème que plusieurs années après, et peut-être même après plusieurs années de pratique continue. Si cette hypothèse est confirmée de façon très générale, elle doit avoir des conséquences importantes sur notre enseignement. Nous remarquons en

deuxième lieu, que les expériences proposées aux enfants de Genève ne permettent pas des conclusions aussi générales sur la similitude que celles qui sont énoncées. C'est ainsi, par exemple, que dans la section portant sur la similitude des triangles (ibid page 374), la technique I ne fait appel qu'à l'homothétie et non à la similitude dans toute sa généralité et la technique II ne permet pas une prise de conscience des isométries, elle se ramène donc, elle aussi, à l'homothétie. Nous constatons encore que sur les quatre enfants, ECH, PIR, DAN, AND du stade IV caractérisé par une généralisation de la proportionnalité opératoire, les trois premiers utilisent des procédures ne faisant appel qu'à des proportions simples (nous les aurions classées parmi les procédures D que nous définissons au paragraphe XII-4), seul AND utilise un rapport $\frac{12}{5}$.
Il n'en reste pas moins vrai que grâce à un respect minutieux de l'observation, accompagné d'une intuition remarquable de la généralisation, l'école de Genève fournit une mine inépuisable d'hypothèses de travail pour la didactique des mathématiques[1].

2. ISOMETRIES

L'analyse du problème PEN nous a conduit à un certain nombre de conclusions concernant la translation, la rotation et la symétrie orthogonale. Nous les avons présentées respectivement aux pages 307, 324, 354 et 355.

Ces trois concepts ne sont pas maîtrisés par 95% de nos élèves. Ceci peut paraître normal pour la rotation qui est très tardivement enseignée; mais c'est plus surprenant pour la translation et la symétrie conceptualisées dès la classe de quatrième.

Deux idées maîtresses se dégagent des observations que nous avons pu faire sur les isométries.

La première concerne l'importance de la *pratique* chez nos élèves. A la recherche de concepts nous avons trouvé surtout :

- Une pratique du mouvement plan sur plan et du mouvement de translation rectiligne,
- Une pratique du dessin répétitif régulier,

- Le retournement (cf. page 331) qu'on peut considérer comme une notion pratique de symétrie,
- La symétrie-technique (cf. page 337) qui correspond, elle aussi, à une notion pratique de symétrie.

De plus, la prise de conscience de la pratique elle-même, n'est pas immédiate. Elle est nécessaire, mais non suffisante, pour que s'achève le "processus de conceptualisation" dont elle fait partie, comme l'a reconnu PIAGET J. (1974 c).

La deuxième idée concerne le rôle de la *conservation*. En effet, nous avons constaté qu'un tiers de nos élèves, traitant le problème PEN, utilisent la régularité en faisant référence à la conservation des distances ou à la conservation des angles. Nous avons vu aussi que la symétrie-technique est une construction conservant des distances. Chez nos élèves, les notions de rotation et de symétrie se développent non pas à partir d'une notion de transformation ponctuelle, mais à partir d'une notion de conservation de certaines mesures.

VING BANG (1965) avait déjà remarqué dans une série de travaux sur l'intuition géométrique que "la notion de conservation influence dans une très large mesure le raisonnement géométrique". Dès les années quarante, l'Institut J.J. Rousseau avait entrepris notamment avec PIAGET J. et INHELDER B. (1941) des études sur la notion de conservation. Historiquement, la théorie des invariants est au coeur de la géométrie du XIXème siècle.

Il ressort de notre analyse des problèmes PEN et SIM, que la notion de conservation joue un rôle déterminant dans la formation des concepts de transformations géométriques, car alors que ces dernières ne sont pas acquises, la conservation[1] est une notion indiscutablement prépondérante.

En définitive, nous pouvons envisager, à travers l'analyse de ce problème, certaines méthodes pédagogiques devant contribuer à la maîtrise des isométries. Leur présentation conceptuelle peut prendre appui sur les capacités pratiques de l'élève très attiré, en particulier, par la réalisation et l'observation de dessins. Deux procédures peuvent être utilisées par l'enseignant du secondaire, l'une s'appuyant sur le

mouvement plan sur plan, l'autre sur la conservation des angles et des distances. En ce qui concerne plus spécialement la symétrie orthogonale, il peut sembler judicieux de déclencher une confrontation entre le retournement et la symétrie-technique.

Une expérimentation didactique devrait permettre la mise au point de ces méthodes. Mais elle sort du cadre des recherches relatées ici, et dépasse, pour l'instant, nos possibilités.

3. LA CONSTRUCTION DU TRIANGLE

En ce qui concerne la construction d'un triangle connaissant les mesures de ses trois côtés, nous avons dégagé quelques conclusions aux pages 379 et 380 .
Nous allons revenir sur trois points : les contradictions, l'enseignement et notre méthode expérimentale.

a) Dans la construction du triangle, les procédures de tâtonnement sont fondées sur les contradictions; qu'il s'agisse de la procédure faisant intervenir le hasard, ou de celles qui utilisent un champ de contraintes avec une variable ou plusieurs variables mal coordonnées. Ces procédures apparaissent, approximativement, une fois sur deux. Elles jouent donc un rôle important. Ces résultats confirment les conclusions que nous avons énoncées à la page 262 et que nous rappelons.
A la question fondamentale :
Quelles sont les démarches de pensée suivies par un élève devant résoudre un problème de géométrie ?
Une réponse globale est : l'élève procède par contradiction.

b) Un deuxième point se dégage de notre analyse. Nous voyons apparaître, grâce aux procédures suivies par les élèves, une progression pédagogique permettant d'enseigner la construction d'un triangle connaissant ses trois côtés. En effet, nous avons repéré les cheminements spontanés

de l'élève. L'enseignant peut, alors, intervenir, car il a "une connaissance sûre de la démarche spontanée" ce qui est une condition indispensable à son intervention comme l'affirme, à juste titre, VIENNOT L. (1979). C'est donc en respectant le tableau 238 que nous pouvons élaborer cette progression pédagogique.

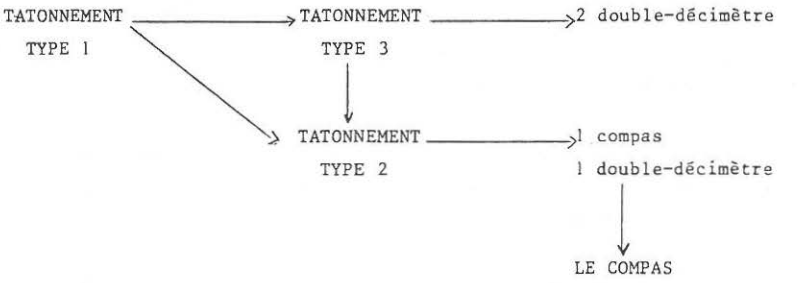


Tableau 238

c) En dernier lieu, nous examinons nos méthodes et nos buts à travers ce chapitre XVIII sur la construction d'un triangle, car grâce à sa simplicité, c'est celui qui en illustre le mieux les éléments essentiels.
La consigne suivie est très claire pour l'élève :
Construire un triangle dont les côtés mesurent respectivement 10 cm, 6 cm et 5 cm.
Cette consigne apparaît au cours d'un problème et n'est pas le centre du problème pour l'élève, il va donc la traiter avec beaucoup de spontanéité.
Ses procédures vont éclairer un certain nombre d'interrogations correspondant à notre problématique : quel est le rôle du dessin ? Des instruments de dessin ? De l'approximation ? Qu'en est-il des égalités de triangles, et, plus particulièrement, du troisième cas d'égalité ?
Avant d'analyser le travail de l'élève, la question que nous nous posons est : l'élève va-t-il procéder par tâtonnement ou bien va-t-il utiliser

son compas ? La réponse que nous apporte l'élève, et qui est résumée dans le tableau 238, est beaucoup plus précise que notre question. Par certains côtés, elle nous surprend et nous surprend fort agréablement, car elle nous dicte une progression pédagogique.
Le but principal de notre travail est de savoir, en tant qu'enseignant, comment on peut organiser l'apprentissage de l'élève. Notre méthode repose sur l'idée que, par ses démarches de pensée, l'élève va nous indiquer les progressions pédagogiques essentielles. Dans cette question de la construction d'un triangle, l'élève est notre maître ...
Ajoutons toutefois, comme pour les isométries, qu'une expérimentation didactique devrait permettre la mise au point de ces progressions.

oooOOooo

- CHAPITRE XXII -

LES PROCESSUS

1.-LES PROCESSUS ELEMENTAIRES

Dès notre premier problème, nous avons fait l'hypothèse suivante :
la recherche d'un problème de géométrie est la succession d'un certain nombre de processus élémentaires. Un processus élémentaire est composé d'une première étape qui consiste à anticiper une image, d'une deuxième étape qui consiste à réaliser un dessin ; d'une troisième étape qui consiste à enregistrer des observables (tant sur la réalisation proprement dite, que sur le dessin achevé) et à coordonner observables et idées, ce qui conduit à une nouvelle anticipation.
Non seulement cette hypothèse est confirmée par nos trois problèmes, mais encore elle s'avère indispensable en ce qui concerne l'observation des élèves, la rédaction des protocoles et l'élaboration de notre analyse.

2.-DIFFERENCIATION-INTEGRATION

Si, au cours de sa recherche, l'élève aborde des questions particulières qui peuvent être considérées comme des sous-problèmes du problème général posé, nous disons qu'il y a différenciation entre les questions particulières et le problème général. Si, de plus, les solutions particulières de ces questions sont coordonnées entre elles et conduisent ainsi à la solution générale, nous disons qu'il y a intégration des sous-problèmes dans le problème général.

Nous avons montré, pour le problème CRI, que *la découverte de la solution est fortement corrélée à l'existence d'un processus de différenciation-intégration* .

Dans le problème SIM, les deux principaux sous-problèmes sont :

- construire un triangle semblable au triangle donné T,
- construire dans le rectangle R le plus grand triangle possible.

La différenciation entre ces sous-problèmes et le problème général n'a pas été étudiée. En effet, les expérimentateurs, pour maintenir la compréhension de l'énoncé, sont intervenus avec les questions : est-ce le même ? Est-ce le plus grand ? Il sont donc intervenus dans les processus de différenciation qui, de ce fait, peuvent difficilement être analysés.

Dans le problème PEN, l'expérimentateur est intervenu une fois sur deux environ pour amener l'élève à traiter le sous-problème :

- construire le triangle dont les dimensions sont respectivement 10 cm, 6 cm, 5 cm.

Là encore, l'analyse de la différenciation n'est pas possible. Mais les interventions obligées de l'expérimentateur dans nos deux derniers problèmes confirment la nécessité de cette différenciation.

Nous devons toutefois, faire deux remarques. Dans le problème CRI, le sous-problème :

- Quel est le plus grand nombre possible de points d'intersection entre un cercle et une droite ?

qui est certainement essentiel pour un enseignant, a été négligé par nos élèves. Dans les problèmes SIM et PEN, l'étude des équilibres

(cf. chapitres XIII et XIX), nous a montré que nos élèves consacraient beaucoup d'énergie à la recherche des sous-problèmes suivants :

- Construire un triangle qui soit le même que le triangle donné T, qui soit le plus grand possible, qui soit contenu dans R et qui ait son grand côté porté par une longueur de R.
- Construire les triangles de dimensions 10 cm, 6 cm, 5 cm dont un angle est confondu avec un angle du pentagone.

Et nous n'avions pas du tout prévu, avant nos pré-expérimentations, l'importance que prendraient ces deux sous-problèmes.
Ces remarques montrent les difficultés que rencontre l'enseignant dans la maîtrise des processus de différenciation-intégration. Les enseignants de mathématiques savent depuis fort longtemps que pour poser un problème, il faut le disséquer et présenter à l'élève un certain nombre de questions successives qui sont, en fait, des sous-problèmes. Cette technique ne laisse pas à l'élève le soin de mettre en place le processus de différenciation-intégration, ce qui semble être essentiel à l'apprentissage de la résolution de problèmes. Elle présente un deuxième inconvénient : la suite des questions posées risque d'être fort éloigner du processus de différenciation-intégration spontané de l'élève. Il nous semble donc important de ne pas se cantonner à cette seule technique de construction d'énoncés si on veut que l'enseignement des mathématiques soit aussi un apprentissage à la résolution de problème.

3. LES EQUILIBRES

Lors de notre première expérimentation, portant sur le problème CRI, nous avons émis une hypothèse générale :
Un processus de recherche de problème passe par des positions d'équilibre.

Par définition, dans un processus de recherche de problème, l'élève atteint *une position d'équilibre si un résultat obtenu en cours de recherche a tendance à bloquer momentanément ou définitivement le processus de découverte de la solution et si ce résultat correspond à une situation mathématique spécifique.*

- Dans le problème CRI, nous avons mis en évidence quatre positions d'équilibre correspondant aux figures 8, 9, 10 et 4. Elles sont caractérisées par la présence d'une *symétrie axiale*.

Dans le problème SIM, nous avons mis en évidence deux positions d'équilibre. La première, propre à nos plus jeunes élèves, est caractérisée par *la conservation des pentes* des côtés d'un triangle par rapport au cadre de référence, constitué par les bords de la feuille. La deuxième, qui apparaît chez tous nos élèves à partir de la 5ème, correspond à la volonté de l'élève de placer un triangle avec un côté *horizontal ou vertical*.

Dans le problème PEN, la position d'équilibre que nous avons présentée repose sur la construction d'un triangle dont l'un des angles est confondu avec un angle du pentagone, ou, plus brièvement, sur la construction d'un *triangle dans l'angle du pentagone*.

L'existence de ces positions d'équilibre ne fait donc aucun doute, même si en toute rigueur on peut fabriquer des problèmes dont la résolution ne fait pas apparaître de position d'équilibre. Nous voulons maintenant aborder plusieurs questions liées à cette notion de position d'équilibre.

Tout d'abord, chaque position d'équilibre peut être analysée comme provenant d'une contrainte que veut respecter l'élève; l'élève veut, suivant les cas :

- une figure symétrique,
- conserver les pentes d'un triangle,
- avoir un triangle avec un côté horizontal ou vertical,
- avoir un triangle dans un angle du pentagone.

Ces contraintes ont ceci de particulier que, dans notre logique d'expérimentateur, elles ne sont pas impliquées par l'énoncé du problème. D'autre part, elles bloquent l'évolution du processus de découverte de l'élève. De telles contraintes indépendantes de l'énoncé et bloquant le processus de découverte, nous les appelons des *contraintes d'équilibre*. En ce sens, nous avons mis en évidence dans nos problèmes CRI et PEN deux autres contraintes d'équilibre, correspondant aux faits que l'élève veut :

- un non-chevauchement des figures, ou
- des figures construites à partir d'éléments remarquables déjà existants.

Nous avons donc obtenu six contraintes d'équilibre[1], quatre d'entre elles correspondant à des positions d'équilibre. Si nous avons mis en évidence ces six attitudes chez l'élève, ce n'est pas par un souci d'inventer des vocables, comme position d'équilibre ou contrainte d'équilibre, mais parce qu'elles montrent que l'élève aborde tout problème avec sa propre problématique qui vient s'ajouter aux conditions d'énoncé. Sa problématique a l'avantage de le lancer tout de suite dans la recherche. Il a immédiatement des figures symétriques pour le problème CRI, un triangle à côté horizontal pour le problème SIM et un triangle dans l'angle du pentagone pour le problème PEN. Nous avons vu aussi comment la stabilité permet de relancer une recherche dans l'impasse (cf. paragraphe XIII-6). Sa problématique a l'inconvénient, si elle fait appel à une contrainte d'équilibre, de bloquer le processus de découverte.

Dans ces conditions, l'enseignement des mathématiques peut difficilement se passer de la connaissance de ces contraintes d'équilibre qui régissent les démarches de pensée de l'élève.[2]

Un deuxième aspect essentiel de ces positions d'équilibre, ou de ces contraintes d'équilibre, est la place tenue par le figuratif. En effet, *le dessin et certaines images y jouent un rôle prépondérant.* Il suffit de passer en revue les six contraintes d'équilibre précédemment citées pour s'en rendre compte. Nous avons pour nos quatre positions d'équilibre, quatre images types comme, par exemple, celles que nous représentons sur la figure 284 ci-après.

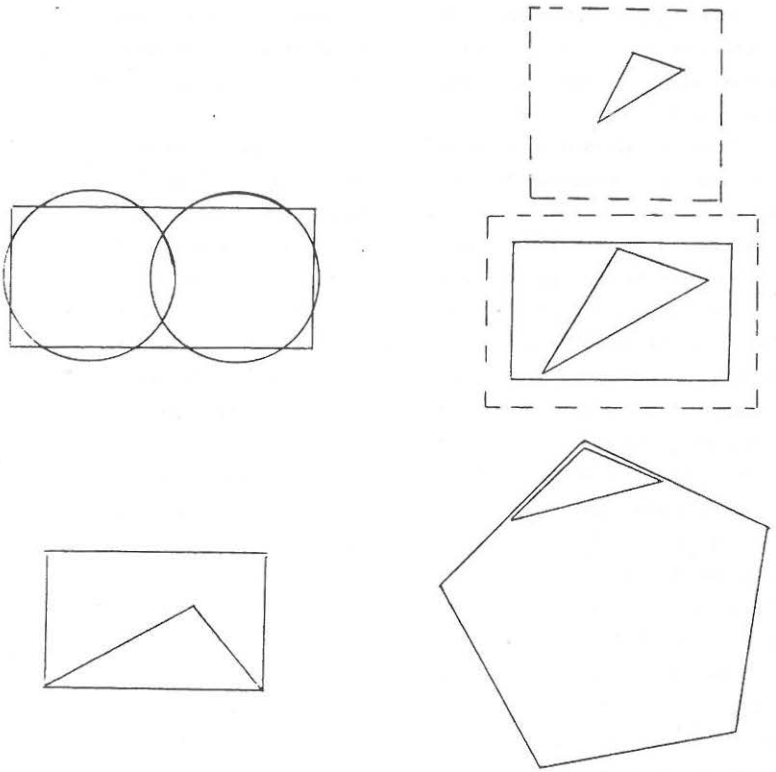


Figure 28

Il ne nous semble pas aberrant de faire l'hypothèse que c'est l'aspect figuratif de ces contraintes d'équilibre qui les rend si tenaces.

Nous allons maintenant examiner une autre question : ces contraintes d'équilibre sont-elles indépendantes de tout concept mathématique ? Avons-nous simplement affaire à de bonnes formes au sens des gestaltistes ?

Pour certaines d'entre elles, nous n'avons pas de réponse nette à ces questions. Notamment, les deux contraintes d'équilibre fondées sur le "non-chevauchement" et les "éléments remarquables" ne nous paraissent pas liées à des concepts particuliers. Il semble que l'élève cherche uniquement une simplification de la tâche.

Par contre, *nos quatre positions d'équilibre sont nettement liées à des concepts mathématiques*. Les positions d'équilibre du problème CRI font intervenir, de façon évidente, la notion de figure symétrique, accompagnée de procédures qui amènent l'élève à faire "pareil" des deux côtés, "pareil" avec les deux cercles. Les positions d'équilibre du problème SIM sont intimement associées au développement de la notion d'angle comme nous l'avons montré tout au long du chapitre XIII, et plus particulièrement au paragraphe XIII-10. La position d'équilibre du problème PEN est associée à la méconnaissance du troisième cas d'égalité des triangles comme nous l'avons montré au cours des paragraphes XVIII-4 et XIX-1 (page 387).

Avec les positions d'équilibre apparaissent donc à la fois figures et structures. Ces deux aspects sont très nets pour l'expérimentateur qui, de plus, centre son analyse sur les structures, car un de ses principaux objectifs d'enseignant est de faire acquérir à l'élève la maîtrise de ces structures. Mais le rôle très important que jouent les positions d'équilibre dans nos problèmes montre que l'élève donne au figuratif une place privilégiée. Il lui est difficile, de ce fait, de prendre conscience des structures en formation. Autrement dit, pour répondre à la question posée plus haut, l'équilibre dépend de concepts mathématiques, mais la prise de conscience de cette dépendance ne peut apparaître chez l'élève qu'avec le dépassement de l'équilibre.

Ajoutons une dernière remarque. Si comme le laisse supposer notre analyse, en géométrie, le figuratif est essentiel pour l'élève, alors que l'enseignant se centre sur le structurel, on risque d'assister dans bien des classes, à un dialogue de sourd.

- *Discutons* sommairement, pour terminer, notre notion de position d'équilibre à la lumière des notions de PIAGET J. (1975), et du phénomène de "clôture"de LEONARD F. (1979 a).

Nous avons analysé attentivement le dépassement des positions d'équilibre dans nos deux derniers problèmes SIM et PEN. Dans les deux cas, nous trouvons ce que PIAGET J. (1975) appelle "une marche vers un meilleur équilibre"; avec des "compensations", comme dans le cas des procédures de dépassement présentées page 389 et suivantes ; et "des constructions proprement dites" comme dans le passage de l'équilibre de la conservation des pentes, à celui de l'horizontale et de la verticale (paragraphes XIII-8et 9). Mais, si nous rencontrons dans nos problèmes des processus d'équilibration majorante, nous sommes loin de pouvoir décrire tout le développement de nos élèves de l'enseignement secondaire comme un processus d'équilibration majorante; d'autant plus que notre expérimentation est trop localisée à de simples problèmes.

LEONARD F. a été le premier à se rendre compte lors du séminaire de didactique d'Octobre 1980 que nous dégageons de nos expériences respectives une notion, qu'il appelle "clôture" qui est très voisine de notre notion de position d'équilibre[1]. Cette notion, qui apparaît donc, tantôt chez des adultes, tantôt chez des élèves de l'enseignement secondaire, aussi bien pour un problème de raisonnement que pour des problèmes de géométrie euclidienne plane, semble ainsi bénéficier d'un statut cognitif très général. Ajoutons toutefois, que si cette convergence de vues à laquelle nous arrivons de façon indépendante renforce l'existence de la notion, les deux recherches expérimentales celle de LEONARD F. comme la notre, plongent leurs racines dans la même théorie de l'équilibration des structures cognitives de PIAGET J. (1975).

4. CONTRADICTIONS

Si, durant un processus élémentaire, l'élève, après sa réalisation ou au cours de sa réalisation, exprime le rejet de cette réalisation parce qu'elle ne satisfait pas à une ou plusieurs contraintes qu'il veut respecter, nous sommes en présence d'une *contradiction observée*.

Nos élèves utilisent très fréquemment une procédure aboutissant à une contradiction observée. On peut estimer, approximativement, que deux processus élémentaires sur trois aboutissent à une contradiction observée. Nous avons là une démarche de pensée fondamentale chez l'élève. C'est pour cette raison qu'à la question : quelles sont les démarches de pensée suivies par un élève devant résoudre un problème de géométrie? Nous fournissons une réponse globale : l'élève procède par contradiction. Pourtant, ce processus n'est pas pris en compte dans notre enseignement des mathématiques, sauf, peut-être, avec le label d'erreur.

Certaines procédures d'élèves, fondées sur la contradiction observée, méritent une attention particulière.

La première que nous avons mise en évidence est celle de *lacune locale compensée*. Nous l'avons longuement analysée à l'occasion de notre premier problème, et nous l'avons retrouvée dans nos deux autres problèmes. Une deuxième procédure, fréquente chez nos élèves, consiste à faire intervenir *le hasard*, ce qui les amène inévitablement à une contradiction observée. Lorsque l'élève fait intervenir un *champ de contraintes muni d'une variable*, nous obtenons une troisième procédure où la maîtrise des contraintes est plus grande que dans la procédure faisant appel au seul hasard.

Le rôle important donné par l'élève à la contradiction observée nous amène à faire deux remarques. L'une nous rapproche de la psychologie cognitive, l'autre concerne l'enseignant de mathématique. Tout d'abord, il semble bien que chez nos élèves la négation, indispensable aux contradictions observées, se présente avec une permanence aussi grande que l'affirmation. Ce qui rejoint le point de vue de PIAGET J. (1974 b) affirmant que la négation devient systématique lorsque les structures d'ensemble atteignent un statut opératoire[1]. D'autre part, la contradiction observée, si fréquente chez nos élèves, peut devenir une méthode d'intervention utilisée par les enseignants. En portant la négation sur un aspect très localisé du travail de l'élève, le professeur peut intervenir de façon naturelle et relancer ainsi la réflexion ou la recherche de cet élève.

Nous avons donné, dans l'introduction, la définition d'une *contrainte*, que nous rappelons. Une contrainte est une consigne que veut respecter l'élève dans la réalisation de sa construction géométrique. A chaque processus élémentaire est associé un ensemble de contraintes que se donne l'élève : nous appelons cet ensemble de contraintes un *champ de contraintes*.

Mais, la description d'un champ de contraintes nécessite une analyse de l'expérimentateur. Aussi cette description est-elle un compromis entre la production objective de l'élève qui est composée, pour l'essentiel, des phrases qu'il prononce et des dessins qu'il réalise, et les modèles développés par l'expérimentateur. Une fois déterminé un champ de contraintes, la notion de *contradiction logique* s'impose d'elle-même. Si, dans les limites d'un processus élémentaire, la réalisation géométrique devant satisfaire le champ de contraintes n'existe pas, nous disons qu'il y a contradiction logique. C'est ainsi que nous avons pu utiliser la contradiction logique entre la pseudo-proportionnalité et la conservation des angles pour étudier la similitude. Ce sont les liens entre contradictions observées et contradictions logiques qui permettent de confronter la pensée de l'élève et les modèles prêtés à l'élève mais conçus par l'expérimentateur. D'où la nécessité d'introduire un troisième type de contradiction : *la contradiction analysée*. Si au cours ou à la fin d'un processus élémentaire, l'élève, après avoir mis en évidence une contradiction observée, due à une contradiction logique du champ de contraintes, l'analyse comme provenant de son champ de contraintes contradictoire, nous disons que nous avons affaire à une contradiction analysée. Il s'agit, bien entendu, d'une contradiction analysée par l'élève. La recherche de ces différentes contradictions liées aux réalisations de l'élève et aux champs de contraintes, nous l'appelons : *analyse dialectique*. L'analyse dialectique permet de confronter l'évolution de deux concepts. Nous l'avons utilisée pour comparer le rôle relatif de la conservation des angles et de la conservation des proportions dans l'acquisition de la similitude des triangles. Elle permet aussi de mieux comprendre l'évolution d'un concept en formation.

C'est elle, essentiellement, qui sert de trame à l'analyse de la plupart des protocoles présentés. C'est elle qui nous a permis d'analyser les différents types de tâtonnement dans la construction du triangle ainsi que les procédures de dépassement de l'équilibre du triangle dans l'angle du pentagone.

Nous essayons de distinguer avec le plus de soin possible ce qui est du domaine de la réalisation de l'élève et ce qui appartient au champ de contraintes. De même, dans l'analyse dialectique, nous séparons le plus nettement possible les contradictions observées et les contradictions logiques. Chaque confrontation entre deux aspects, l'un plus proche de l'élève, l'autre plus proche de l'expérimentateur nous renseigne sur l'évolution des concepts en formation. Dans une de ses classifications des contradictions, PIAGET J. (1974 b) distingue :

"Les contradictions ou conflits intervenant entre un schéme d'actions ou d'opérations du sujet et un autre schème de même nature, et les contradictions entre une prévision du sujet, donc un schème anticipateur et un fait extérieur infirmant cette prévision".

Nos contradictions logiques et observées sont très proches de cette subdivision. PIAGET J. (1974 b) ajoute :

"Mais, comme nous l'avons sans cesse constaté, la différence entre ces deux formes de contradictions est bien moins grande qu'on pourrait le supposer ..."[1].

A ce moment là, nous ne pouvons plus suivre l'analyse piagétienne, car une trop grande confusion entre les modèles de l'expérimentateur et ceux de l'élève nous empêche d'analyser l'évolution des structures chez ce dernier. Remarquons toutefois que cette distinction nécessaire est loin d'être aisée. Si, par exemple, nous distinguons la procédure de l'élève faisant appel au hasard ("hasard" est un mot prononcé par l'élève) et l'analyse fondée sur les contradictions logiques munies d'un espace probabilisés, par contre, nous traitons la procédure faisant intervenir un champ de contraintes muni d'une variable avec moins de rigueur quant à la dichotomie, expérimentateur-élève.

Nous avons constaté, de plus, comme nous le répèterons, dans le paragraphe suivant, que la pratique de l'élève quoiqu'en interaction avec une réflexion théorique, est très souvent loin de correspondre à la mise en place d'un modèle théorique achevé. Aussi, devons nous utiliser très prudemment des notions telles que "théorème en acte", "propositions implicites" (cf. chapitre I page 34) ou encore "modèle implicite". En effet, de telles expressions, amalgamant élève et expérimentateur, peuvent donner naissance à une solide ambigüité, et empêcher l'analyse de la formation des concepts.

5. PRATIQUE ET THEORIE

Les expérimentateurs unanimes ont pu constater l'activité pratique très importante de nos élèves. Nous avons recueilli au total 766 feuilles de dessin. Sur chaque feuille, nous trouvons en général, plusieurs dessins. Nous avons environ 2300 dessins, chaque dessin correspondant à un processus élémentaire. En moyenne, un élève réalise un dessin toutes les quatre minutes.

Les instruments de dessin les plus utilisés sont le double-décimètre, le rapporteur, le compas et l'équerre. Le double-décimètre sert à la fois de règle et d'instrument de mesure, c'est l'instrument de dessin privilégié. Rappelons toutefois que nous ne sommes pas sortis du cadre de la géométrie plane euclidienne. Le rapporteur est d'un usage plus difficile pour les élèves. L'équerre lorsqu'elle n'est pas utilisée comme une règle, sert encore à repérer des angles droits, mais aussi à comparer des angles aigus. Bien entendu, son utilisation pour tracer des perpendiculaires n'est pas exclue. Une étude systématique des différents usages des divers instruments de dessin, qui n'a pas été entreprise ici, présenterait un intérêt certain.

. D'autres activités pratiques accompagnent l'activité principale réservée au dessin. L'élève décalque et découpe. Il plie, mais assez rarement dans nos problèmes. Il déplace des feuilles, notamment lorsqu'il effectue un mouvement plan sur plan ou un retournement.

La principale question que nous nous posons, au sujet de la liaison pratique-théorie, est la suivante :
Chez nos élèves en situation de réalisation de problèmes, la réflexion théorique domine-t-elle la réalisation pratique ? Ou bien est-ce le contraire ?

Nous avons mis en évidence une procédure où la réalisation pratique domine; il s'agit de la *variation locale*, dont nous avons parlé dans les paragraphes IX-2 et XX-4.a. Nous avons trouvé aussi quelques protocoles dans lesquels *la réflexion théorique domine* (cf. paragraphe XX-4.e). Mais, ces deux attitudes ne représentent qu'un faible pourcentage (moins de 5%) de l'ensemble des procédures utilisées par nos élèves.

En fait, l'attitude dominante fait appel à une constante *interaction entre les réalisations pratiques et les réflexions théoriques*. Les premières sont essentiellement constituées par des dessins; les secondes par des propositions, des notions, des concepts et diverses inférences qui les accompagnent.

Cette interaction est tellement importante que même les modèles d'analyse propres à l'expérimentateur en subissent l'influence. C'est ainsi que la notion de contrainte prend en compte à la fois des notions théoriques de l'élève et la réalisation de son dessin.

Tous les processus utilisant les *contradictions* observées s'articulent autour de la rencontre d'une hypothèse et d'un dessin qui va la contredire. C'est donc une interaction entre la pratique et la théorie qui régit les lacunes locales compensées, les démarches fondées sur le hasard, les procédures faisant intervenir un champ de contraintes muni d'une variable.

Le processus le plus élaboré, en ce sens, semble être *la démarche expérimentale.*
L'approximation utilisée par l'élève, le dessin à main levée, la surabondance des vérifications mettent en évidence la fluctuation de cette interaction.
La démarche de preuve elle-même est essentiellement la prise en compte de l'action, et cette action est, répétons le, l'interaction entre la réalisation pratique et la réflexion théorique de l'élève.

Mais cette interaction évolue très laborieusement, très lentement, et la pratique, parfois complexe, *ne débouche pas obligatoirement sur la synthèse théorique.* L'équilibre et ses observables dominants, bloquent le processus de découverte de la solution. La pratique, seule, n'efface pas les pseudo-proportions, il lui faut l'aide d'une notion comme la conservation des angles. La similitude en tant que transformation, n'apparaît jamais, pourtant nos élèves de second cycle en ressentent le besoin pour résoudre le problème SIM. La pratique du mouvement de translation rectiligne n'est pas la prise de conscience des concepts de translation ou de mouvement de translation. Le retournement et la symétrie-technique ne débouchent pas automatiquement sur le concept de symétrie orthogonale. La rotation reste une régularité pragmatique. Le pas entre le tâtonnement de type 3 et la construction utilisant le double-décimètre et le compas n'est jamais franchi. Dans le problème PEN, la manipulation d'un triangle décalqué ou découpé entraîne, très difficilement, une bonne coordination des différentes notions, nécessaire à la démonstration. Dans l'ensemble, la prise de conscience est toujours très difficile[1].
La pratique de nos élèves est très importante, elle est en interaction permanente avec leur réflexion théorique. Mais, laisser les élèves redécouvrir cette théorie, c'est les amener à ne rien découvrir ou à découvrir fort peu de choses. Le temps leur manquera, ils seront paralysés par la diversité et la surabondance des tâches pratiques. L'enseignant doit intervenir.

Si nous nous référons au travail de nos élèves, il nous semble que notre rôle d'enseignant peut se décomposer en trois attitudes :

- Connaître les processus suivis par les élèves, et dans lesquels la pratique joue un rôle important.
- Favoriser le développement de ces processus et l'interaction entre les réalisations pratiques et les réflexions théoriques qui les accompagnent.
- Intervenir enfin pour permettre l'éclosion de la synthèse théorique.

oooOOooo

- CHAPITRE XXIII -

CONCLUSION GENERALE

Les résultats que nous avons obtenus, ne peuvent être considérés comme des résultats que parce qu'ils sont confirmés par les expérimentations réalisées avec les trois problèmes CRI, SIM et PEN. Si nous prenons en considération l'ensemble des élèves de l'enseignement secondaire face à la géométrie euclidienne plane, ces résultats ne peuvent avoir qu'un rôle d'hypothèse. Encore faut-il modifier les énoncés de nos résultats pour les transformer en hypothèses générales, qu'il faudra expérimenter à nouveau.
Les deux principales interrogations dont il nous faut tenir compte sont les suivantes :

- Est-ce que notre travail apporte une réponse aux questions posées par notre problématique ? (cf. chapitre IV).
- Est-ce que les résultats que nous pensons obtenir présentent un intérêt immédiat pour l'enseignement des mathématiques ?

En ce qui concerne les concepts de notre champ conceptuel, nous proposons les résultats suivants :

- Aucun indice ne nous permet d'affirmer que le concept de *groupe de transformations* soit en voie de constitution chez nos élèves.
- La notion de *translation* existe chez les élèves. Avant que le concept soit formé, la notion apparaît sous une forme pratique reposant sur le mouvement de translation rectiligne et faisant appel plus généralement au mouvement plan sur plan.
- La *symétrie orthogonale* est, elle aussi, en voie de formation, elle est utilisée essentiellement comme une notion pratique sous deux aspects : le retournement et la symétrie-technique. La conservation des mesures de longueur y joue un rôle déterminant.
- La *rotation* n'est pas conceptualisée. Sa forme pratique la plus évoluée fait intervenir la conservation des mesures de longueurs et d'angles.
- La *notion d'angle*, sous forme de couple de demi-droites est en voie de conceptualisation rapide au début du premier cycle (6ème et 5ème). La notion de mesure d'angle est acquise en même temps. Dans la pratique, elle se heurte toutefois aux difficultés dues à l'usage du rapporteur.
- La *similitude des triangles*, définie par la *conservation des angles*, est une notion très assimilable par nos élèves du premier cycle dès la classe de 5ème.
- La similitude des triangles, définie par *la conservation des proportions*, n'est vraiment assimilable qu'à la fin du premier cycle ou au début du second cycle.
- L'unicité, à une isométrie près, d'un triangle défini par la longueur de ses trois côtés (*troisième cas d'égalité*) n'est pas une proposition acquise par nos élèves du secondaire.
- Les notions de *conservation*, notamment de conservation de mesures de longueurs et d'angles jouent un rôle déterminant dans la formation des concepts de transformations géométriques.

En ce qui concerne les procédures et les processus, nous proposons les résultats suivants :

- *Le dessin*, et plus particulièrement le dessin précis avec usage d'instruments de dessin, joue un rôle indispensable pour l'élève, dans la résolution de problèmes de géométrie euclidienne plane.

- Les trois principaux *instruments de dessin* utilisés sont le double-décimètre, le rapporteur et le compas. Le double-décimètre sert à la fois de règle et d'instrument de mesure, c'est l'instrument de dessin privilégié. Le rapporteur est d'un usage plus difficile pour les élèves.
- *L'approximation* utilisée par l'élève dépend de sa plus ou moins grande maîtrise des connaissances théoriques. L'approximation choisie par l'élève se relâche lorsqu'augmente sa confiance dans les modèles théoriques qu'il utilise.
- La démarche de pensée que l'élève utilise pour résoudre un problème se présente comme une suite de séquences assez courtes relativement indépendantes les unes des autres. Quelques stratégies partielles regroupant plusieurs séquences apparaissent quelquefois. Une stratégie d'ensemble est rarement envisagée a priori. Cela nous a conduit à définir *le processus élémentaire*.
- Les démarches de pensée que l'élève utilise pour résoudre un problème de géométrie sont essentiellement fondées sur *l'interaction entre ses réalisations pratiques et sa réflexion théorique*.
- Pour résoudre un problème de géométrie, l'élève procède surtout *par contradiction*. Les principaux processus fondés sur ces contradictions reposent soit sur les lacunes compensées, soit sur l'utilisation du hasard, soit sur l'usage d'un champ de contraintes muni d'une variable.
- Certaines situations mathématiques privilégiées, fortement enracinées chez l'élève et s'appuyant sur des figures solidement établies, bloquent souvent la recherche de l'élève. Nous les avons appelées *"positions d'équilibre"*.
- La résolution de problèmes nécessite la mise en place d'un processus de *différenciation-intégration*, difficile à obtenir pour l'élève.
- *La preuve*, lorsqu'elle apparaît, n'apparaît qu'en fin de recherche. Elle n'est le plus souvent qu'un résumé du processus de découverte de la solution. Elle ne répond pas au souci d'un exposé logique de la solution, dénué de contradiction. C'est très rarement une démonstration.

Les affirmations succintes ci-avant, tant en ce qui concerne les concepts que les processus, n'ont vraiment de sens qu'accompagnées de l'analyse détaillée se trouvant dans les divers chapitres de notre texte.

Les résultats[1] que nous avons résumés ci-avant s'accompagnent aussi de questions auxquelles nous ne savons pas répondre. Enumérons en quelques-unes, à titre de prototype :

- L'accès aux différentes transformations ponctuelles est-il possible à partir de seules notions de mouvement plan sur plan ou de conservation ? Quel rôle y jouent les fonctions algébriques ?
- Que deviennent les processus élémentaires ou les contradictions observées si le problème proposé porte sur l'analyse ou l'algèbre ?
- Les procédures pratiques sont-elles, en général, indispensables à la formation des concepts ? Qu'en est-il, s'il s'agit de concepts numériques ? Algébriques ?
- Faire jouer un rôle important aux procédures pratiques, est-ce compatible avec l'organisation actuelle de la classe et le temps disponible ?
- Peut-on accélérer la conceptualisation en donnant une plus grande place à la recherche de problèmes dans notre enseignement ?

Nous sommes partis d'une problématique née de l'enseignement. Nous voilà revenus à des questions sur l'enseignement. Dans les différents chapitres, nous avons signalé quelques conséquences pédagogiques à tirer de notre analyse. Nous insistons cependant sur le fait que ces conséquences pédagogiques n'ont pas été confrontées à l'expérimentation didactique. On doit donc les utiliser avec une grande prudence.
Au départ, nos questions étaient vagues. Par leurs procédures de recherches, les élèves ont répondu à certaines d'entre elles. Ces réponses ont quelquefois dépassé nos espérances, car leurs précisions nous ont permis d'obtenir des résultats plus crédibles et d'affiner, par la même occasion, notre problématique.

En tout état de cause, la variété et l'intelligence des cheminements suivis par tous nos élèves, qui ne font jamais rien sans raison, ont été extrêmement enrichissantes. Cette recherche fondée sur l'observation des élèves a été, pour nous enseignants, certainement un excellent apprentissage[1].

oooOOooo

Tome I - N° ISBN 2-902680-31-7

Imprimerie VAUDREY — LYON
N° d'édition 27818
Dépôt légal janvier 1984